1 Pochodne wyższych rzędów

1.1 Definicja i przykłady

Def. *Drugą pochodną* funkcji f nazywamy pochodną pochodnej tej funkcji. Trzecia pochodna jest pochodną drugiej pochodnej; itd. Ogólnie, n-ta pochodna funkcji jest pochodną $n-1$–wszej pochodnej.

Pochodne wyższych rzędów oznaczamy

$$f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}, \ldots \quad \text{lub} \quad \frac{\mathsf{d}f}{\mathsf{d}x}, \frac{\mathsf{d}^2 f}{\mathsf{d}x^2}, \frac{\mathsf{d}^3 f}{\mathsf{d}x^3}, \ldots, \frac{\mathsf{d}^n f}{\mathsf{d}x^n}, \ldots$$

Mamy więc

$$\frac{\mathsf{d}^n f}{\mathsf{d}x^n} = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(\frac{\mathsf{d}^{n-1} f}{\mathsf{d}x^{n-1}}\right).$$

Uwaga. Dogodnie jest przy tym zdefiniować pochodną rzędu zerowego jako *samą funkcję*: $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Przykł. Dla $f(x) = x^3$ mamy: $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, a wszystkie wyższe pochodne są równe zeru.

Przykł. Ogólnie: $k-$ta pochodna funkcji $f(x) = x^n$ jest

$$f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} \quad \text{dla} \quad k < n \quad f^{(n)}(x) = n!, \tag{1}$$

a wyższe pochodne są równe zeru.

Przykł. $k-$ta pochodna funkcji $f(x) = x^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ oraz $x > 0$, jest równa

$$f^{(k)}(x) = a(a-1)\ldots(a-k+1)x^{a-k}; \tag{2}$$

zwróćmy uwagę, że tutaj pochodna dowolnego rzędu jest różna od zera!

Przykł. $(e^x)' = e^x$, co daje, że wszystkie wyższe pochodne funkcji e^x są równe e^x.

Przykł. Dla funkcji $f(x) = \sin x$ mamy

$$f'(x) = \cos x; \quad f''(x) = -\sin x; \quad f'''(x) = -\cos x; \quad f^{(4)}(x) = \sin x; \tag{3}$$

to było dla pierwszych czterech pochodnych, a dowolną pochodną można obliczyć wykorzystując tożsamość zawartą wyżej: $f^{(n+4)}(x) = f^{(n)}(x)$.

Przykł. Wzór (1) pozwala policzyć dowolną pochodną dowolnego wielomianu $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Nie będziemy tego wypisywać in extenso, (wzór ten jest dość skomplikowany i nie mamy tu potrzeby wypisywać go), a weźmy jego szczególny przypadek, tzn. wypiszmy pochodne od 0 do n *w punkcie* $x = 0$. Mamy:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = f'(0),\ a_2 = \frac{1}{2!}f''(0), \ldots, a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(0). \tag{4}$$

Stąd wynika wzór:

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0). \tag{5}$$

footnotesize Wzór ten daje się znacząco uogólnić na *dowolne* funkcje, dając tym samym sposób na przybliżenie dowolnej funkcji przez wielomian; zrobimy to już niedługo.

Przykł. Wzór na pochodne funkcji odwrotnej.

1.2 n-ta pochodna iloczynu funkcji – wzór Leibniza

Na $n-$tą pochodną sumy i różnicy sumy dwóch funkcji mamy proste wzory

$$(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x) \tag{6}$$

(natychmiastowy dowód indukcyjny: W pierwszym kroku: $(f(x)+g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$; dalej: $(f(x)+g(x))^{(n)} = ((f(x)+g(x))^{(n-1)})' = (f^{(n-1)}(x) \pm g^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$; i na mocy zasady indukcji wzór (6) jest prawdziwy dla każdego n.)

