1 Szeregi nieskończone

1.1 Definicje i przykłady

Dla danego ciągu $\{a_n\}$ utwórzmy nowy ciąg $\{s_n\}$, zdefiniowany jako:

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \ \ldots, \ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{1}$$

Def. Jeśli wyżej zdefiniowany ciąg $\{s_n\}$ posiada granicę, to granicę tę oznaczamy symbolem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

i nazywamy *sumą szeregu nieskończonego* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$. Mówimy w takim przypadku, że szereg jest *zbieżny*. Jeśli powyższa granica nie istnieje, to mówimy, że szereg jest *rozbieżności.*

Uwaga. Szeregi możemy więc uważać za szczególny przypadek ciągów. Mają one jednak swoją specyfikę, a przy tym są na tyle ważne, że rozważa się je na ogół odrębnie.

Przykładem takiej pewnej odrębności problemów przy rozważaniu ciągów i szeregów jest problem ich zbieżności. W przypadku ciągów (przynajmniej tych które rozważaliśmy) w większości przypadków umiemy policzyć ich granice. Inaczej jest z szeregami: Za pomocą dostępnych nam środków rzadko umiemy znaleźć wartość granicy i najczęściej rozważanym problemem jest problem zbieżności szeregu.

Def. Ciąg $\{s_n\}$ nazywamy ciągiem *sum częściowych* szeregu nieskończonego.

Przykł.

1. Szereg: $1 + 1 + 1 + \ldots$ jest rozbieżny do ∞, ponieważ $s_n = n$.
2. Szereg *geometryczny* $1 + q + q^2 + \cdots + q^n + \ldots$ jest zbieżny, gdy $|q| < 1$. Mamy bowiem:
$$s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
i dla $|q| < 1$ ciąg $\{s_n\}$ jest zbieżny, a jego granica jest
$$\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$$
3. Szereg $1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \ldots$ jest rozbieżny; ciąg $\{s_n\}$ jest w tym przypadku: $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ i nie posiada ani właściwej, ani niewłaściwej granicy.

Def. $n-$tą resztą szeregu $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ nazywamy szereg

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m. \tag{2}$$

Stw. Jeśli szereg $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Dow. Zauważmy, że jeśli szereg $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \ldots$ jest zbieżny, to również szereg (2) jest zbieżny przy każdej wartości n. Ponieważ

$$r_n = \lim_{k\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}) = \lim_{k\to\infty} s_{n+k} - s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - s_n,$$

więc

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_m - \sum_{m=1}^{\infty} a_m = 0.$$

CBDO

1.2 Ogólne własności szeregów związane ze zbieżnością

Niektóre własności szeregów są bezpośrednimi konsekwencjami własności ciągów. W tej Subsection wymienimy właśnie takie.

Tw. (Warunek Cauchy'ego). Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby szereg $a_1 + a_2 + \dots$ był zbieżny, jest, aby:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} : |a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+m}| < \epsilon. \tag{3}$$

Dow. Widzieliśmy, że zbieżność szeregu jest równoważna zbieżności jego sum częściowych. Ponadto, przypomnijmy sobie warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu $\{s_n\}$: Mówił on, iż

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m\in\mathbb{N}} : |s_{k+m} - s_k| < \epsilon,$$

a że s_n jest $n-$tą sumą częściową szeregu, to otrzymujemy warunek (3).

CBDO

Tw. Jeśli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Uwaga: Innymi słowy, jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, to szereg $a_1 + a_2 + \dots$ nie jest zbieżny.

Dow. Mamy: $a_n = s_n - s_{n-1}$, co daje

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0,$$

ponieważ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1}$.

CBDO

Uwaga: Powyższe twierdzenie nie daje się odwrócić. Istnieją bowiem szeregi $a_1+a_2+\dots$ *rozbieżne*, dla których jednak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Takim szeregiem jest *szereg harmoniczny*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Mamy bowiem:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 2^2\frac{1}{2}; \quad \dots \quad \frac{1}{2^n+1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2},$$

mamy więc

$$s_{2^{n+1}} - s_{2^n} > \frac{1}{2} \Longrightarrow s_{2^n} > \frac{1}{2}n.$$

Tak więc $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2^n} = \infty$, czyli ciąg sum ćzęściowych szeregu harmonicznego jest rozbieżny, a to znaczy, że sam szereg harmoniczny też jest rozbieżny (do ∞).

Def. Szereg nazywamy *ograniczonym*, jeśli ciąg jego sum częściowych jest ograniczony (tzn. jeśli istnieje taka liczba M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$: $s_n < M$).

Tw. Każdy szereg zbieżny jest ograniczony.

Dow. jest to inne wypowiedzenie znanego nam twierdzenia, że każdy ciąg zbieżny jest ograniczony.

CBDO

Mamy dwa naturalne twierdzenia dotyczące zbieżności szeregu sumy oraz iloczynu szeregu przez stałą.

Tw. Jeżeli szeregi $a_1 + a_2 + \dots$ i $b_1 + b_2 + \dots$ są zbieżne, to

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dla ustalenia uwagi weźmy sumę. Mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + \dots + a_n + b_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \lim_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$$

dla różnicy dowód jest analogiczny.

CBDO

Tw. Jeżeli szereg $a_1 + a_2 + \dots$ jest zbieżny, to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dow. Mamy bowiem

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty}(ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n)$$

$$= c\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

CBDO

Wniosek. W szczególności

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n) = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1.3 Szeregi naprzemienne-twierdzenie Leibniza; twierdzenie Abela

Def. *Szeregiem naprzemiennym* nazywamy szereg postaci

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots, \quad \text{gdzie } a_n \geqslant 0. \tag{4}$$

Tw. (Leibniza). zwane też częściej *kryterium Leibniza* Szereg naprzemienny (4), spełniający warunki

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \dots \quad \text{oraz} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \tag{5}$$

jest zbieżny. Ponadto sumy częściowe tego szeregu: $s_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots \pm a_n$ oraz suma szeregu spełniają nierówności

$$s_{2n} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \leqslant s_{2n+1}. \tag{6}$$

Dow. Ciąg sum częściowych o wskaźnikach *parzystych* jest *niemalejący*. Mamy bowiem

$$s_{2m+2} = s_{2m} + (a_{2n+1} - a_{2n+2}), \quad \text{a z założenia } a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant 0.$$

Jest to jednocześnie ciąg *ograniczony*, ponieważ

$$s_{2n} = a_1 - ((a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) + \dots) \leqslant a_1.$$

Skoro tak, to ciąg $\{s_{2n}\}$ jest zbieżny. Oznaczmy jego granicę przez g: $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = g$. Zauważmy, że udowodnimy zbieżność szeregu (5) dowodząc, że $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = g$.

Mamy: $s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$, co daje

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} s_{2n} + \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = g,$$

bo $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$ na mocy założenia.

Wreszcie, nierówności (6) wynikają z faktów, że ciąg $\{s_{2n}\}$ jest rosnący (więc jego granica jest większa lub równa dowolnemu z wyrazów ciągu), zaś ciąg $\{s_{2n+1}\}$ jest malejący (więc $\lim_{n\to\infty} s_{2n+1} \geqslant s_{2k+1}$ dla dowolnego k).

Przykł. Szereg anharmoniczny:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{7}$$

jest zbieżny. Pokażemy później, że sumą tego szeregu jest $\ln 2$.

i interpretacja elektrostatyczna.

Tw. (Abela).zwane też częściej *kryterium Abela* Jeśli ciąg $\{a_n\}$ dąży monotonicznie do zera, zaś szereg sum częściowych ciągu $\{b_n\} : B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ jest ograniczony, to szereg

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n + \dots \tag{8}$$

jest zbieżny.

