# Matematyka II, lista zadań No. 5: Ciągłość i różniczkowalność funkcji wielu zmiennych

10.03.2014

1. Demonstracja, że dla funkcji wielu (tu: 2) zmiennych, są różne naturalne granice, w ogólności nie powiązane ze sobą.

   (a) Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie określona jako:

   $$f(x,y) = \frac{x - y + x^2 + y^2}{x+y}, \quad x + y \neq 0; \quad f(x,-x) = 0$$

   Obliczyć i porównać granice iterowane:

   $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

   Czy $f$ jest ciągła w $(0,0)$? A na prostej $y = -x$? Kto ma zaplecze techniczne, niech sporządzi wykres (dotyczy to też pozostałych zadań).

   (b) Dla $x, y \in \mathbb{R}$, funkcja $f$ jest określona jako:

   $$f(x,y) = \frac{x \sin\frac{1}{x} + y}{x+y}$$

   Znaleźć dziedzinę $f$. Czy istnieją obie granice iterowane?

   $$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y), \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y).$$

   (c) Dla $x, y \in \mathbb{R}$, funkcja $f$ jest określona jako:

   $$f(x,y) = x \sin\frac{1}{y}$$

   Znaleźć dziedzinę $f$. Czy istnieją obie granice iterowane?

   Te zadania są omówione u Fichtenholza, RRiC, t. I, rozdz. V. Język momentami archaiczny, ale przykładów pouczających jest tam sporo.

2. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona w następujący sposób:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   jest nieciągła w punkcie $(0,0)$.

3. Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona w następujący sposób:

   $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.

4. Pokazać, że funkcja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, określona w następujący sposób:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

jest nieciągła w punkcie $(0,0)$.

5. Zbadać ciągłość następujących funkcji. *Wsk.* Użycie innego układu współrzędnych, np. biegunowych, może ułatwić analizę.

(a)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(b)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^5}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(c)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^4+y^4} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(d)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(e)

$$f(x,y)=\begin{cases}\ln(x^2+y^2) & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(f)

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) & \text{dla} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{dla} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(g)

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

6. Wyliczyć z definicji pochodne kierunkowe podanych niżej funkcji w podanych niżej punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y)=x^2+3xy+5x-2$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,2)$ w kierunku wektora $v=(3,1)$.

(b) $f(x,y)=\sqrt{x+2y}$ w punkcie $(x_0,y_0)=(3,2)$ w kierunku wektora $v=(-1,1)$.

(c) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+3xyz$ w punkcie $(x_0,y_0,z_0)=(1,0,-1)$ w kierunku wektora $v=(0,1,2)$.

7. W przypadku funkcji jednej zmiennej było tw. że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to jest ciągła. W przypadku funkcji wielu zmiennych istnienie pochodnych cząstkowych *nie gwarantuje* ciągłości funkcji. Oto przykład: Pokazać, że funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określona w następujący sposób:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie $\mathbb{R}^2$, ale *nie* jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

8. Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji:

(a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{dla} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{dla} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$;

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;

(d) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

(e) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$;

(f) $f(x,y,z) = (\cos x)^{yz}$;

(g) $f(x,y,z) = \ln\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.