Dla $n-$tej pochodnej iloczynu funkcji wzór jest bardziej skomplikowany, ale dający się ogarnąć:

Tw. (wzór Leibniza). $n-$ta pochodna iloczynu dwóch funkcji dana jest wzorem

$$(f \cdot g)^{(n)} = f^{(n)} g + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f^{(n-1)} g' + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} f^{(n-2)} g'' + \cdots + f \cdot g^{(n)}$$

=

$$= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)} g^{(k)} \tag{7}$$

(dla prostoty nie pisaliśmy jawnej zależności od x; wszędzie wyżej należy pamiętać, że $f \equiv f(x)$, $f^{(k)} \equiv f^{(k)}(x)$ itd.)

Dow. będzie indukcyjny. Dla $n = 1$ otrzymujemy znany już wzór na pochodną iloczynu. Załóżmy, że wzór (7) zachodzi dla n i obliczmy pochodną obu jego stron. Z twierdzenia o pochodnej iloczynu mamy

$$(f \cdot g)^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k+1)} g^{(k)} + \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k)} g^{(k+1)} \right]$$

$$f^{(n+1)} \cdot g + \sum_{k=0}^{n} \left\{ \left[\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} \right] f^{(n-k+1)} g^{(k)} \right\} + f \cdot g^{(n+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} f^{(n-k+1)} g^{(k)};$$

ostatnia równość wynika z faktu, iż mamy dla współczynników Newtona

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix}$$

(wzór ten był pokazywany przy dowodzie wzoru dwumiennego Newtona).

CBDO

Przykł. Obliczmy drugą pochodną funkcji odwrotnej. Najsampierw wyprowadźmy raz jeszcze wzór na tę pochodną, korzystając z wzoru na pochodną funkcji zóżonej. Jeśli $f(x)$ – funkcja, a $f^{-1}(x)$ – funkcja do niej odwrotna, to mamy: $f^{-1}(f(x)) = x$, skąd po zróżniczkowaniu otrzymamy

$$f'(x) \cdot (f^{-1})'(f(x)) = 1,$$

co daje

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Obustronnie różniczkując, otrzymujemy

$$[(f^{-1})'(f(x))]' = f'(x) \cdot (f^{-1})''(f(x)) = \left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^2},$$

co daje

$$(f^{-1})''(f(x)) = -\frac{f''(x)}{(f'(x))^3}. \tag{8}$$

Różniczkując ten wzór, można uzyskać dowolną wyższą pochodną.

1.3 Wzór Taylora

Tw. (Wzór Taylora). Załóżmy, że funkcja f jest $n-$krotnie różniczkowalna w przedziale $[a, b]$. Oznaczmy $h = b - a$. Wtedy zachodzi

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \tag{9}$$

gdzie wyraz R_n, zwany *resztą $n-$tego rzędu*, można przedstawić w jednej z postaci

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h) \quad \text{dla pewnego} \quad \theta \in]0, 1[, \tag{10}$$

(reszta w postaci Lagrange'a), lub

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta' h) \quad \text{dla pewnego} \quad \theta' \in]0, 1[\tag{11}$$

(reszta w postaci Cauchy'ego).

Przed dowodem:

Uwaga 1 Wzór Taylora można uważać za uogólnienie wzoru Lagrange'a: Ten ostatni to szczególny przypadek wzoru Taylora dla $n = 1$.

Dow. Wypiszmy z wzoru (9) resztę:

$$R_n = f(b) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} \tag{12}$$

Oznaczmy przez $g_n(x)$ funkcję pomocniczą zdefiniowaną w ten sposób, że w R_n zastępujemy a przez x:

$$g_n(x) = f(b) - f(x) - \frac{f'(x)}{1!}(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}(b-x)^2 - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} \tag{13}$$

Pochodna funkcji $g_n(x)$ jest równa:

$$g_n'(x) = -f'(x) - \left[-\frac{f'(x)}{1!} + \frac{f''(x)}{1!}(b-x)\right] - \left[-2\frac{f''(x)}{2!}(b-x) + \frac{f'''(x)}{2!}(b-x)^2\right]$$

$$-\left[-3\frac{f'''(x)}{3!}(b-x)^2 + \frac{f^{(4)}(x)}{3!}(b-x)^3\right] + \cdots - \left[-(n-1)\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right].$$

W powyższej sumie kasują się więc wszystkie człony oprócz ostatniego i mamy

$$g_n'(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}. \tag{14}$$

Zarazem: $g_n(b) = 0$, $g_n(a) = R_n$.