Dow. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg sum częściowych szeregu $b_1 + b_2 + \dots$: $s_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Na mocy założenia, istnieje takie M, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi $|s_n| < M$.

Aby dowieść, że szereg (8) jest zbieżny, oszacujmy sumę

$$a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_nb_n \tag{9}$$

dla $n > k$. Zauważmy najsampierw, iż

$$-2M < b_m + b_{m+1} + \dots + b_n < 2M \tag{10}$$

dla każdego m i $n \geqslant m$, ponieważ

$$|b_m + b_{m+1} + \dots + b_n| = |s_n - s_{m-1}| \leqslant |s_n| + |s_{m-1}| \leqslant 2M.$$

Wyrażenie (9) przepiszmy teraz tak:

$$a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \dots + a_nb_n =$$

$$(a_k - a_{k+1})b_k + (a_{k+1} - a_{k+2})(b_k + b_{k+1}) +$$

$$+(a_{k+2} - a_{k+3})(b_k + b_{k+1} + b_{k+2}) + \dots + +(a_n)(b_k + b_{k+1} + \dots + b_n) \leqslant$$

$$\leqslant 2M((a_k - a_{k+1}) + (a_{k+1} - a_{k+2}) + \cdots + a_n) = 2Ma_k \tag{11}$$

na mocy (10).

Analogicznie mamy $a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \cdots + a_nb_n \geqslant -2Ma_k$, a stąd

$$|a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \cdots + a_nb_n| \leqslant 2Ma_k. \tag{12}$$

Weźmy teraz jakieś $\epsilon > 0$. Zakładamy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera; znaczy to, że istnieje takie k, że $a_k < \frac{\epsilon}{2M}$. Wyżej udowodniliśmy (12), co przepiszemy jako $|a_kb_k + a_{k+1}b_{k+1} + \cdots + a_nb_n| < \epsilon$. Zgodnie z warunkiem Cauchy'ego zbieżności ciągu (jeżeli $|a_n - a_m| < \epsilon$ dla n, m dostatecznie dużych, to ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny), szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n$ jest zbieżny.

CBDO

Uwaga. Z wzoru (12) mamy oszacowanie na sumę szeregu:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_nb_n\right| \leqslant 2Ma_1; \tag{13}$$

jest tak, ponieważ na mocy wzoru (12) nierówność $|a_1b_1 + a_{k+1}b_{k+1} + \cdots + a_nb_n| \leqslant 2Ma_1$ zachodzi dla każdego n.

Uwaga 2. Kryterium Leibniza jest szczególnym przypadkiem kryterium Abela: W tym ostatnim trzeba za ciąg $\{b_n\}$ wziąć $b_n = (-1)^n$.

1.4 Szeregi o wyrazach dodatnich. Kryteria zbieżności d'Alemberta i Cauchy'ego

Przy założeniu, że wszystkie składniki szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ są dodatnie, ciąg jego sum częściowych jest rosnący. Wynika stąd natychmiast stwierdzenie:

Stw. Szereg o wyrazach dodatnich jest albo zbieżny, albo rozbieżny do ∞.

CBDO

Tw. (kryterium porównawcze)[1]

(Z) Jeśli dla wszystkich n zachodzi $0 \leqslant b_n \leqslant a_n$ i jeśli szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $b_1 + b_2 + \ldots$. Przy tym zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(R) Jeżeli natomiast szereg $b_1 + b_2 + \ldots$ jest rozbieżny, to rozbieżny jest też szereg $a_1 + a_2 + \ldots$.

Dow. (Z) Oznaczmy sumy częściowe szeregów $a_1 + a_2 + \ldots$ i $b_1 + b_2 + \ldots$ jako s_n i t_n:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Mamy oczywiście $t_n \leqslant s_n$.

Mamy też: (przypomnijmy sobie odpowiednie twierdzenia o granicach ciągów monotonicznych)

$$s_n \leqslant \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{więc} \quad t_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

[1] Można je wyrażać w różnych wersjach; tu jest jedna z nich

Z nierówności tej wnioskujemy, że ciąg sum częściowych szeregu $b_1+b_2+\ldots$ jest ograniczony, a więc szereg $b_1+b_2+\ldots$ jest zbieżny. Z drugiej strony, wynika stąd nierówność $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (pamiętamy, że dla ciągów było: Jeżeli dla ciągu $\{x_n\}$ każdego n zachodzi: $x_n \leqslant C$, to $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant C$).

(R) Ciąg sum częściowych szeregu $b_1+b_2+\ldots$ jest monotoniczny i nieograniczony, i – z uwagi na nierówność $b_n \leqslant a_n$ – taki jest też ciąg sum częściowych szeregu $a_1+a_2+\ldots$; wobec tego szereg $a_1+a_2+\ldots$ jest rozbieżny do ∞.

CBDO

Kryterium powyższe jest ogólne i sukces w jego stosowaniu do jakiegoś szeregu $b_1+b_2+\ldots$ zależy od tego, czy znajdziemy taki szereg zbieżny $a_1+a_2+\ldots$, który szacuje od góry $b_1+b_2+\ldots$.

Przykł. Pokażemy zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \tag{14}$$

Uczynimy to przez porównanie go z szeregiem:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots; \tag{15}$$

mamy:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(n-1)}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},$$

czyli granica sum częściowych s_n szeregu (15) jest: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1$. Na mocy kryterium porównawczego, szereg (14) jest zbieżny[2].

Biorąc do porównywania w kryterium porównawczym szereg geometryczny, otrzymujemy następujące dwa kryteria.

Tw. (kryterium d'Alemberta). Szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich, spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \tag{16}$$

jest zbieżny.

Dow. Weźmy h takie, aby były spełniona nierówności: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < h < 1$. Istnieje więc k takie, że dla $n \geqslant k$ mamy $\frac{a_{n+1}}{a_n} < h$, czyli $a_{n+1} < a_n h$. Tak więc szereg $a_k + a_{k+1}+\ldots$ ma składniki odpowiednio nie większe od składników szeregu geometrycznego $a_k + a_k h + a_k h^2 + \ldots$. Ten szereg geometryczny jest zbieżny, bo $0 < h < 1$. Z kryterium porównawczego jest więc zbieżny szereg $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, a co za tym idzie – i szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

CBDO

Tw. (kryterium Cauchy'ego). Szereg $a_1+a_2+\ldots$ o wyrazach dodatnich, spełniający warunek

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \tag{17}$$

jest zbieżny.

Dow. Podobnie jak w kryterium d'Alemberta, istnieje takie h i takie k, że dla $n \geqslant k$ zachodzi $\sqrt[n]{a_n} < h$, a to jest równoważne nierówności $a_n < h^n$. Porównując teraz szereg

[2] Zobaczymy później, że suma szeregu (14) jest równa $\frac{\pi^2}{6}$

$a_k + a_{k+1} + \ldots$ z szeregiem geometrycznym $h^k + h^{k+1} + \ldots$, widzimy, że jeżeli szereg geometryczny jest zbieżny (tzn. $h < 1$), to zbieżny jest również szereg $a_1 + a_2 + \ldots$.

Ustaliliśmy więc pewne kryteria zbieżności. Daje się też znaleźć kryteria *rozbieżności.*

Tw. (Kryteria rozbieżności). Jeśli dla szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$ o składnikach dodatnich zachodzi jedna z nierówności

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{lub} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1, \tag{18}$$

to szereg jest rozbieżny.

