1 Całka Riemanna

1.1 Podział odcinka. Suma górna i dolna. Całka górna i dolna

Niech f będzie funkcją ograniczoną na $[a, b]$ o wartościach rzeczywistych.

Niech π będzie (skończonym, $n+1$-elementowym) ciągiem:

$$\pi = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{1}$$

gdzie: $x_0 = a$, $x_n = b$, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Ciąg π nazywamy *podziałem* odcinka $[a, b]$. Niech

$$\bar{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

Def. Tak zdefiniowaną wielkość $\bar{S}(f, \pi)$ nazywamy *sumą górną* z funkcji f względem podziału π. **RYS. 1**

Def. *Całką górną* z funkcji f nazywamy infimum z $\bar{S}(f, \pi)$ po wszystkich możliwych podziałach:

$$\overline{\int_{[a,b]}} f = \inf_{\pi} \bar{S}(f, \pi)$$

Analogicznie, *sumą dolną* z funkcji f względem podziału π nazywamy wielkość

$$\underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \cdot (x_i - x_{i-1}), \tag{3}$$

oraz *całką dolną* z funkcji f nazywamy

$$\underline{\int_{[a,b]}} f = \sup_{\pi} \underline{S}(f, \pi)$$

Łatwo stwierdzić, że oba te kresy (czyli całki: górna i dolna) istnieją. Bowiem dowolna suma górna jest ograniczona z dołu przez $\inf_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b - a)$, a z góry przez $\sup_{x \in [a,b]} f(x) \cdot (b - a)$. **RYS. 2**. Również dowolna suma dolna jest zawarta między tymi dwoma liczbami. Innymi słowy: Zbiór wartości wszystkich sum górnych jest ograniczony. Skoro tak, to istnieje kres dolny tego zbioru – czyli całka górna istnieje. Analogicznie jest z całką dolną.

Mając dany podział π, zdefiniujmy *średnicę podziału* δ_π:

Def. *Średnicą podziału* π nazywamy liczbę δ_π określoną jako

$$\delta_\pi = \max_i (x_i - x_{i-1}); \tag{4}$$

wyrażając słowami, jest to długość najdłuższego odcinka podziału.

Pomocniczo oznaczajmy jeszcze n_π jako liczbę odcinków wchodzących do podziału π.

1.2 Równoważna definicja całki jako granicy ciągu

Wprowadzone wyżej dwie wielkości: Całka górna i dolna są dobrze zdefiniowane, natomiast mają tę nieprzyjemną własność, że obliczyć je z definicji jest bardzo trudno (z wyjątkiem najprostszych funkcji, takich jak funkcja stała czy liniowa). Poniższe twierdzenie zapewnia bardziej konstruktywny sposób liczenia całki górnej i dolnej.

Tw. Niech f – funkcja ograniczona na $[a,b]$ o wartościach rzeczywistych, oraz niech (π_k) – ciąg *podziałów* takich, że $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{\pi_k}=0$. Wtedy:

$$\lim_{k\to\infty}\bar{S}(f,\pi_k)=\overline{\int_{[a,b]}} f \quad \text{i analogicznie} \quad \lim_{k\to\infty}\underline{S}(f,\pi_k)=\underline{\int_{[a,b]}} f \tag{5}$$

Dow. Mając dany podział π, oznaczmy przez $\pi\vee\{y\}$ podział, otrzymany z π przez dostawienie jednego punktu y. Załóżmy, że $y\in]x_{i-1},x_i[$.

Obliczmy różnicę

$$\bar{S}(f,\pi)-\bar{S}(f,\pi\vee\{y\});$$

jedyny wkład do tej różnicy będzie pochodził od odcinka $]x_{i-1},x_i[$, bo reszta się skasuje. Mamy więc:

$$\bar{S}(f,\pi)-\bar{S}(f,\pi\vee\{y\})$$

$$=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)(x_i-x_{i-1})-\left(\sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x)(y-x_{i-1})+\sup_{x\in[y,x_i]} f(x))(x_i-y)\right)$$

$$=\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-\sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x)\right)(y-x_{i-1})+\left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-\sup_{x\in[y,x_i]} f(x)\right)(x_i-y)\geqslant 0,$$

bo

$$\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\geqslant \sup_{x\in[x_{i-1},y]} f(x) \quad \text{i} \quad \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)-\sup_{x\in[y,x_i]} f(x)$$

(supremum po *mniejszym* zbiorze jest nie większe niż supremum po *większym* zbiorze). (Ilustracja rysunkowa **RYS. 3**).

Podsumowując, mamy:

$$\bar{S}(f,\pi)-\bar{S}(f,\pi\vee\{y\})\geqslant 0,$$

innymi słowy: Dostawianie punktów do podziału *zmniejsza* sumę górną (dokładniej: *nie zwiększa* jej).