Stosując do funkcji $g_n(x)$ twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej, otrzymujemy

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{b-a} = g_n'(a + \theta' h) \quad \text{dla pewnego} \quad \theta' \in]0,1[,$$

więc

$$\frac{-R_n}{h} = g_n'(a+\theta' h) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\Big|_{x=a+\theta' h}$$

$$= -\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{(n-1)!}(b-a-\theta' h)^{n-1} = -\frac{f^{(n)}(a+\theta' h)}{(n-1)!}h^{n-1}(1-\theta')^{n-1}$$

skąd otrzymujemy

$$R_n = \frac{h^n(1-\theta')^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(a+\theta' h)$$

czyli *resztę w postaci Cauchy'ego* (11).

Pozostaje pokazać, że równoważną postacią reszty jest postać Lagrange'a (10). W dowodzie używa się wzoru Cauchy'ego o wartości średniej z funkcjami: $g_n(x)$ i $u_n(x) = (b-x)^n$. Otrzymujemy:

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{g_n'(a+\theta h)}{u_n'(a+\theta h)} \quad \text{dla pewnego} \quad \theta \in]0,1[.$$

Mamy: $u_n(b) = 0$, $u_n(a) = h^n$, $u_n'(x) = -n(b-x)^{n-1}$, skąd wynika, uwzględniając (14)

$$\frac{g_n(b) - g_n(a)}{u_n(b) - u_n(a)} = \frac{-R_n}{-h^n} = -\frac{(b-a-\theta h)^{n-1}}{(n-1)!}f^n(a+\theta h)\frac{1}{-n(b-a-\theta h)^{(n-1)}}$$

czyli otrzymujemy

$$R_n = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a+\theta h),$$

tzn. postać reszty Lagrange'a (10).

Uwaga. Wzoru Taylora zazwyczaj używa się w postaci:

$$f(x+h) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \ldots \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n \tag{15}$$

Można na ten wzór patrzeć jako na *przybliżenie funkcji w otoczeniu punktu x przez wielomian* ($n-$tego stopnia). Jeśli umiemy oszacować resztę, to daje nam ona dokładność tego przybliżenia.

Dla $x = 0$, powyższa wersja wzoru Taylora nazywana jest *wzorem Maclaurina*

Uwaga. Gdy funkcja jest różniczkowalna dowolną ilość razy, to reszta może być dowolnie wysokiego rzędu. Okazuje się, że można "odsunąć ją do nieskończoności" – zapisać rozwinięcie Taylora jako *nieskończony* szereg. Aby to precyzyjnie wyrazić, potrzebne jest pojęcie zbieżności szeregu i jakieś kryteria zbieżności; zajmiemy się tym niedługo.

Przykł. Zapiszmy wzór Taylora dla funkcji $f(x) = e^x$ w otoczeniu punktu $x = 0$ z dokładnością do drugiego rzędu. Mamy: $f'(x) = f''(x) = e^x$, $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$, tak więc

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}e^{\theta x}, \quad \text{gdzie} \quad \theta \in]0,1[.$$

Stąd wynika, że dla każdego x zachodzi równość

$$e^x \geqslant 1 + x, \tag{16}$$

bo reszta jest dodatnia (jako że $x^2 > 0$ i $e^{\theta x} > 0$).

Nierówność ta posiada wyrazisty sens geometryczny – see **wykres**.