Dow. Jeśli ma miejsce pierwsza z nierówności (18), to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{co daje} \quad a_{n+1} > a_n,$$

a to znaczy, że ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0, czyli nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu – tak więc szereg $a_1 + a_2 + \ldots$ jest *rozbieżny.*

Jeśli natomiast spełniona jest druga z nierówności (18), to dla dostatecznie dużych n mamy

$$\sqrt[n]{a_n} > 1; \quad \text{co daje} \quad a_{n+1} > 1,$$

i znowu ciąg $\{a_n\}$ nie jest zbieżny do 0.

CBDO

Przykł. Szereg:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{19}$$

dla $x \geqslant 0$ jest zbieżny.

Dow. Mamy:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{x^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{x}{n+1} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

Z kryterium d'Alemberta wynika, że szereg (19) jest zbieżny.

Przykł. Kryterium d'Alemberta *nie rozstrzyga* o zbieżności szeregu harmonicznego ani szeregu (14).

W takich przypadkach trzeba stosować inne, bardziej subtelne kryteria (Kummera, Raabego), o których zainteresowany Czytelnik może przeczytać w książkach podanych w literaturze. Tu sformułujemy jeszcze jedno, dość uniwersalne

Tw. (kryterium "zagęszczeniowe" Cauchy'ego). Rozważmy szereg $S = a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach dodatnich, gdzie ciąg $\{a_n\}$ dąży do zera monotonicznie. Utwórzmy szereg "zagęszczony": $Z = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$. Wtedy jeśli szereg Z jest zbieżny, to szereg S też jest zbieżny; i jeśli szereg Z jest rozbieżny, to szereg S też jest rozbieżny.

Dow. *Zbieżność*: Mamy następujące oszacowanie z góry na szereg S:

$$\begin{aligned} S &= a_1 \\ &+a_2 + a_3 \\ &+a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\ &+a_8 + a_9 + \dots + a_{15} + \dots \\ &\leqslant a_1 \\ &+2 \cdot a_2 \\ &+4 \cdot a_4 \\ +8 \cdot a_8 + \dots &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = Z; \end{aligned}$$

jeśli więc zbieżny jest szereg zagęszczony Z, to – wziąwszy pod uwagę kryterium porównawcze – jest zbieżny też szereg wyjściowy S.

Rozbieżność: Mamy też następujące oszacowanie *z dołu* na szereg S:

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 \\ &+a_3 + a_4 \\ &+a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\ &+a_9 + \dots + a_{15} + \dots \\ &\geqslant a_1 + a_2 \\ &+2 \cdot a_4 \\ &+4 \cdot a_8 \\ &+8 \cdot a_{16} + \dots = \\ = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}\left(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots\right) &\geqslant \frac{1}{2}Z, \end{aligned}$$

zatem – z kryterium porównawczego – jeśli rozbieżny jest szereg zagęszczony Z, to rozbieżny jest też wyjściowy szereg S.

CBDO

Przykł. Rozważmy zbieżność szeregu:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \tag{20}$$

gdzie $\alpha > 0$ (dla $\alpha \leqslant 0$ nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu).

Rozważmy szereg "zagęszczony":

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{k\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^{(1-\alpha)}\right)^k$$

W ostatniej sumie rozpoznajemy szereg *geometryczny*. Oznaczając: $q = 2^{(1-\alpha)}$ widzimy, że będzie on zbieżny, jeśli $q < 1$, co ma miejsce wtedy, gdy $\alpha > 1$.

Tak więc: szereg (20) jest zbieżny dla $\alpha > 1$, a rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$.

1.5 Szeregi bezwzględnie zbieżne

Def. Szereg $a_1+a_2+\dots$ nazywamy *bezwzględnie zbieżnym*, jeśli szereg $|a_1|+|a_2|+\dots$ jest zbieżny. Szereg, który jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, nazywamy *warunkowo zbieżnym.*

Tw. Jeśli szereg $a_1+a_2+\dots$ jest zbieżny bezwzględnie, to jest też zbieżny w zwykłym sensie. Ponadto

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{21}$$

Dow. Zgodnie z warunkiem Cauchy'ego zbieżności szeregów, musimy oszacować sumę: $a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n$ i pokazać, że dla dostatecznie dużych k i dowolnych n ($n > k$) suma ta jest dowolnie mała. Mamy:

$$|a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n| \leqslant |a_k| + |a_{k+1}| + \cdots + |a_n| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|.$$

Ostatnia suma powyżej, jako reszta r_{k-1} szeregu zbieżnego, dąży do 0, gdy k dąży do ∞. Innymi słowy, dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie k, że $r_{k-1} < \epsilon$, skąd $|a_k+a_{k+1}+\cdots+a_n| < \epsilon$ dla każdego $n > k$.

W ten sposób pokazaliśmy zbieżność szeregu $a_1 + a_2 + \dots$. Ponadto, oznaczając: $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ oraz $t_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$ mamy: $|s_n| \leqslant t_n$, skąd, po przejściu do granicy, wynika

$$|\lim_{n\to\infty} s_n| = \lim_{n\to\infty} |s_n| \leqslant \lim_{n\to\infty} t_n,$$

a to jest dokładnie wzór (21).

CBDO

Przykł. Szereg geometryczny $1 + q + q^2 + \dots$, gdzie $|q| < 1$, jest zbieżny bezwzględnie, ponieważ jest zbieżny szereg $1 + |q| + |q|^2 + \dots$.

Przykł. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ jest zbieżny bezwzględnie dla każdego x. Jak się niedługo okaże, jego suma jest równa e^x.

Przykł. Szereg anharmoniczny jest zbieżny *warunkowo*, ponieważ szereg wartości bezwzględnych jego składników to szereg *harmoniczny*, który jest rozbieżny.

1.6 (Pozorne) paradoksy z szeregami nieskończonymi

Przyjrzymy się teraz zagadnieniu *przemienności* szeregów nieskończonych. Wiemy, że dodawanie jest *przemienne*, tzn. $a + b = b + a$, co implikuje, że suma *skończonej* ilości składników jest przemienna, tzn. nie zależy od kolejności składników. Okazuje się, że analogiczna własność ma też miejsce dla szeregów bezwzględnie zbieżnych, natomiast na ogół *nie zachodzi* dla szeregów zbieżnych warunkowo. Będziemy to pokazywać, ale najsampierw sprecyzujemy, co rozumiemy przez zmianę kolejności składników, gdy ilość tych składników jest nieskończona.

Def. Przez *permutację* ciągu liczb naturalnych rozumiemy ciąg liczb naturalnych $\{m_n\}$ $= m_1, m_2, \dots$ taki, że każda liczba naturalna występuje w ciągu $\{m_n\}$ dokładnie raz. Jeśli $m_1, m_2, \dots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to mówimy, że szereg $a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n} + \dots$ powstał z szeregu $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ przez zmianę porządku jego składników.