Mamy też:

$$0\leqslant\bar{S}(f,\pi)-\bar{S}(f,\pi\vee\{y\})\leqslant\delta_{\pi\vee\{y\}}\cdot\left(\sup_{x\in[a,b]} f(x)-\inf_{x\in[a,b]} f(x)\right) \tag{6}$$

Oznaczmy:

$$M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)-\inf_{x\in[a,b]} f(x);$$

możemy wtedy nierówność (6) zapisać jako

$$\delta_{\pi\vee\{y\}}M\geqslant\bar{S}(f,\pi)-\bar{S}(f,\pi\vee\{y\})\geqslant 0.$$

Teraz do podziału π dodajmy n punktów $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Mamy:

$$0 \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f, \pi \vee \{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$$
$$= \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1\}) + \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1\}) - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1,y_2\}) + \cdots - \bar{S}(f,\pi\vee\{y_1,y_2,\ldots,y_n\})$$
$$\leqslant M \cdot \left(\delta_{\pi\vee\{y_1\}} + \delta_{\pi\vee\{y_1,y_2\}} + \ldots \delta_{\pi\vee\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}}\right)$$
$$\leqslant M \cdot \delta_\pi \cdot (n-1),$$

co podsumujmy jako:

$$M\delta_\pi(n-1) \geqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f, \pi \vee \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) \geqslant 0. \tag{7}$$

Oznaczając podział $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ jako ρ, mamy, dla dowolnego podziału ρ

$$M \cdot \delta_\pi \cdot n_\rho \geqslant \bar{S}(f,\pi) - \bar{S}(f, \pi \vee \rho) \geqslant 0. \tag{8}$$

Teraz: Weźmy dowolne $\epsilon > 0$. Wtedy, z definicji kresu dolnego, istnieje taki podział ρ, że

$$\overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\rho) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \frac{\epsilon}{2}. \tag{9}$$

Weźmy teraz π – inny podział. Z udowodnionej dopiero co nierówności (8) mamy

$$\overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi\vee\rho) + M \cdot \delta_\pi \cdot n_\rho \leqslant \bar{S}(f,\rho) + M \cdot \delta_\pi \cdot n_\rho$$

$$\leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \frac{\epsilon}{2} + M \cdot \delta_\pi \cdot n_\rho.$$

Weźmy teraz, dla wyżej wybranego ϵ, następującą liczbę δ:

$$\delta = \frac{\epsilon}{2Mn_\rho}; \tag{10}$$

jeżeli teraz wybierzemy podział π tak, że $\delta_\pi < \delta$, to

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{\delta>0}{\exists} \quad \underset{\pi:\delta_\pi<\delta}{\forall} \quad \overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \epsilon \tag{11}$$

Weźmy teraz ciąg podziałów (π_k) takich, jak w założeniu, tzn. $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$. Tę własność można równoważnie wypowiedzieć jako:

$$\underset{\delta>0}{\forall} \quad \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{k>K}{\forall} \quad \delta_{\pi_k} \leqslant \delta;$$

przepisując nierówność (11), mamy:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall} \quad \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{k>K}{\forall} \quad \overline{\int\limits_{[a,b]}} f \leqslant \bar{S}(f,\pi_k) \leqslant \overline{\int\limits_{[a,b]}} f + \epsilon$$

bądź, przepisując nieco inaczej tezę,

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{K\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{k>K}{\forall}\ \left|\bar{S}(f,\pi_k)-\overline{\int_{[a,b]}}f\right|\leqslant\epsilon \tag{12}$$

a to dokładnie oznacza, że

$$\lim_{k\to\infty}\bar{S}(f,\pi_k)=\overline{\int_{[a,b]}}f.$$

Dla sumy dolnej i drugiej z równości (5) dowód jest analogiczny.

CBDO

Jeśli π,ρ – podziały, to

$$\bar{S}(f,\pi)\geqslant\bar{S}(f,\pi\vee\rho)\geqslant\underline{S}(f,\pi\vee\rho)\geqslant\underline{S}(f,\rho),$$

co można wypowiedzieć jako:

Stw. Każda suma górna jest większa od każdej sumy dolnej.

Jeżeli teraz (π_k), (ρ_k) – dwa ciągi podziałów o średnicach dążących do zera, to

$$\bar{S}(f,\pi_k)\geqslant\underline{S}(f,\rho_k)$$

i, przechodząc do granicy $\lim\limits_{k\to\infty}$ i przypominając sobie twierdzenie o zachowaniu nierówności przy dążeniu do granicy, mamy

Tw. Dla dowolnej funkcji ograniczonej f zachodzi

$$\overline{\int_{[a,b]}}f\geqslant\underline{\int_{[a,b]}}f \tag{13}$$

Najważniejszy (w zastosowaniach) przypadek ma miejsce, gdy te granice są *równe*. Prowadzi to do następującej definicji.

Def. Niech f – funkcja rzeczywista na $[a,b]$, ograniczona. Mówimy, że f jest *całkowalna w sensie Riemanna*, jeżeli

$$\overline{\int_{[a,b]}}f=\underline{\int_{[a,b]}}f \tag{14}$$

Wtedy tę całkę oznaczamy

$$\overline{\int_{[a,b]}}f=\underline{\int_{[a,b]}}f=\int_a^b f(x)\mathsf{d}x.$$

1.3 Sumy wypunktowane

Niech będzie zadany podział $\pi=(x_0,x_1,x_2,\dots,x_n)$ odcinka $[a,b]$. Niech będzie zadany zbiór n liczb ξ_i takich, że $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. Oznaczmy: $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$. Zbiór ξ nazywamy *wypunktowaniem* (związanym z podziałem π).

Def. (sumy wypunktowanej Riemanna). *Sumą wypunktowaną* nazywamy

$$S(f,\pi,\xi)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\cdot(x_i-x_{i-1}) \tag{15}$$

Mamy oczywistą nierówność: Dla dowolnego podziału π i dowolnego wypunktowania ξ zachodzi

$$\underline{S}(f, \pi_k) \leqslant S(f, \pi, \xi) \leqslant S(f, \pi, \xi)$$

W połączeniu z twierdzeniem o trzech ciągach, prowadzi ona do następującego twierdzenia.