Przykł. Wzór Taylora pozwala w następujący sposób zwiększyć moc reguły de l'Hospitala:

Tw. Jeśli funkcje f i g posiadają $n-$te pochodne ciągłe i jeśli

$$f(a) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad \dots f^{(n-1)}(a) = 0,$$

$$g(a) = 0, \quad g'(a) = 0, \quad \dots g^{(n-1)}(a) = 0 \quad \text{oraz} \quad g^{(n)} \neq 0,$$

to

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{17}$$

Dow. We wzorze Taylora (9) b zastąpmy przez x. Z uwagi na znikanie pierwszych $n-1$ pochodnych zostaje tylko sama reszta:

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta(x-a)) \quad \text{oraz} \quad g(x) = \frac{(x-a)^n}{n!} g^{(n)}(x + \theta'(x-a)).$$

Tak więc

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{g^{(n)}(a + \theta'(x-a))}.$$

Przechodząc do granicy $\lim\limits_{x \to a}$ i biorąc pod uwagę ciągłość funkcji $f^{(n)}$ i $g^{(n)}$ (podobnie jak to było przy dowodzie zwykłego tw. de l'Hospitala), otrzymujemy wzór (17).

CBDO

Przykł. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x(1 - \cos x)}$

1.4 Kryteria na ekstrema

Niedawno pokazaliśmy, że jeśli funkcja (różniczkowalna) f posiada w punkcie x_0 ekstremum, to $f'(x_0) = 0$. Pamiętamy też, że na odwrót nie jest: Jeśli $f'(x) = 0$, to nie znaczy, że w x_0 znajduje się ekstremum (np. dla $f(x) = x^3$). Równość $f'(x) = 0$ jest więc warunkiem *koniecznym*, ale *niedostatecznym* na istnienie tam ekstremum. Okazuje się, że badanie wyższych pochodnych daje ogólniejsze kryterium na istnienie ekstremum:

Tw. Załóżmy, że funkcja f jest różniczkowalna $n-$krotnie i $n-$ta pochodna jest ciągła. Niech również

$$f'(c) = 0 = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c), \quad \text{natomiast} \quad f^{(n)} \neq 0.$$

Wówczas, jeśli n jest parzyste, to w punkcie c funkcja f ma ekstremum właściwe: maksimum, jeśli $f^{(n)} < 0$, minimum, jeśli $f^{(n)} > 0$. Jeśli natomiast n jest liczbą nieparzystą, to f nie posiada ekstremum w punkcie c.

Dow. Z wzoru Taylora mamy:

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{n!}h^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c+\theta h)h^n, \tag{18}$$

i, ponieważ na mocy założenia pierwszych $n-1$ pochodnych f zeruje się w punkcie c, mamy

$$f(c+h) = f(c) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c+\theta h)h^n. \tag{19}$$

Załóżmy, że n jest liczbą parzystą. Niech $f^{(n)}(c) < 0$. Ze względu na ciągłość funkcji $f^{(n)}(x)$ w punkcie c istnieje takie $\delta > 0$, że nierówność: $|x-c| < \delta$ implikuje $f^{(n)}(x) < 0$. Jeśli więc $|h| < \delta$, to i $\theta h < \delta$, zatem $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$. Patrząc teraz na (19) widzimy, że jeśli

$$0 < |h| < \delta, \quad \text{to} \quad f(c+h) - f(c) < 0$$

(pamiętajmy, że n jest parzyste, więc $h^n > 0$). Powyższa nierówność oznacza, że w punkcie c funkcja f posiada *maksimum.*

Z analogicznego rozumowania wynika, że jeśli n jest liczbą parzystą i zachodzi: $f^{(n)}(c) > 0$, to $f(c+h) - f(c) > 0$ (znowu dla $h > 0$ i $h < 0$), co znaczy, że w punkcie c funkcja f ma *minimum.*