Tw. Każdy szereg bezwzględnie zbieżny jest przemienny. Inaczej mówiąc, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny i jeśli $m_1, m_2, \ldots$ jest permutacją ciągu liczb naturalnych, to

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{22}$$

Dow. Niech $\epsilon > 0$. Ze zbieżności szeregu $|a_1| + |a_2| + \ldots$ wynika, że istnieje takie k, że

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i| < \epsilon. \tag{23}$$

Ponieważ ciąg $\{m_n\}$ zawiera wszystkie liczby naturalne, więc istnieje takie r, że wśród liczb $m_1, m_2, \ldots, m_r$ występują liczby $1, 2, 3, \ldots,$ aż do k. Ponieważ zaś każda liczba naturalna występuje dokładnie raz w ciągu $\{m_n\}$, to dla każdego $n > r$ mamy $m_n > k$. Jeśli więc przy danym $n > r$ ze zbioru $m_1, m_2, \ldots, m_r, \ldots, m_n$ skreślimy liczby $1, 2, \ldots, k$, to pozostaną w nim wyłącznie liczby większe od k (przy tym wszystkie różne). Tak więc, oznaczając

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad t_n = a_{m_1} + a_{m_2} + \cdots + a_{m_n}$$

i skreślając w różnicy $t_n - s_n$ składniki o równych wskaźnikach, otrzymamy w różnicy $t_n - s_n$ jedynie składniki o wskaźnikach większych od k. Wynika stąd, że

$$|t_n - s_n| \leqslant 2 \sum_{i=k+1}^{\infty} |a_i|,$$

skąd mamy:

$$|t_n - s_n| < 2\epsilon.$$

na mocy (23). Ponieważ ta ostatnia nierówność zachodzi dla każdego $n > r$, to zachodzi: $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n$, a to oznacza, że spełniona jest teza twierdzenia, tzn. (22).

CBDO

Uwaga. Powyższe twierdzenie *nie jest* prawdziwe dla dowolnego szeregu zbieżnego. Jako przykład, weźmy szereg anharmoniczny i oznaczając jego sumę przez c (niedługo okaże się, że $c = \ln 2$), przestawmy jego składniki w następujący sposób:

$$c = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots;$$

policzmy $c + \frac{1}{2}c$:

$$c + \frac{1}{2}c = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$$

w czym rozpoznajemy sumę szeregu anharmonicznego *po przestawieniu składników*. Tak więc przez przestawienie składników uzyskaliśmy szereg zbieżny *do innej wartości*. Okazuje się, że ma miejsce nawet bardziej (pozornie) paradoksalna sytuacja:

Tw. (Riemanna): Mając dany szereg zbieżny warunkowo, można przez zmianę porządku jego składników uzyskać szereg rozbieżny lub zbieżny do dowolnej, z góry zadanej granicy (skończonej lub nieskończonej).

Bez dowodu. (Dla ciekawych, jest np. w skrypcie P. Urbańskiego, "Analiza", t. 1).

Zagadka. Widzieliśmy, że energia elektrostatyczna kryształu jednowymiarowego jest równa sumie szeregu anharmonicznego. Czy to znaczy, że ta energia może być *dowolna*, jeśli przez zmianę kolejności sumowania można uzyskać dowolną wartość? Może więc energia elektrostatyczna jest źle określoną wielkością?

1.7 Mnożenie szeregów

Wiemy, że jeśli pomnożymy dwie skończone sumy, to znów otrzymamy jakąś sumę. Przy szeregach nieskończonych pojawiają się pytania o zbieżność. Poniższe twierdzenie pokazuje, że dla szeregów bezwzględnie zbieżnych szeregi dadzą się pomnożyć, i szereg w wyniku powstały ma taką postać, jakiej oczekujemy.

Tw. (Cauchy'ego). Przy założeniu, że szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ są bezwzględnie zbieżne, zachodzi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n, \tag{24}$$

gdzie

$$c_1 = a_1 b_1,$$

$$c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,$$

$$\dots,$$

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1 = \sum_{k=1}^{n} a_k b^{n+1-k}.$$

Dow. Oznaczmy

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, \quad u_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n,$$

czyli

$$u_n = a_1 t_n + a_2 t_{n-1} + a_3 t_{n-2} + \cdots + a_n t_1.$$

Będziemy szacować różnicę

$$s_n t_n - u_n = a_1 t_n + a_2 t_n + \cdots + a_n t_n - u_n =$$

$$= a_2(t_n - t_{n-1}) + a_3(t_n - t_{n-2}) + \cdots + a_n(t_n - t_1). \tag{25}$$

Ponieważ szeregi: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ są zbieżne, a więc ograniczone, to istnieje taka liczba M, że dla każdego j zachodzi:

$$|t_j| < M \text{ oraz } |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_j| < M. \tag{26}$$

Warunek zbieżności szeregu $b_1 + b_2 + \dots$ oznacza dokładnie tyle, co warunek zbieżności ciągu $\{t_n\}$; zapiszmy warunek Cauchy'ego zbieżności ciągu $\{t_n\}$: Dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje takie k, że jeśli $n > m > k$, to zachodzi

$$|t_n - t_m| < \epsilon \tag{27}$$

Podobnie dla szeregu $|a_1| + |a_2| + \dots$ mamy

$$|a_{k+1}| + |a_{k+2}| + \cdots + |a_n| < \epsilon. \tag{28}$$

W dalszym ciągu weźmy $n > 2k$. Na mocy (25) mamy

$$|s_n t_n - u_n| \leqslant (|a_2||t_n - t_{n-1}| + \cdots + |a_k||t_n - t_{n-k+1}|) +$$

$$+ (|a_{k+1}||t_n - t_{n-k}| + \cdots + |a_n||t_n - t_1|).$$

Oszacujmy teraz pierwszy nawias wykorzystując (27), a drugi – wykorzystując (26), pamiętając zarazem, że $n-k+1>k$ oraz $|t_n-t_j|\leqslant|t_n|+|t_j|<2M$:

$$|s_nt_n-u_n|\leqslant(|a_2|+\dots+|a_k|)\epsilon+(|a_{k+1}|+\dots+|a_n|)\cdot 2M<M\epsilon+\epsilon\cdot 2M,$$

Tym samym pokazaliśmy, że nierówność: $|s_nt_n-u_n|<3M\epsilon$ zachodzi dla każdego $n>2k$. Znaczy to, że $\lim\limits_{n\to\infty}(s_nt_n-u_n)=0$. Ponieważ zaś ciągi: $\{s_n\}$ i $\{t_n\}$ są zbieżne, więc $\lim\limits_{n\to\infty}s_nt_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_n\lim\limits_{n\to\infty}t_n$, a to znaczy, że $\lim\limits_{n\to\infty}s_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}s_nt_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$, czyli zachodzi wzór (24).

CBDO

Przykł. Pokażemy, że

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} \tag{29}$$

Mamy bowiem:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot\frac{y^n}{n!}+\frac{x}{1!}\cdot\frac{y^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^2}{2!}\cdot\frac{y^{n-2}}{(n-2)!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\cdot 1\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(y^n+\frac{n}{1!}xy^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^2y^{n-2}+\dots+x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}$$

(przy ostatniej równości wykorzystaliśmy wzór dwumienny Newtona).

Uwaga. Twierdzenie o mnożeniu szeregów jest prawdziwe też przy słabszym założeniu, a mianowicie, że jeden z szeregów (tu: $a_1+a_2+\dots$) jest bezwzględnie zbieżny, a drugi(tu: $b_1+b_2+\dots$) jest zbieżny, ale niekoniecznie bezwzględnie. W dowodzie wykorzystywaliśmy bowiem tylko bezwzględną zbieżność szeregu $a_1+a_2+\dots$.

Jeśli natomiast oba szeregi są warunkowo zbieżne, to szereg $c_1+c_2+\dots$ może być rozbieżny.

Przykł. Weźmy

$$a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}};$$

szeregi $a_1+a_2+\dots$ i $b_1+b_2+\dots$ są wówczas zbieżne (z jakiego kryterium?), zaś szereg $c_1+c_2+\dots$ jest rozbieżny.

Uzasadnienie – krótki rachunek.