Tw. Niech f – funkcja rzeczywista ograniczona na $[a, b]$. Jeżeli f jest całkowalna w sensie Riemanna, to dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) takiego, że $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$, ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do całki Riemanna $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Mamy też twierdzenie w pewnym sensie odwrotne:

Tw. Niech f – funkcja rzeczywista na $[a, b]$ (nie zakładamy, że jest ograniczona). Jeżeli dla dowolnego ciągu podziałów (π_k) takiego, że $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$, ciąg wypunktowanych sum Riemanna jest zbieżny do granicy *niezależnej od sposobu wypunktowania*, to f jest ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna.

Dow. tu pominiemy.

CO NIE ZOSTAŁO OKAZANE

1.4 Ważne własności całek

Tw. Niech f, g – funkcje ograniczone na odcinku $[a, b]$. Jeśli f, g są całkowalne na $[a, b]$ to $f + g$ też jest całkowalna na $[a, b]$ oraz

$$\int_a^b (f+g)(x)\mathsf{d}x = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x + \int_a^b g(x)\mathsf{d}x \tag{16}$$

Dow.

Mamy:

$$\bar{S}(f+g, \pi) \leqslant \bar{S}(f, \pi) + \bar{S}(g, \pi)$$

(ponieważ na dowolnym zbiorze X mamy: $\sup\limits_X (f+g) \leqslant \sup\limits_X f + \sup\limits_X g$) oraz

$$\underline{S}(f+g, \pi) \geqslant \underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi)$$

(ponieważ znów, na dowolnym zbiorze X mamy: $\inf\limits_X (f+g) \geqslant \inf\limits_X f + \inf\limits_X g$).

Mamy więc

$$\underline{S}(f, \pi) + \underline{S}(g, \pi) \leqslant \underline{S}(f+g, \pi) \leqslant \underline{S}(f+g, \pi) \leqslant \bar{S}(f+g, \pi) \leqslant \bar{S}(f, \pi) + \bar{S}(g, \pi)$$

Jeżeli teraz weźmiemy ciąg podziałów (π_k) taki, że $\lim_{k\to\infty} \delta_{\pi_k} = 0$, to skrajne strony nierówności będą równe $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x + \int_a^b g(x)\mathsf{d}x$, a to znaczy, że wyrazy w środku są równe i wynoszą: $\int_a^b (f+g)(x)\mathsf{d}x$ – a to znaczy, że funkcja $f + g$ jest całkowalna i że zachodzi wzór (16).

CBDO

Mamy też proste

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a, b]$, to αf (gdzie α =const.) też jest całkowalna i zachodzi

$$\int_a^b (\alpha f)(x)\mathsf{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathsf{d}x \tag{17}$$

Dow. Wynika to z oczywistego faktu, że na dowolnym zbiorze X mamy, dla $\alpha > 0$, $\sup\limits_X (\alpha f) = \alpha \sup\limits_X f$ i analogicznie dla infimum, co prowadzi do natychmiastowego wniosku dla całek.

CBDO

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a, b]$ oraz $f \geqslant 0$ na $[a, b]$, to

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \geqslant 0. \tag{18}$$

Dow. Mamy bowiem, z uwagi na nieujemność f: $\bar{S}(f, \pi) \geqslant 0$ dla dowolnego podziału π i skoro tak, to również $\inf\limits_\pi \bar{S}(f, \pi) \geqslant 0$; a że dla funkcji całkowalnej mamy $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = \inf\limits_\pi \bar{S}(f, \pi)$, to otrzymujemy (18).

CBDO

Przykł.

1. Funkcja stała jest całkowalna: Niech $f(x) = \lambda$ =const. Wtedy, niezależnie od podziału π i wypunktowania ξ:

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, \pi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b - a), \\ \underline{S}(f, \pi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b - a), \\ S(f, \pi, \xi) &= \textstyle\sum_i \lambda(x_i - x_{i-1}) = \lambda(b - a). \end{aligned}$$

2. $\int_0^1 x^2 \mathsf{d}x$

3. $\int_0^1 e^x \mathsf{d}x$

4. Nie wszystkie funkcje są całkowalne. Weźmy *funkcję Dirichleta.*

Interpretacje: Pole powierzchni pod wykresem; droga.

1.4.1 Dwie ważne klasy funkcji całkowalnych

Tw. Jeśli f – ograniczona i monotoniczna na $[a, b]$, to f jest całkowalna.

Uwaga: f nie musi być ciągła!

Dow. Załóżmy, że f jest niemalejąca. (Dla przypadku, gdy f jest nierosnąca, dowód jest analogiczny). Musimy pokazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje taki podział π, że

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) \leqslant \epsilon. \tag{19}$$

Weźmy jakiś podział π. Ze względu na fakt, że f jest niemalejąca, mamy:

$$\overline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}), \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1});$$

(p. **RYS.**, stąd

$$\overline{S}(f, \pi) - \underline{S}(f, \pi) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}).$$

Największa różnica wartości funkcji na $[a, b]$ jest równa $f(b) - f(a)$ (ze względu na monotoniczność f). Zakładamy, że $f(b) > f(a)$, bo inaczej f jest stała, i jako taka jest całkowalna.