Załóżmy teraz, że n jest liczbą *nieparzystą.* Niech $f^{(n)}(c) < 0$ (w przypadku przeciwnym, tzn. $f^{(n)}(c) > 0$, rozumowanie jest analogiczne). Weźmy znów δ takie, aby dla $|h| < \delta$ było $f^{(n)}(c+\theta h) < 0$. Mamy wówczas dla $0 < h < \delta$ nierówność

$$f(c+h) - f(c) < 0, \quad \text{czyli} \quad f(c) > f(c+h),$$

a dla $-\delta < h < 0$ zachodzi nierówność

$$f(c+h) - f(c) > 0, \quad \text{czyli} \quad f(c) < f(c+h);$$

tak więc w punkcie c nie ma ani maksimum, ani minimum.

Przykł. Funkcja $f(x) = x^n$ posiada w $x = 0$ minimum, jeśli n jest parzyste, i nie posiada minimum, jeśli n jest nieparzyste.

Uwaga. Najczęściej spotyka się w zastosowaniach ekstrema *niezdegenerowane*, tzn. takie, że druga pochodna jest różna od zera. Wtedy testowanie, czy dany punkt krytyczny odpowiada ekstremum, kończy się na drugiej pochodnej.

1.5 Interpretacja geometryczna drugiej pochodnej. Punkty przegięcia

Uprzednio widzieliśmy, że jeśli $f'(c) > 0$, to funkcja rośnie w otoczeniu c. Jeśli więc $f''(c) > 0$, to funkcja f' rośnie; a jeśli ponadto $f'(c) > 0$, to f rośnie jeszcze szybciej.

To była heurystyka, a teraz

Tw. Jeśli druga pochodna funkcji f jest ciągła i:

i) zachodzi $f''(c) > 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest dla pewnego otoczenia punktu c położona *powyżej* stycznej do tej krzywej w punkcie $(c, f(c)$;

ii) zachodzi $f''(c) < 0$, to krzywa $y = f(x)$ jest dla pewnego otoczenia punktu c położona *poniżej* stycznej do tej krzywej w punkcie $(c, f(c)$.

Uwaga. Patrząc na wykres funkcji $f(x)$, widzimy, że w pierwszym przypadku wykres jest skierowany wypukłością do dołu, a w drugim – do góry.

Dow. *i)* Oszacujmy różnicę między ilorazem różnicowym a pochodną:

$$\varphi(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} - f'(c).$$

Na mocy wzoru Taylora mamy:

$$f(c+h) - f(c) - hf'(c) = \frac{1}{2}h^2 f''(c+\theta h).$$

Ponieważ $f''(c) > 0$, to dla dostatecznie małego h mamy również

$$f''(c+\theta h) > 0, \Longrightarrow f(c+h) - f(c) - hf'(c) > 0 \Longrightarrow \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > f'(c).$$

Interpretując iloraz różnicowy jako tangens kąta nachylenia *siecznej* do osi OX wnioskujemy, że dla $h > 0$ tangens ten jest większy niż $f'(c)$, tzn. większy niż tg kąta między *styczną* a osią OX. A to oznacza, że rozważana krzywa leży *nad* styczną. **rys.**

Dowód *ii)* jest analogiczny.

Przykł. Parabola $y = x^2$ w każdym punkcie leży nad styczną – nic dziwnego, bo druga pochodna wszędzie jest tu równa 2.

Przykł. Wykres funkcji wykładniczej $y = e^x$ również leży wszędzie nad styczną – tak być musi, bo druga pochodna $(e^x)'' = e^x > 0$.

Def. Rozważmy sytuację, gdy krzywa $y = f(x)$ posiada w punkcie c styczną i dla dostatecznie małych przyrostów dodatnich krzywa leży po jednej strone stycznej (np. nad styczną), a dla dostatecznie małych przyrostów ujemnych leży po drugiej stronie krzywej (np. pod krzywą). Innymi słowy: Rozpatrzmy wyrażenie:

$$\psi(h) = f(c+h) - f(c) - hf'(c)$$

i dla dostatecznie małego δ mamy: $\forall_{0<h<\delta}$: $\psi(h) > 0$ oraz $\forall_{-\delta<h<0}$: $\psi(h) < 0$.