Wymnóżmy oba szeregi; otrzymamy:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)=$$

$$\left(-1+\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt4}-\frac{1}{\sqrt5}+\dots\right)\left(-1+\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt4}-\frac{1}{\sqrt5}+\dots\right)$$

$$\begin{array}{llllll}
= & 1 & & & & \\
 & -\frac{2}{\sqrt2} & & & & \\
 & +\frac{2}{\sqrt3} & +\frac12 & & & \\
 & -\frac{2}{\sqrt4} & -\frac{2}{\sqrt3\sqrt2} & & & \\
 & +\frac{2}{\sqrt5} & +\frac{2}{\sqrt4\sqrt2} & +\frac{1}{\sqrt3\sqrt3} & & \\
 & -\frac{2}{\sqrt6} & -\frac{2}{\sqrt5\sqrt2} & -\frac{2}{\sqrt4\sqrt3} & & \\
 & +\frac{2}{\sqrt7} & +\frac{2}{\sqrt6\sqrt2} & +\frac{2}{\sqrt5\sqrt3} & +\frac{1}{\sqrt4\sqrt4} & + \quad \dots
\end{array}$$

Weźmy jakiś wyraz *nieparzysty* c_n szeregu iloczynowego. Jest on sumą $n+1$ członów powyższej postaci, a najmniejszy z nich to stojący po prawej wyraz $\frac{1}{(n+1)}$. Możemy więc oszacować c_n jako:

$$c_{2n+1} \geqslant (n+1) \cdot \frac{1}{(n+1)} = \frac{1}{2},$$

i zachodzi to dla dowolnego n. Widać więc, że nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu, tzn. szereg 'iloczynowy' jest rozbieżny.

2 Szeregi potęgowe

Def. *Szeregiem potęgowym* nazywamy szereg

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{30}$$

Wyrażenia bardzo podobne pojawiały się przy omawianiu wzoru Taylora; tyle że tam suma była *skończona* i na końcu figurowała tam reszta. Ale jeśli resztę można uczynić dowolnie małą, to otrzyma się wyrażenie dokładnie takie, jak (30).

Żeby to dokładniej zobaczyć, przypomnijmy sobie wzór Taylora:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n, \tag{31}$$

Dla ustalenia uwagi weźmy $a = 0$ oraz oznaczmy $x = b$ Wtedy widać, że jeśli zachodzi $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, to funkcja $f(x)$ daje się rozwinąć w szereg potęgowy:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!}x^n \tag{32}$$

Podamy teraz proste kryterium, kiedy funkcję można rozwinąć w szereg (32).

Stw. Załóżmy, że *wszystkie* pochodne $f^{(n)}$ są ograniczone w przedziale $[0, x]$, tzn. istnieje taka liczba M, że nierówność $|f^{(n)}(\theta x)| < M$ zachodzi dla każdego n i dla każdego $\theta \in]0, 1[$. Wtedy $f(x)$ ma rozwinięcie (32) w szereg potęgowy.

Dow. Mamy:

$$|R_n| = \left|\frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x)\right| \leqslant \left|\frac{x^n}{n!}\right| M,$$

a ponieważ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0, \quad \text{więc też } \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

CBDO

Def. *Przedziałem zbieżności* szeregu potęgowego nazywamy zbiór tych $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg (30) jest zbieżny.

Zauważmy, że jeśli mamy szereg w postaci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ (a nie np. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-b)^n$, $b \neq 0$) , to przedział zbieżności jest odcinkiem położonym symetrycznie względem $x = 0$, ma więc postać $]-R, R[$ (może też być np. jedno- czy dwustronnie domknięty.

Def. Jeśli przedział zbieżności ma postać jak wyżej, to liczbę R nazywamy *promieniem zbieżności.*

Przykład. Przedział zbieżności szeregu geometrycznego. Wiemy, że dla dowolnego $x \in]-1, 1[$ szereg geometryczny:

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

jest zbieżny, a dla $|x| > 1$ jest rozbieżny. Zatem przedział zbieżności szeregu geometrycznego to $]-1, 1[$, a promień zbieżności $R = 1$

2.1 Rozwinięcia w szereg różnych funkcji

2.1.1 Funkcja wykładnicza

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Mamy bowiem: $f^{(n)}(x) = e^x$, a stąd $f^{(n)}(0) = 1$. Oszacowanie reszty: Zauważmy, że w przedziale $[0, x]$ pochodne wszystkich rzędów są wspólnie ograniczone; jeśli bowiem $0 \leqslant x$, to $f^{(n)}(\theta x) \leqslant e^x$, zaś gdy $x < 0$, to $f^{(n)}(\theta x) < 1$. Szereg powyższy jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$, czyli *przedziałem zbieżności funkcji wykładniczej jest cała prosta rzeczywista* $\mathbb{R}$.

2.1.2 Funkcje trygonometryczne

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

Bowiem mamy: $f^{(n)}(0) = \sin 0$ dla n parzystych, oraz $f'(0) = 1$, $f'''(0) = -1$, $f^{(5)}(0) = +1$ itd. Oszacowanie reszty: Pochodne wszystkich rzędów funkcji $\sin x$ są wspólnie ograniczone dla dowolnego x przez 1.

Podobnie pokazujemy, że

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Rozwinięcia w szereg funkcji sin i cos są zbieżne dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$.

Jak się liczy sinusy czy exponensy w kalkulatorze lub komputerze.

2.1.3 (uogólniony) dwumian Newtona dla dowolnych wykładników rzeczywistych (nie naturalnych)

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n \quad \text{dla } |x| < 1. \tag{33}$$

Z uwagi na nieco odmienne techniki oszacowań, rozważymy oddzielnie przypadki $x > 0$ i $x < 0$.

1. Przypadek $x > 0$. Dla $f(x) = (1+x)^a$, $n-$ta pochodna jest

   $$f^{(n)}(x) = a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

   co daje wyrażenie na resztę w postaci Lagrange'a

   $$R_n(x) = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n(1+\theta_n x)^{a-n}.$$

   Mamy:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n = 0 \quad \text{dla } |x| < 1$$

   Gdyby ktoś zapomniał, jak takie granice się liczy, to weźmy iloraz $(n+1)-$wszego i $n-$tego wyrazu ciągu $a_n = \frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-n+1)}{n!}x^n$. Mamy:

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a-n+1}{(n+1)}x \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

czyli wyrazy ciągu $\{a_n\}$ są – co najmniej od pewnego miejsca – mniejsze od wyrazów ciągu geometrycznego o $q < 1$; za q można wziąć jakąś liczbę większą od x a mniejszą od 1. A to znaczy, że ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny do zera.

Aby więc dowieść, że $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, wystarczy pokazać, że przy danym x ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$ jest ograniczony dla dowolnego n. Ponieważ $x > 0$, to zachodzi nierówność: $1 < 1+\theta_n x < 1+x$, z czego wynika

$$1 \leqslant (1+\theta_n x)^a \leqslant (1+x)^a \text{ dla } a \geqslant 0, \quad \text{lub} \quad (1+x)^a \leqslant (1+\theta_n x)^a \leqslant 1 \text{ dla } a \leqslant 0.$$

Zachodzi też nierówność $(1+\theta_n x)^{-n} < 1$. Ostatecznie widzimy, że ciąg $(1+\theta_n x)^{a-n}$ jest ograniczony.