Niech będzie dany $\epsilon > 0$. Dla tego ϵ bierzemy taki podział π odcinka $[a,b]$, aby średnica podziału δ_π spełniała warunek

$$\delta_\pi \leqslant \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Wtedy:

$$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))(x_i-x_{i-1}) \leqslant \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i)-f(x_{i-1}))$$

$$=\frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}(f(x_1)-f(a)+f(x_2)-f(x_1)+f(x_3)-f(x_2)+\cdots+f(b)-f(x_{n-1}))=\epsilon,$$

czyli dla danego ϵ jawnie podaliśmy przedział spełniający warunek (19) o który chodziło.

CBDO

Tw. Jeżeli f jest ciągła na $[a,b]$ to jest całkowalna na $[a,b]$.

Dow. Było twierdzenie, że jeśli f jest ciągła na odcinku domkniętym, to jest tam jednostajnie ciągła, tzn.

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta(\epsilon)>0}\ \forall_{x,x'\in[a,b]:|x-x'|<\delta} : |f(x)-f(x')| < \epsilon. \tag{20}$$

Zamiast ϵ powyżej weźmy $\frac{\epsilon}{b-a}$.

Szacujemy $\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)$:

$$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))(x_i-x_{i-1}) \leqslant \ldots$$

... dla danego $\epsilon \equiv \frac{\epsilon}{b-a}$ bierzemy podział o średnicy $\delta\left(\frac{\epsilon}{b-a}\right)$. Ze względu na jednostajną ciągłość, mamy $\forall_{x,x'\in[a,b]:|x-x'|<\delta}|f(x)-f(x')| \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}$, więc ta nierówność zachodzi też dla różnicy między sup a inf. Wtedy mamy

$$\ldots \leqslant \frac{\epsilon}{b-a}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1}) = \frac{\epsilon(b-a)}{b-a}=\epsilon.$$

Podsumowując słowami to co pokazaliśmy: Dla dowolnego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy taki podział π, że dla tego podziału różnica między sumą górną a dolną jest mniejsza od ϵ – a to znaczy, że f jest całkowalna.

CBDO

1.5 Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego

Tw. (podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego). Niech f – funkcja ciągła na $[a,b]$. Wtedy funkcja $F(x)$, zdefiniowana przez:

$$[a,b] \ni x \to F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z$$

jest różniczkowalna oraz zachodzi: $F'(x)=f(x)$, $F(a)=0$.

Dow. Ponieważ f jest ciągła, to jest całkowalna na $[a,b]$.

Oznaczmy:

$$m=\inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M=\sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

Oczywiste jest, że $(f-m)(x)$ jest funkcją całkowalną nieujemną na $[a,b]$. Wobec tego $\int_a^b (f-m)(x)\mathsf{d}x \geqslant 0$, z czego mamy: **RYS.**

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \geqslant m(b-a).$$

Analogicznie otrzymujemy

$$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x \leqslant M(b-a).$$

Przypomnijmy sobie definicję ilorazu różnicowego:

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

Weźmy najsampierw $h>0$. Mamy: **RYS.**

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z + \int_x^{x+h} f(z)\mathsf{d}z \quad \text{oraz} \quad F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z,$$

co daje

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(z)\mathsf{d}z.$$

Oznaczmy tymczasowo:

$$m_{x,h} = \inf_{z\in[x,x+h]} f(z), \quad M_{x,h} = \sup_{z\in[x,x+h]} f(z)$$

Mamy:

$$m_{x,h}\cdot h \leqslant F(x+h)-F(x) \leqslant M_{x,h}\cdot h$$

i po podzieleniu przez h dostajemy

$$m_{x,h} \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,h}.$$

Weźmy teraz przypadek $h<0$. **RYS.** Mamy:

$$F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z + \int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z \quad \text{oraz} \quad F(x+h) = \int_a^{x+h} f(z)\mathsf{d}z,$$

skąd

$$F(x+h)-F(x) = -\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z$$

oraz (pamiętajmy, że $(-h)$ jest dodatnie!)

$$m_{x,-h}\cdot(-h) \leqslant -\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z \leqslant M_{x,-h}\cdot(-h),$$

gdzie

$$m_{x,-h} = \inf_{z\in[x+h,x]} f(z), \quad M_{x,-h} = \sup_{z\in[x+h,x]} f(z).$$

Po podzieleniu przez $(-h)$ otrzymujemy

$$m_{x,-h} \leqslant -\frac{1}{h}\int_{x+h}^x f(z)\mathsf{d}z = \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,-h}.$$

Weźmy teraz $\epsilon \geqslant |h|$ i oznaczmy:

$$m_{x,\epsilon} = \inf_{z\in[x-\epsilon,x+\epsilon]} f(z), \qquad M_{x,\epsilon} = \sup_{z\in[x-\epsilon,x+\epsilon]} f(z).$$

Dla $h : |h| \leqslant \epsilon$ (znak h może tu być dowolny) mamy wtedy

$$m_{x,\epsilon} \leqslant \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \leqslant M_{x,\epsilon},$$

a ponieważ f jest ciągła, to przy $\epsilon \to 0$ *obie strony powyższej nierówności dążą do* $f(x)$, tak więc

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x).$$

CBDO

Wnioski.

1. Jeśli f – ciągła na $[a,b]$, to mamy:

   $$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = F(b) - F(a)$$

   dla F – dowolnej funkcji pierwotnej do f.