W takiej sytuacji mówimy, że krzywa $y = f(x)$ ma punkcie c *punkt przegięcia.*

Przykł. Sinusoida $y = \sin x$ ma punkt przegięcia dla $x = 0$. Mamy bowiem: $\psi(h) = \sin h - \sin 0 - h\cos 0 = \sin h - h$. Dla $h > 0$ mamy $\psi(h) < 0$, dla $h < 0$ jest $\psi(h) > 0$.

Z tw. powyżej wynika, że jeśli $f''(c) \neq 0$, to krzywa leży (lokalnie) po jednej stronie stycznej. W takiej sytuacji, punkt c nie jest punktem przegięcia. Możemy to sformułować jako

Tw. Jeśli punkt c jest punktem przegięcia krzywej $y = f(x)$, to $f''(c) = 0$.

Na odwrót to nie zachodzi (np. dla $y = x^4$ w $x = 0$).

1.6 Funkcje wypukłe/wklęsłe i ich własności

Def. Funkcję $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłą* na $]a,b[$, jeśli dla dowolnych $x, x' \in]a,b[$ i $\theta \in [0,1]$ mamy **rys.**

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \leqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(x'), \tag{20}$$

zaś wklęsłą, jeśli

$$f(\theta x + (1-\theta)x') \geqslant \theta f(x) + (1-\theta) f(x'), \tag{21}$$

Wniosek: Funkcja f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $-f$ jest wklęsła. Wystarczy więc w dalszym ciągu zająć się tylko funkcjami wypukłymi.

Tw. Funkcja f jest wypukła na $]a, b[$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego skończonego zbioru n punktów $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset]a, b[$ i dla dowolnego zestawu n liczb $\theta_1, \ldots, \theta_n$, takich, że $\theta_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$ i $\sum_i \theta_i = 1$, zachodzi

$$f(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \theta_i f(x_i) \tag{22}$$

Dow. indukcyjny. Niech f będzie wypukła na $]a, b[$ – wtedy nierówność (22) zachodzi dla $n = 2$.

Załóżmy, że teza jest prawdziwa dla $n - 1$ (tzn. prawdziwa jest T_{n-1}.

Niech $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset]a, b[$ i $0 \leqslant \theta_i \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, n$ będą takie, jak w sformułowaniu twierdzenia. Jeśli $\theta_n = 1$, to nierówność jest trywialna. Weźmy więc $\theta_n \neq 1$. Mamy:

$$f(\sum_{i=1}^{n} \theta_i x_i) = f((1 - \theta_n) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} x_i \right) + \theta_n x_n)$$

$$\leqslant (1 - \theta_n) f \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} x_i \right) + \theta_n f(x_n)$$

$$\leqslant (1 - \theta_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\theta_i}{1 - \theta_n} f(x_i) + \theta_n f(x_n).$$

a to znaczy, że prawdziwa jest T_n. Udowodniliśmy więc implikację $T_{n-1} \Longrightarrow T_n$, czyli teza jest prawdziwa dla każdego $n \geqslant 2$.

W drugą stronę, dla $n = 2$ mamy definicję funkcji wypukłej.

CBDO

Istnieją też inne równoważne kryteria wypukłości; użyteczne okaże się zaraz następujące.
Stw.