2. Przypadek $x < 0$. Zapisując resztę w postaci Cauchy'ego, mamy

$$R_n(x) = \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} x^n (1-\theta'_n)^{n-1}(1+\theta'_n x)^{a-n}.$$

Mamy, podobnie jak poprzednio

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!} x^{n-1} = 0 \quad \text{dla } |x| < 1$$

Pokażmy – też podobnie jak poporzednio – że ciąg $(1-\theta'_n)^{n-1}(1+\theta'_n x)^{a-n}$ jest ograniczony. Pokażemy równoważnie, że ciągi:

$$\left(\frac{1-\theta'_n}{1+\theta'_n x}\right)^{n-1} \quad \text{oraz} \quad (1+\theta'_n x)^{a-1} \tag{34}$$

są ograniczone. Podstawmy: $y = -x$. Mamy: $y > 0$ oraz $\theta'_n > \theta'_n y$, zatem $1-\theta'_n < 1-\theta'_n y < 1$. Tak więc

$$\left(\frac{1-\theta'_n}{1-\theta'_n y}\right)^{n-1} < 1.$$

Mamy też: $1-y < 1-\theta'_n y < 1$, zatem

$$(1-y)^{a-1} \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant 1 \text{ dla } a-1 \geqslant 0, \quad \text{lub} \quad 1 \leqslant (1-\theta'_n y)^{a-1} \leqslant (1-y)^{a-1} \text{ dla } a-1 \leqslant 0$$

Obydwa ciągi (34) są więc ograniczone. Znaczy to, że $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Rozwinięcia dla kilku wartości a

- $a = -1$. Otrzymujemy znany nam wzór

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots, \tag{35}$$

a za chwilę się nam przyda

-

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots, \tag{36}$$

- $a = \frac{1}{2}$. Mamy:
$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots \tag{37}$$
Bo:
$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}};\quad f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}};\quad f''(x) = -\frac{1\cdot 1}{2\cdot 2}(1+x)^{-\frac{3}{2}};\quad f'''(x) = +\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2}(1+x)^{-\frac{5}{2}}...$$
skąd
$$f(0) = 1\quad \frac{1}{1!}f'(0) = \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2!}f''(0) = -\frac{1}{2\cdot 4};\quad \frac{1}{3!}f'''(0) = +\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6};\quad \frac{1}{4!}f^{(4)}(0) = -\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8};...$$
i ogólnie
$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}$$
I jak to domnożymy przez x^n i zsumujemy, to otrzymamy wzór (37).

- $a = -\frac{1}{2}$. Mamy:
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dots$$
Tu już sprawdzenie tego wzoru pozostawiamy jako ćwiczenie dla Czytelnika/Czytelniczki.

- Stąd od razu wynika:
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \dots \tag{38}$$

Zastosowanie ostatniego wzoru. Energia kinetyczna w ruchu relatywistycznym jest
$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$
gdzie m_0 jest masą spoczynkową cząstki, v – prędkość, c – prędkość światła. Gdy v jest znacznie mniejsze od c, to można powyższe wyrażenie rozwinąć w szereg Taylora w potęgach $\frac{v}{c}$ i pierwszych kilka wyrazów będzie dobrym przybliżeniem ogólnego wzoru. Mamy:
$$E \approx m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \frac{3}{8}\frac{v^2}{c^2}m_0v^2 + \dots;$$
pierwszy wyraz to energia odpowiadająca masie spoczynkowej; drugi – to zwykła (nierelatywistyczna) energia kinetyczna; i trzeci – to pierwsza poprawka relatywistyczna (znacząca np. w przypadku widm elektronowych cięższych atomów).

2.2 Różniczkowanie szeregów potęgowych

Sumy szeregów potęgowych zachowują się bardzo przyzwoicie wewnątrz przedziału zbieżności. Jako przykład przytoczymy:

Tw. Suma szeregu potęgowego jest wewnątrz przedziału zbieżności funkcją ciągłą, oraz różniczkowalną dowolną ilość razy.

Przytoczymy jeszcze, mające sporo zastosowań, rozwinięcie drugiej części powyższego twierdzenia:

Tw. Jeżeli: $f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$, to dla każdego x leżącego *wewnątrz* przedziału zbieżności zachodzi

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots,$$

przy czym przedziały zbieżności szeregów dla f i f' są takie same.

Dow. Bez dowodu.

CNZO

Uwaga. Innymi słowy, szeregi potęgowe można (wewnątrz przedziału zbieżności) różniczkować wyraz za wyrazem.

Przykł. Mamy dobrze znany wzór:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Powyższe twierdzenie mówi, że pochodne obu stron są równe. Mamy zatem:

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = -\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Wykorzystując powyższe twierdzenie, wypiszemy rozwinięcia w szereg kilku dalszych funkcji.

- Rozważmy szereg:

$$F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}; \tag{39}$$

  Zróżniczkujmy ten szereg wyraz za wyrazem; w myśl powyższego twierdzenia,otrzymany szereg to będzie rozwinięcie w szereg pochodnej $F'(x)$. Widać, że pochodną szeregu (39 jest szereg (35), który definiuje funkcję $\frac{1}{1+x}$. Jaka funkcja $F(x)$ spełnia: $F'(x) = \frac{1}{1+x}$? Odpowiedź jest łatwa: Jest to funkcja: $\ln(1+x)+C$. Musi zachodzić: $F(0) = 0 = \ln 1 + C$, co daje $C = 0$. Mamy zatem:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}. \tag{40}$$

- Teraz rozważmy:

$$G(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots; \tag{41}$$

  widać, że jego pochodna to szereg (36). Argumentując jak w poprzednim przykładzie, widzimy, że $G(x) = \operatorname{arctg}(x)$, czyli rozwinięcie w szereg potęgowy funkcji $\operatorname{arctg}(x)$ dane jest wzorem (41). Przedział zbieżności tego szeregu to $]-1, 1]$.

- Wreszcie, biorąc szereg:

$$H(x) = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \ldots \tag{42}$$

  widzimy, że pochodna tego szeregu to funkcja $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, zatem wzór (42) określa rozwinięcie w szereg funkcji $\arcsin(x)$.

2.3 Zachowanie szeregów potęgowych na brzegu przedziału zbieżności

Sformułowane wyżej twierdzenia dotyczyły zachowania funkcji, określanych przez szereg potęgowy, *wewnątrz* przedziału zbieżności.

Można zadać pytanie, czy można coś powiedzieć o zachowaniu tych funkcji (określanych przez szereg potęgowy) na brzegu przedziału zbieżności?

Scenariusze mogą tu być rozmaite. Weźmy znów szereg geometryczny, dla którego mamy:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}.$$

Wstawiając tu $x = 1$, po lewej stronie mamy szereg rozbieżny do nieskończoności, a po prawej wyrażenie nieokreślone. Podstawiając z kolei $x = -1$, po prawej stronie znów mamy szereg rozbieżny (choć ograniczony), a po lewej dobrze określone wyrażenie $\frac{1}{2}$. Patrząc z kolei na rozwinięcie logarytmu (40), widzimy, że mamy po lewej stronie szereg *zbieżny*. Kuszące byłoby przypuścić, że jego suma to $ln 2$. Nie mamy jednak żadnego twierdzenia, które by uzasadniało takie przypuszczenie.

Okazuje się, że ma miejsce

Tw. (Abela). Jeśli szereg potęgowy na granicy przedziału zbieżności (powiedzmy, prawej granicy) jest zbieżny, to funkcja, będąca sumą tego szeregu potęgowego, jest lewostronnie ciągła na granicy przedziału zbieżności.