2. (($0+\epsilon$)–twierdzenie o wartości średniej w rachunku całkowym). Jeśli f – ciągła na $[a,b]$, to istnieje punkt $\xi \in [a,b]$ taki, że

   $$\int_a^b f(x)\mathsf{d}x = f(\xi)(b-a). \tag{21}$$

   Dow. 2. Zastosujmy do funkcji pierwotnej $F(x) = \int_a^x f(x)\mathsf{d}x$ twierdzenie Lagrange'a o wartości średniej w rachunku różniczkowym:

   $$\exists\, \xi \in [a,b] :\ F'(\xi) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$

   co od razu daje wzór (21).

Tw. (O całkowaniu przez części). Jeśli $f, g \in C^1([a,b])$ (tzn. f', g' są ciągłe na $[a,b]$) to zachodzi wzór

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathsf{d}x = f(x)\cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

$$\equiv (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x \equiv f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

Dow.

$$\int_a^b (f'\cdot g - f\cdot g')(x)\mathsf{d}x = \int_a^b (f\cdot g)'(x)\mathsf{d}x = (f\cdot g)(b) - (f\cdot g)(a).$$

CBDO

Tw. Jeśli f – całkowalna na $[a,b]$ to $|f|$ też jest całkowalna na $[a,b]$ i zachodzi nierówność

$$\left|\int_a^b f(x)\mathsf{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x. \tag{22}$$

Dow. Dla dowolnego $x \in [a,b]$ mamy: $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, co – przy założeniu, że $|f|$ jest całkowalna – daje

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathsf{d}x$$

a to znaczy, że zachodzi wzór (22). Do zakończenia dowodu pozostaje więc pokazać, że $|f|$ jest całkowalna – co teraz uczynimy. Pokażemy mianowicie, że

$$\forall_\epsilon \exists_\pi\ \bar{S}(|f|,\pi) - \underline{S}(|f|,\pi) < \epsilon. \tag{23}$$

Pokażemy najsampierw, że na dowolnym odcinku I mamy:

$$\sup_{x\in I}|f(x)| - \inf_{x\in I}|f(x)| \leqslant \sup_{x\in I} f(x) - \inf_{x\in I} f(x) \tag{24}$$

Pokażemy to, rozważając trzy możliwe przypadki:

1. Na całym odcinku I funkcja f jest nieujemna: $f(x) \geqslant 0$. **RYS.** Mamy wtedy:

$$\sup_{x\in I}|f(x)| = \sup_{x\in I} f(x), \quad \inf_{x\in I}|f(x)| = \inf_{x\in I} f(x)$$

i nierówność (24) zachodzi (mamy w niej równość).

2. Na całym odcinku I funkcja f jest niedodatnia: $f(x) \leqslant 0$. **RYS.** Mamy wtedy:

$$\sup_{x\in I}|f(x)| = -\inf_{x\in I} f(x), \qquad \inf_{x\in I}|f(x)| = -\sup_{x\in I} f(x),$$

i znowu nierówność (24) zachodzi (mamy znów w niej równość).

3. Trzecia i ostatnia możliwość to ta, że f zmienia znak na I. Wtedy:

$$\sup_{x\in I} f(x) > 0, \ \text{ więc } \ \sup_{x\in I} f(x) = \sup_{x\in I}|f(x)|,$$

oraz

$$\inf_{x\in I} f(x) < 0, \ \text{ więc } \ -\inf_{x\in I} f(x) > 0,$$

więc tym bardziej

$$-\inf_{x\in I} f(x) > -\inf_{x\in I}|f(x)|$$

i po dodaniu do obu stron tej nierówności wyrazu $\sup_{x\in I} f(x)$ otrzymujemy znów nierówność (24) (tym razem ostrą).

CBDO

Mamy zatem:

$$\sum_i \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)| - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\right)(x_i - x_{i-1}) \leqslant \sum_i \left(\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)\right)(x_i - x_{i-1})$$

Powyższa nierówność znaczy, że

$$\bar{S}(|f|,\pi) - \underline{S}(|f|,\pi) \leqslant \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi);$$

a ponieważ f z założenia jest całkowalna, to zachodzi

$$\forall_\epsilon \exists_\pi \; \bar{S}(f,\pi) - \underline{S}(f,\pi) < \epsilon,$$

więc tym bardziej (23) – a to znaczy, że $|f|$ jest całkowalna.

CBDO

Tw. (1. twierdzenie o wartości średniej). Jeśli f, g – ciągłe na $[a,b]$ i g jest funkcją nieujemną: $g(x) \geqslant 0$, wtedy istnieje $\xi \in [a,b]$ taki, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = f(\xi)\int_b^a g(x)\mathsf{d}x. \tag{25}$$

Uwaga. W szczególnym przypadku, gdy $g(x) \equiv 1$, otrzymujemy znane nam już twierdzenie $(0+\epsilon)$ o wartości średniej.

Dow. Oznaczmy:

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \qquad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Ponieważ dla dowolnego $x \in [a,b]$ mamy: $m \leqslant f(x) \leqslant M$, to zachodzą też nierówności:

$$m \cdot g(x) \leqslant f(x)\cdot g(x) \leqslant M \cdot g(x)$$

oraz

$$m\int_a^b g(x)\mathsf{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathsf{d}x$$

Jeżeli $g \geqslant 0$ ciągła nie jest tożsamościowo równa zeru, to $\int_a^b g(x)\mathsf{d}x > 0$. **RYS.** Weźmy bowiem x_0 takie, że $g(x_0) > 0$. Z ciągłości g, istnieje taka $\delta > 0$, że $g(x) > 0$ dla każdego $x \in [\delta - x_0, \delta + x_0]$.