1. f jest wypukła $\Longleftrightarrow$ dla dowolnych punktów $x_1 < x_2 < x_3$ z przedziału $]a, b[$ spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}. \tag{23}$$

2. f jest wypukła $\Longleftrightarrow$ dla dowolnych punktów $x_1 < x_2 < x_3$ z przedziału $]a, b[$ spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}. \tag{24}$$

3. f jest wypukła $\Longleftrightarrow$ dla dowolnych punktów $x_1 < x_2 < x_3$ z przedziału $]a, b[$ spełniona jest nierówność

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}. \tag{25}$$

Dow. Jeśli $x_1 < x_2 < x_3$, to $x_2 = \theta x_1 + (1-\theta)x_3$, gdzie $\theta = \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$ i $1-\theta = \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}$. f jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych punktów $x_1 < x_2 < x_3$ mamy nierówność

$$0 \leqslant \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_3) - f(x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_2)) + (1-\theta)(f(x_3) - f(x_2))$$

$$= \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_1}(f(x_1)-f(x_2)) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}(f(x_3)-f(x_2)). \tag{26}$$

Ponieważ $x_3 - x_1$, $x_3 - x_2$ i $x_2 - x_1$ są dodatnie, to nierówność (26) jest równoważna nierówności

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$$

czyli otrzymaliśmy (23).

Nierówność (26) można też zapisać w postaci

$$0 \leqslant \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_3) - f(x_2) = \theta(f(x_1) - f(x_3)) + (f(x_3) - f(x_2))$$

$$= \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}(f(x_1)-f(x_3)) + (f(x_3)-f(x_2)),$$

która jest równoważna nierówności

$$\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

czyli otrzymaliśmy (24).

Wreszcie, gdy nierówność (26) zapiszemy w postaci

$$0 \leqslant \theta f(x_1) + (1-\theta)f(x_3) - f(x_2) = (1-\theta)(f(x_3) - f(x_1)) + (f(x_1) - f(x_2))$$

$$= \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}(f(x_3)-f(x_1)) + (f(x_1)-f(x_2))$$

czyli otrzymaliśmy (25).

CBDO

Wniosek 1. Jeśli f jest wypukła na $]a,b[$, to istnieją granice: lewo- i prawostronne pochodne:

$$f'_+ = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_- = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ponadto $f'_+ \geqslant f'_-$.

Dow. Zauważmy, że funkcja $h \to \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jest monotoniczna i ograniczona (powyższe Stw.), a stąd wynika istnienie granicy (podobnie jak dla ciągów).

Wniosek 2. Funkcja wypukła na odcinku otwartym jest ciągła.

Założenie otwartości odcinka jest istotne: Funkcja wypukła na odcinku domkniętym mozę być nieciągła na jego brzegu. (**rys.**)

Dla funkcji różniczkowalnych, mamy proste kryterium wypukłości.

Tw *i)* Funkcja różniczkowalna na $]a,b[$ jest wypukła $\Longleftrightarrow$ jej pochodna jest funkcją niemalejącą.

ii) Funkcja dwukrotnie różniczkowalna na $]a,b[$ jest wypukła $\Longleftrightarrow$ jej druga pochodna jest nieujemna.

Dow. Widać, że drugi punkt wynika z pierwszego; wystarczy więc udowodnić pierwszy. Niech $x_1 < x_2 < x_3$ będą punktami w $]a, b[$. Z tw. Lagrange'a istnieją $\xi \in]x_1, x_2[$ oraz $\eta \in]x_2, x_3[$ takie, że $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$ oraz $f(x_3) - f(x_2) = f'(\eta)(x_3 - x_2)$. Nierówność $f'(\eta) \geqslant f'(\xi)$ jest więc równoważna nierówności

$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Stąd powyższa nierówność jest spełniona dla wszystkich $x_1 < x_2 < x_3$ wtedy i tylko wtedy, gdy f' jest funkcją niemalejącą. Ze Stw. wyżej wynika teza.

CBDO

Znaczenie wypukłości:

Badanie funkcji: Kryteria na ekstremum, położenie stycznych do wykresu.

Termodynamika: Z wypukłości *energii swobodnej* wynika dodatniość takich (fizycznie oczywistych, ale trudnych bezpośrednio do udowodnienia) wielkości, jak ciepło właściwe: są to *drugie pochodne* en. sw. (tu: po temperaturze).