MATEMATYKA II, SERIA ZADAŃ No. 6

28. 03. 2014

1. Znaleźć rozwiązania układów równań w zależności od parametru:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{bmatrix} a-5 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & a-5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Znaleźć macierze odwrotne do danych poniżej:

$$\textbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\textbf{b)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix};\quad \textbf{c)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix};\quad \textbf{d)}\ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix};\quad \textbf{e)}\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};$$

3. Znaleźć macierz odwrotną do macierzy kwadratowej w postaci blokowej, w której składowe A, D są nieosobliwe:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \quad ; \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix}^{-1}.$$

4. Niech A, B, C, D będą macierzami nieosobliwymi. Wykazać, że

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A-BD^{-1}C)^{-1} & (C-DB^{-1}A)^{-1} \\ (B-AC^{-1}D)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}$$

5. Obliczyć wyznaczniki:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ .. & .. & .. & \ddots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ .. & .. & .. & \cdots & .. & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & .. & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

6. Obliczyć wyznaczniki przez sprowadzenie ich do postaci trójkątnej:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix};\quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} a & b & \dots & b & b \\ b & a & \dots & b & b \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ b & b & \dots & a & b \\ b & b & \dots & b & a \end{vmatrix}.$$

7. Pokazać, że *wyznacznik Vandermonde'a*

$$V_n(x_1, \dots, x_n) := \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & (x_1)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & (x_n)^{n-1} \end{bmatrix}$$

jest równy:

$$V_n(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{j<k}^{n} (x_k - x_j).$$

Wskazówka. Zauważyć, że V_n jako funkcja x_n jest wielomianem; znaleźć jego pierwiastki; zastosować rozwinięcie Laplace'a względem ostatniego wiersza i odwołać się do indukcji.

8. Obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \ldots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \ldots & 3^n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \ldots & (n+1)^n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

9. Pokazać, że wartość wyznacznika macierzy antysymetrycznej nieparzystego wymiaru wynosi 0.

10. Pokazać, że wyznacznik *macierzy cyklicznej* (*cyrkulantem* też czasem nazywanej):

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_1 \end{vmatrix}$$

jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)\, f(\epsilon_2) \ldots f(\epsilon_n)$, gdzie $f(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, zaś $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są kolejnymi pierwiastkami $n-$tego stopnia z 1.
Wskazówka. Obliczyć wyznacznik iloczynu powyższej macierzy cyklicznej oraz macierzy:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \ldots & \epsilon_n \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \ldots & \epsilon_n^2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \epsilon_1^n & \epsilon_2^n & \epsilon_3^n & \ldots & \epsilon_n^n \end{bmatrix}$$

bf Uwaga. Jeśli ktoś się dziwi, jak można było 'wpaść' na trick zastosowany w tym zadaniu, niech sięgnie trochę dalej, do zadań na wartości i wekt. własne, i niech znajdzie *wartości i wektory własne* cyrkulanta! i przypomni sobie, jak wyznacznik macierzy wyraża się przez wartości własne.

11. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania, obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \ldots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \ldots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \ldots & a^{n-3} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a & a^2 & a^3 & \ldots & 1 \end{vmatrix}.$$

12. Dla jakich wartości λ następujące formy kwadratowe są dodatnio określone:

   (a) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

(b) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$;

(c) $x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

(d) $x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 10x_1x_3 + 6x_2x_3$.

13. Wyznaczyć postać kanoniczną formy, stosując np. metodę Lagrange'a:

(a) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(b) $x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$;

(c) $x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;

(d) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4$.

14. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne operatorów liniowych danych w pewnej bazie przez macierze:

$$\mathbf{a)}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix};\mathbf{b)}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix};\mathbf{c)}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

15. Wyznaczyć wartości własne i * – materiał nadobowiązkowy: podprzestrzenie pierwiastkowe operatora liniowego danego w pewnej bazie macierzą:

$$a)\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix};\ b)\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix};\ c)\begin{bmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix};\ d)\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e)\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix};\ f)\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix};\ g)\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

$$h)\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix};\ i)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{bmatrix};\ j)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

16. Wyznaczyć wektory własne i wartości własne:
a) operatora różniczkowania w przestrzeni $\mathbf{R}_n[x]$;
b) operatora $X \mapsto X^T$ w przestrzeni $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

17. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy cyklicznej (definiowanej w jednym z poprzednich zadań).
Wsk. Niech macierz ma wymiar n. Wybrać któryś (dowolny) z pierwiastków $n-$tego stopnia z 1. Ustawić w kolumienkę kolejne potęgi tegoż pierwiastka, od 0 do $n-1$, i zadziałać na tę kolumienkę macierzą. Procedurę powtórzyć dla *wszystkich* pozostałych pierwiastków.