Ponieważ f jest ciągła na odcinku domkniętym $[a,b]$, to osiąga na $[a,b]$ swoje kresy. Przyjmijmy, że kres dolny osiąga w x_1, a kres górny w x_2, gdzie $x_1, x_2 \in [a,b]$. Mamy więc

$$f(x_1) = m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x} \leqslant M = f(x_2)$$

Z własności Darboux dla funkcji f mamy, że funkcja f na odcinku $[x_1,x_2]$ osiąga wszystkie wartości pośrednie pomiędzy m i M, a w szczególności osiąga wartość $\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x}$ (w jakimś punkcie ξ). Mamy więc

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x}{\int_a^b g(x)\mathsf{d}x}$$

a to jest dokładnie równość (25) czyli teza twierdzenia.

CBDO

Tw. (2. twierdzenie o wartości średniej). Niech f, g – ciągłe na $[a,b]$ i ponadto g – rosnąca i różniczkowalna w sposób ciągły. Wtedy istnieje taki $\xi \in [a,b]$, że

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x. \tag{26}$$

Dow. Niech $F(x)$ – funkcja pierwotna do $f(x)$, np. niech

$$F(x) = \int_a^x f(z)\mathsf{d}z. \tag{27}$$

Obliczmy lewą stronę równości (26). Mamy

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathsf{d}x = \int_a^b F'(x)g(x)\mathsf{d}x = F \cdot g|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\mathsf{d}x$$

$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathsf{d}x = \dots$$

(dla pewnego $\xi \in [a, b]$; skorzystaliśmy tu z pierwszego tw. o wartości średniej)

$$\dots = F(b)g(b) - F(a)g(a) - F(\xi)(g(b) - g(a))$$

$$= g(b)\int_a^b f(x)\mathsf{d}x - g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x = \dots$$

(skorzystaliśmy tu z definicj (27) funkcji i F. Ponadto $\int_a^a f(x)\mathsf{d}x = 0$, więc pominęliśmy wyżej wyraz $g(a)\int_a^a f(x)\mathsf{d}x$ jako równy zeru)

$$\dots = g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x - g(b)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x$$

$$= g(b)\int_\xi^b f(x)\mathsf{d}x + g(a)\int_a^\xi f(x)\mathsf{d}x$$

czyli dostaliśmy (26).

CBDO

2 Całki niewłaściwe

2.1 Całki w granicach nieskończonych

Wiemy, co to jest $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x$ w przypadku skończonego przedziału $[a, b]$ i funkcji ograniczonej $f(x)$. Okazuje się potrzebne uogólnienie tego pojęcia w różnych kierunkach (przedział nieskończony i/lub f nieograniczona). Tutaj będziemy się zajmować tylko funkcjami ograniczonymi na przedziałach nieskończonych.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $[a, \infty[$ (tzn. dla dowolnego $x \geqslant a$) i całkowalna na każdym skończonym przedziale $[a, A]$ (zakładamy, że $A > a$). Dla dowolnego A jest więc dobrze określona całka $\int_a^A f(x)\mathsf{d}x$.

Def. *Całką niewłaściwą* z funkcji f po przedziale $[a, \infty[$ nazywamy granicę

$$\lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\mathsf{d}x; \quad \text{oznaczamy ją} \quad \int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x. \tag{28}$$

W przypadku gdy granica (28) jest skończona, mówimy że całka niewłaściwa jest *zbieżna*, a funkcja f jest *całkowalna*. Jeśli granica (28) jest rozbieżna do ∞ lub nie istnieje, mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Przykł.

1. Funkcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest całkowalna w dowolnym przedziale skończonym $[0, A]$ $(A > 0)$ i mamy:

$$\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\mathsf{d}x = \operatorname{arctg} x|_0^A = \operatorname{arctg}(A).$$

Granica $\lim_{A\to\infty} \operatorname{arctg}(A)$ istnieje i jest równa $\frac{\pi}{2}$, zatem

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

2. Zapytajmy, dla jakich wartości wykładnika α istnieje całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x \quad (\text{tu} \quad a > 0). \tag{29}$$

Niech $\alpha \neq 1$. Wówczas

$$\int_a^A \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\ |_a^A = \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

Dla $A \to \infty$, prawa strona ma granicę ∞, gdy $1 - \alpha > 0$, tzn. $\alpha < 1$, bądź $\frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$, gdy $\alpha > 1$. W przypadku pośrednim, tzn. gdy $\alpha = 1$, mamy

$$\int_a^A \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x = \ln x|_a^A = \ln A - \ln a \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

zatem w tym przypadku całka jest rozbieżna.

Ostatecznie otrzymujemy, że całka niewłaściwa (29) jest rozbieżna, gdy $\alpha \leqslant 1$, i zbieżna, gdy $\alpha > 1$; w tym przypadku jej wartość wynosi $\frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$.

3. 2. prędkość kosmiczna

Analogicznie jak w (28) definiujemy także całkę z funkcji f w przedziale $]-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^a f(x)\mathsf{d}x = \lim_{A'\to-\infty} \int_{A'}^a f(x)\mathsf{d}x \quad (\text{tu} \quad A' < a), \tag{30}$$

oraz całkę po całej prostej rzeczywistej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{d}x = \lim_{A'\to-\infty}\lim_{A\to\infty} \int_{A'}^A f(x)\mathsf{d}x. \tag{31}$$

2.2 Związek z podstawowym wzorem rachunku różniczkowego i całkowego

Załóżmy teraz, że całkowana funkcja f posiada funkcję pierwotną F w całym przedziale $[a,\infty[$ (pamiętamy, że będzie tak np. wtedy, gdy f jest ciągła). Wtedy na podstawie podstawowego tw. rach. różniczkowego i całkowego mamy

$$\int_a^A f(x)\mathsf{d}x = F(A) - F(a) = F(x)|_a^A.$$

Porównując to z wz. (28) widzimy, że całka niewłaściwa (28) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{A\to\infty} F(A).$$

Granicę powyższą oznaczamy często $F(\infty)$.Możemy wtedy zapisać

$$\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x = F(\infty) - F(a) = F(x)|_a^\infty.$$

Mamy też analogicznie

$$\int_{-\infty}^a = F(x)|_{-\infty}^a, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{d}x = F(x)|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Przykł.

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\mathsf{d}x,\ \ a>0$. Mamy: $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$, skąd $F(\infty) = \lim_{A\to-\infty} e^{-aA} = 0$, tak więc
$$\int_0^\infty e^{-ax}\mathsf{d}x = F(x)|_0^\infty = \frac{1}{a}.$$
2. $\int_0^\infty \sin x\mathsf{d}x$. Funkcją pierwotną jest tu $-\cos x$,ale symbol $\cos x|_0^\infty$ jest bez sensu, bo nie istnieje granica $\lim_{x\to\infty}\cos x$.
3. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x} = \cos\frac{1}{x}\,|_{2/\pi}^\infty = 1.$

2.3 Całki niewłaściwe a szeregi

Pomiędzy całkami niewłaściwymi a szeregami istnieje szereg podobieństw, które teraz wyliczymy; wiele twierdzeń o całkach niewłaściwych jest prostym przeniesieniem analogonów z teorii szeregów.

SZEREGI	CAŁKI
Wyraz ogólny szeregu a_n	Funkcja podcałkowa $f(x)$
Suma częściowa szeregu $\sum_{n=1}^N a_n$	Całka właściwa $\int_a^A f(x)\mathsf{d}x$
Suma szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jako granica sumy częściowej dla $N\to\infty$	Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jako granica całki właściwej dla $A\to\infty$
reszta szeregu $\sum_{n=N+1}^\infty a_n$	Całka niewłaściwa $\int_A^\infty f(x)\mathsf{d}x$

Poniższych twierdzeń dowodzi się albo przez niewielką modyfikację twierdzeń dla szeregów, albo przez proste rozszerzenie twierdzeń o całkach właściwych.

1. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna, to zbieżna jest też całka $\int_A^\infty f(x)\mathsf{d}x$ i na odwrót. Ponadto
$$\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x = \int_a^A f(x)\mathsf{d}x + \int_A^\infty f(x)\mathsf{d}x.$$
2. Gdy całka $\int_A^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna, to zachodzi
$$\lim_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)\mathsf{d}x = 0.$$
3. Jeśli zbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$, to zbieżna jest też całka $\int_a^\infty c\cdot f(x)\mathsf{d}x$ ($c = \text{const.}$) i zachodzi
$$\int_a^\infty c\cdot f(x)\mathsf{d}x = c\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$$
4. Jeśli zbieżne są całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ i $\int_a^\infty g(x)\mathsf{d}x$, to zbieżna jest też całka $\int_a^\infty (f\pm g)(x)\mathsf{d}x$ i zachodzi
$$\int_a^\infty (f\pm g)(x)\mathsf{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x \pm \int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x.$$

2.4 Zbieżność całki w przypadku funkcji nieujemnej

Jeśli funkcja $f(x)$ jest nieujemna, to całka
$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathsf{d}x \tag{32}$$
jest funkcją *niemalejącą* zmiennej A. Jeśli ponadto funkcja $F(A)$ jest ograniczona, tzn. $\exists_C\forall_x$: $F(x)\leqslant C$, to $F(X)$ posiada granicę, gdy $A\to\infty$, a to znaczy, że całka (32) *jest zbieżna*. W oczywisty sposób, warunek ten jest też warunkiem *koniecznym* zbieżności; gdy nie jest on spełniony, to całka (32) jest rozbieżna.

Wykorzystując powyższy fakt, dowodzi się, że ma miejsce następujące

Tw. Jeśli dla wszystkich $x\in[a,\infty[$ zachodzi nierówność: $f(x)\leqslant g(x)$, to ze zbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\mathsf{d}x$ wynika zbieżność całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$; i na odwrót: z rozbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\mathsf{d}x$ wynika rozbieżność całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

Dow. jest analogiczny jak w przypadku tw. porównawczego dla szeregów – należy tylko wszędzie zamienić "sumę" na "całkę".

CBDO

Kryterium to jest ogólne/ogólnikowe: Skuteczność w jego stosowaniu zależy od tego, czy uda się w danym problemie znaleźć dostatecznie dobry, a jednocześnie wyliczalny 'ogranicznik', pozwalający oszacować badaną funkcję całkowaną od góry lub od dołu. Wybierając konkretne funkcje do porównań, możemy otrzymać bardziej szczegółowe kryteria zbieżności/rozbieżności całek. Często do porównań bierze się funkcję $\frac{1}{x^\alpha}$ (jak pamiętamy, całka z tej funkcji jest zbieżna dla $\alpha>1$ i rozbieżna dla $\alpha\leqslant 1$). Z porównania z funkcją $\frac{1}{x^\alpha}$, otrzymuje się następujące *kryteria Cauchy'ego*:

Tw. Niech funkcja $f(x)$ ma dla dostatecznie dużych x postać
$$f(x) = \frac{\phi(x)}{x^\alpha},\quad \alpha>0.$$
Wtedy:

1. Jeśli $\alpha > 1$ i $\phi(x)$ jest ograniczona, tzn. $\exists_{C<\infty}\forall_x$: $F(x) \leqslant C$, to całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna;

2. jeśli $\alpha \leqslant 1$ i $\phi(x) \geqslant c > 0$, to całka jest rozbieżna.

Dow.

1. Tu bierzemy do porównania funkcję $g(x) = \frac{C}{x^\alpha}$; mamy: $f(x) \leqslant g(x)$ i wiemy, że $g(x)$ jest całkowalna dla $\alpha > 1$, co dowodzi zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

2. Tu bierzemy do porównania $g(x) = \frac{c}{x^\alpha}$. Zachodzi: $f(x) \geqslant g(x)$, całka z $g(x)$ jest rozbieżna, więc też rozbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Przykł.

1. Zbadajmy zbieżność całki
$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathsf{d}x$$
Zamiast całki $\int_0^\infty$ zbadajmy całkę $\int_1^\infty$; taka zmiana przedziału nie ma wpływu na zbieżność. Mamy:
$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} = \frac{(x^2)^{\frac{3}{4}}}{1+x^2} \geqslant \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \overset{\text{dla } x\geqslant 1}{\geqslant} \frac{1}{(x^2+x^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}},$$
a $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathsf{d}x$ jest rozbieżna, więc rozbieżna jest też całka wyjściowa.

2. Zbadajmy zbieżność całki
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathsf{d}x$$
Tu oszacujmy w drugą stronę:
$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x^3},$$
i ponieważ $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathsf{d}x$ jest zbieżna, to zbieżna jest też całka wyjściwa.

2.5 Zbieżność bezwzględna

Wróćmy do badania zbieżności całek w przypadku ogólnym (tzn. niekoniecznie dla nieujemnych funkcji podcałkowych). Jak pamiętamy, zagadnienie zbieżności całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy istnieje skończona granica funkcji $\Phi(A)$ dla $A \to \infty$, gdzie
$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\mathsf{d}x \tag{33}$$

Przypomnijmy sobie najsampierw warunek Cauchy'ego[1] zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg jego sum częściowych. Warunek B-C mówi zbieżności szeregu mówi, iż
$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m,m'\in\mathbb{N}} : |s_m - s_{m'}| < \epsilon,$$
Warunek ten ma swój bezpośredni odpowiednik w postaci warunku istnienia całek niewłaściwych. Można go sformułować następująco:

[1] Zwany też gdzieniegdzie warunkiem Bolzano-Cauchy'ego

Tw. Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności cali $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest, aby

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{A_0>a}\forall_{A,A'>A_0} : |\Phi(A') - \Phi(A)| = |\int_A^{A'} f(x)\mathsf{d}x| < \epsilon,$$

gdzie $\Phi(A)$ jest dane przez (33).

CBDO

Korzystając z powyższego warunku, łatwo udowodnimy twierdzenie (mające analog dla szeregów: Jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny):

Tw. Jeżeli całka $\int_a^\infty |f(x)|\mathsf{d}x$ jest zbieżna, to jest zbieżna też całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

Uwaga. W takim przypadku mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest *bezwzględnie* zbieżna. (Znów analogia z szeregami!)

Dow. Stosując powyższe kryterium do całki $\int_a^\infty |f(x)|\mathsf{d}x$ (o której zakładamy, że jest zbieżna) mamy: Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $A_0 > a$, że dla $A' > A > A_0$ zachodzi

$$\int_A^{A'} |f(x)|\mathsf{d}x < \epsilon;$$

ale mamy też:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathsf{d}x\right| < \int_A^{A'} |f(x)|\mathsf{d}x \quad \text{co znaczy, że} \quad \left|\int_A^{A'} f(x)\mathsf{d}x\right| < \epsilon$$

a to oznacza, że zbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Tw. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna bezwzględnie, a funkcja $g(x)$ jest ograniczona (tzn. dla dowolnego x: $|g(x)| \leqslant C$), to całka $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\mathsf{d}x$ też jest bezwzględnie zbieżna.

Dow. Wystarczy oszacować:

$$|f(x) \cdot g(x)| \leqslant C \cdot |f(x)|$$

i skorzystać z kryterium porównawczego.

CBDO

Przykł. Rozważmy całkę:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\mathsf{d}x, \quad k \neq 0.$$

Funkcja $\frac{1}{k^2+x^2}$ jest całkowalna (całka z tej funkcji jest oczywiście bezwzględnie zbieżna), zaś funkcja $\cos ax$ jest ograniczona; zatem powyższa całka jest bezwzględnie zbieżna.

2.6 * Kryterium Dirichleta

(* – materiał nadobowiązkowy)