Mamy w ten sposób równość

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2.$$

Mając twierdzenie Abela, można wypisać jawne wyrażenia dla wielu szeregów. Tu pokażemy, że:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Dla dowodu, przypomnijmy sobie pokazany dopiero co wzór (41) na arcus tangens; wstawiając tam $x = 1$ i pamiętając, że $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, dostajemy powyższą równość.

3 Całki niewłaściwe

3.1 Całki w granicach nieskończonych

Wiemy, co to jest $\int_a^b f(x)\mathsf{d}x$ w przypadku skończonego przedziału $[a,b]$ i funkcji ograniczonej $f(x)$. Okazuje się potrzebne uogólnienie tego pojęcia w różnych kierunkach (przedział nieskończony i/lub f nieograniczona). Tutaj będziemy się zajmować tylko funkcjami ograniczonymi na przedziałach nieskończonych.

Niech funkcja f będzie określona w przedziale $[a,\infty[$ (tzn. dla dowolnego $x \geqslant a$) i całkowalna na każdym skończonym przedziale $[a,A]$ (zakładamy, że $A > a$). Dla dowolnego A jest więc dobrze określona całka $\int_a^A f(x)\mathsf{d}x$.

Def. *Całką niewłaściwą* z funkcji f po przedziale $[a,\infty[$ nazywamy granicę

$$\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathsf{d}x; \quad \text{oznaczamy ją} \quad \int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x. \tag{43}$$

W przypadku gdy granica (43) jest skończona, mówimy że całka niewłaściwa jest *zbieżna*, a funkcja f jest *całkowalna*. Jeśli granica (43) jest rozbieżna do ∞ lub nie istnieje, mówimy, że całka niewłaściwa jest rozbieżna.

Przykł.

1. Funkcja $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ jest całkowalna w dowolnym przedziale skończonym $[0,A]$ $(A > 0)$ i mamy:

$$\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\mathsf{d}x = \operatorname{arctg}x|_0^A = \operatorname{arctg}(A).$$

Granica $\lim\limits_{A\to\infty} \operatorname{arctg}(A)$ istnieje i jest równa $\frac{\pi}{2}$, zatem

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

2. **Ważna całka niewłaściwa.** Zapytajmy, dla jakich wartości wykładnika α istnieje całka niewłaściwa

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x \quad (\text{tu} \quad a > 0). \tag{44}$$

Niech $\alpha \neq 1$. Wówczas

$$\int_a^A \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x = \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\ |_a^A = \frac{1}{1-\alpha}(A^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}).$$

Dla $A \to \infty$, prawa strona ma granicę ∞, gdy $1-\alpha > 0$, tzn. $\alpha < 1$, bądź $\frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$, gdy $\alpha > 1$. W przypadku pośrednim, tzn. gdy $\alpha = 1$, mamy

$$\int_a^A \frac{1}{x^\alpha}\mathsf{d}x = \ln x|_a^A = \ln A - \ln a \overset{A\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

zatem w tym przypadku całka jest rozbieżna.

Ostatecznie otrzymujemy, że całka niewłaściwa (44) jest **rozbieżna, gdy** $\alpha \leqslant 1$, i **zbieżna, gdy** $\alpha > 1$; w tym przypadku jej wartość wynosi $\frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$.

Zauważmy, iż mamy tu sytuację identyczną jak z szeregiem

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha};$$

szereg ten jest zbieżny dla $\alpha > 1$ oraz rozbieżny dla $\alpha \leqslant 1$. Nie jest to koincydencja przypadkowa.

3. *2. prędkość kosmiczna.* Weźmy dwa ciała o masach m oraz M. Przyciągają się one grawitacyjnie siła F, równą

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2}$$

(G – stała grawitacji). Zapytajmy, jaką pracę W trzeba wykonać, aby ciało przenieść od odległości wzajemnej r_0 do nieskończoności.

Mamy

$$W = \int_{r_0}^{\infty} F(r)\mathsf{d}r = GMm\int_{r_0}^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathsf{d}r = -GMm\left.\frac{1}{r}\right|_{r_0}^{\infty} = \frac{GMm}{r_0};$$

widać, że ta praca jest *skończona.*

Druga prędkość kosmiczna jest określona jako minimalną prędkość, którą należy nadać ciału na Ziemi, aby 'uciekło ono do nieskończoności', tzn. nigdy nie zaczęło spadać. Liczymy ją przyrównując energię potencjalną ciała w nieskończoności (tzn. obliczoną wyżej pracę W) oraz energię kinetyczną ciała na powierzchni Ziemi. Wstawiając stałe fizyczne, liczy się, że 2. prędkość kosmiczna (dla Ziemi) to 11.2 km/s.

Analogicznie jak w (43) definiujemy także całkę z funkcji f w przedziale $]-\infty, a]$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\mathsf{d}x = \lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{a} f(x)\mathsf{d}x \quad (\text{tu } A' < a), \tag{45}$$

oraz całkę po całej prostej rzeczywistej:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{d}x = \lim_{A'\to-\infty}\lim_{A\to\infty}\int_{A'}^{A} f(x)\mathsf{d}x. \tag{46}$$

3.2 Związek z podstawowym wzorem rachunku różniczkowego i całkowego

Załóżmy teraz, że całkowana funkcja f posiada funkcję pierwotną F w całym przedziale $[a,\infty[$ (pamiętamy, że będzie tak np. wtedy, gdy f jest ciągła). Wtedy na podstawie podstawowego tw. rach. różniczkowego i całkowego mamy

$$\int_{a}^{A} f(x)\mathsf{d}x = F(A) - F(a) = F(x)|_a^A.$$

Porównując to z wz. (43) widzimy, że całka niewłaściwa (43) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończona granica

$$\lim_{A\to\infty} F(A).$$

Granicę powyższą oznaczamy często $F(\infty)$.Możemy wtedy zapisać

$$\int_{a}^{\infty} f(x)\mathsf{d}x = F(\infty) - F(a) = F(x)|_a^{\infty}.$$

Mamy też analogicznie

$$\int_{-\infty}^{a} = F(x)|_{-\infty}^{a}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathsf{d}x = F(x)|_{-\infty}^{+\infty}.$$

Przykł.

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\mathsf{d}x,\ \ a>0$. Mamy: $F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$, skąd $F(\infty) = \lim\limits_{A\to-\infty} e^{-aA} = 0$, tak więc

$$\int_0^\infty e^{-ax}\mathsf{d}x = F(x)|_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

2. $\int_0^\infty \sin x \mathrm{d}x$. Funkcją pierwotną jest tu $-\cos x$,ale symbol $\cos x|_0^\infty$ jest bez sensu, bo nie istnieje granica $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$.

3. $\int_{2/\pi}^\infty \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \mathrm{d}x = \cos\frac{1}{x}\,|_{2/\pi}^\infty = 1$.

3.3 Całki niewłaściwe a szeregi

Pomiędzy całkami niewłaściwymi a szeregami istnieje szereg podobieństw, które teraz wyliczymy; wiele twierdzeń o całkach niewłaściwych jest prostym przeniesieniem analogonów z teorii szeregów.

SZEREGI	**CAŁKI**
Wyraz ogólny szeregu a_n	Funkcja podcałkowa $f(x)$
Suma częściowa szeregu $\sum_{n=1}^N a_n$	Całka właściwa $\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$
Suma szeregu $\sum_{n=1}^\infty a_n$ jako granica sumy częściowej dla $N\to\infty$	Całka niewłaściwa $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ jako granica całki właściwej dla $A\to\infty$
reszta szeregu $\sum_{n=N+1}^\infty a_n$	Całka niewłaściwa $\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x$

Poniższych twierdzeń dowodzi się albo przez niewielką modyfikację twierdzeń dla szeregów, albo przez proste rozszerzenie twierdzeń o całkach właściwych.

1. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to zbieżna jest też całka $\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x$ i na odwrót. Ponadto
$$\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x + \int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

2. Gdy całka $\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to zachodzi
$$\lim_{A\to\infty}\int_A^\infty f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

3. Jeśli zbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$, to zbieżna jest też całka $\int_a^\infty c\cdot f(x)\mathrm{d}x$ ($c=\mathrm{const.}$) i zachodzi
$$\int_a^\infty c\cdot f(x)\mathrm{d}x = c\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$$

4. Jeśli zbieżne są całki $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ i $\int_a^\infty g(x)\mathrm{d}x$, to zbieżna jest też całka $\int_a^\infty (f\pm g)(x)\mathrm{d}x$ i zachodzi
$$\int_a^\infty (f\pm g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x.$$

3.4 Zbieżność całki w przypadku funkcji nieujemnej

Jeśli funkcja $f(x)$ jest nieujemna, to całka
$$F(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \tag{47}$$
jest funkcją *niemalejącą* zmiennej A. Jeśli ponadto funkcja $F(A)$ jest ograniczona, tzn. $\exists_C\forall_x$: $F(x)\leqslant C$, to $F(X)$ posiada granicę, gdy $A\to\infty$, a to znaczy, że całka (47) *jest*

zbieżna. W oczywisty sposób, warunek ten jest też warunkiem *koniecznym* zbieżności; gdy nie jest on spełniony, to całka (47) jest rozbieżna.

Wykorzystując powyższy fakt, dowodzi się, że ma miejsce następujące

Tw. Jeśli dla wszystkich $x \in [a, \infty[$ zachodzi nierówność: $f(x) \leqslant g(x)$, to ze zbieżności całki $\int_a^\infty g(x)\mathsf{d}x$ wynika zbieżność całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$; i na odwrót: z rozbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ wynika rozbieżność całki $\int_a^\infty g(x)\mathsf{d}x$.

Dow. jest analogiczny jak w przypadku tw. porównawczego dla szeregów – należy tylko wszędzie zamienić "sumę" na "całkę".

CBDO

Kryterium to jest ogólne/ogólnikowe: Skuteczność w jego stosowaniu zależy od tego, czy uda się w danym problemie znaleźć dostatecznie dobry, a jednocześnie wyliczalny 'ogranicznik', pozwalający oszacować badaną funkcję całkowaną od góry lub od dołu. Wybierając konkretne funkcje do porównań, możemy otrzymać bardziej szczegółowe kryteria zbieżności/rozbieżności całek. Często do porównań bierze się funkcję $\frac{1}{x^\alpha}$ (jak pamiętamy, całka z tej funkcji jest zbieżna dla $\alpha > 1$ i rozbieżna dla $\alpha \leqslant 1$). Z porównania z funkcją $\frac{1}{x^\alpha}$, otrzymuje się następujące *kryteria Cauchy'ego*:

Tw. Niech funkcja $f(x)$ ma dla dostatecznie dużych x postać

$$f(x) = \frac{\phi(x)}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Wtedy:

1. Jeśli $\alpha > 1$ i $\phi(x)$ jest ograniczona, tzn. $\exists_{C<\infty}\forall_x$: $\phi(x) \leqslant C$, to całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna;

2. jeśli $\alpha \leqslant 1$ i $\phi(x) \geqslant c > 0$, to całka jest rozbieżna.

Dow.

1. Tu bierzemy do porównania funkcję $g(x) = \frac{C}{x^\alpha}$; mamy: $f(x) \leqslant g(x)$ i wiemy, że $g(x)$ jest całkowalna dla $\alpha > 1$, co dowodzi zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

2. Tu bierzemy do porównania $g(x) = \frac{c}{x^\alpha}$. Zachodzi: $f(x) \geqslant g(x)$, całka z $g(x)$ jest rozbieżna, więc też rozbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Przykł.

1. Zbadajmy zbieżność całki

$$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2}\mathsf{d}x$$

CZEGO SIĘ SPODZIEWAMY? Zbadajmy zachowanie funkcji podcałkowej dla dużych x. Licznik mamy gotowy: Zachowuje się on jak $x^{\frac{3}{2}}$. Mianownik zaś dla dużych x zachowuje się jak x^2 (tzn. granica $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$). Zatem funkcja podcałkowa dla dużych x zachowuje się jak $x^{\frac{3}{2}-2} \sim x^{-\frac{1}{2}}$, a całka z takiej funkcji jest *rozbieżna*.

Potwierdźmy te nasze spodziewania dokładniejszym oszacowaniem. Zamiast całki $\int_0^\infty$ zbadajmy całkę $\int_1^\infty$; taka zmiana przedziału nie ma wpływu na zbieżność. Mamy:

$$\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} = \frac{(x^2)^{\frac{3}{4}}}{1+x^2} \geqslant \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{4}}}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}} \overset{\text{dla } x\geqslant 1}{\geqslant} \frac{1}{(x^2+x^2)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}\sqrt{x}},$$

a $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\mathsf{d}x$ jest rozbieżna, więc rozbieżna jest też całka wyjściowa.

2. Zbadajmy zbieżność całki

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

CZEGO SIĘ SPODZIEWAMY? W liczniku mamy 1. Spójrzmy na mianownik: Zacznijmy od funkcji $\sqrt{1+x^2}$, która dla dużych x zachowuje się jak x (znowu: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = 1$. Zatem cały mianownik zachowuje się jak $x^{1+2} \sim x^3$, zaś całka $\int_a^\infty x^{-3}\mathrm{d}x$ jest *zbieżna*.

Spodziewamy się więc zbieżności i potwierdźmy to dokładniejszym oszacowaniem. Tu oszacujmy w drugą stronę, niż w poprzednim przykładzie:

$$\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}} \leqslant \frac{1}{x^3},$$

i ponieważ $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to zbieżna jest też całka wyjściwa.

3.5 Zbieżność bezwzględna

Wróćmy do badania zbieżności całek w przypadku ogólnym (tzn. niekoniecznie dla nieujemnych funkcji podcałkowych). Jak pamiętamy, zagadnienie zbieżności całki niewłaściwej $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ sprowadza się do rozstrzygnięcia, czy istnieje skończona granica funkcji $\Phi(A)$ dla $A \to \infty$, gdzie

$$\Phi(A) = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x \tag{48}$$

Przypomnijmy sobie najsampierw warunek Cauchy'ego[3] zbieżności szeregu $a_1 + a_2 + \ldots$. Oznaczmy przez $\{s_n\}$ ciąg jego sum częściowych. Warunek B-C mówi zbieżności szeregu mówi, iż

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{m,m'\in\mathbb{N}} : |s_m - s_{m'}| < \epsilon,$$

Warunek ten ma swój bezpośredni odpowiednik w postaci warunku istnienia całek niewłaściwych. Można go sformułować następująco:

Tw. Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności całki $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ jest, aby

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{A_0>a}\forall_{A,A'>A_0} : |\Phi(A') - \Phi(A)| = |\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x| < \epsilon,$$

gdzie $\Phi(A)$ jest dane przez (48).

CBDO

Korzystając z powyższego warunku, łatwo udowodnimy twierdzenie (mające analog dla szeregów: Jeśli szereg jest bezwzględnie zbieżny to jest zbieżny):

Tw. Jeżeli całka $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to jest zbieżna też całka $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$.

Uwaga. W takim przypadku mówimy, że całka $\int_a^\infty f(x)\mathrm{d}x$ jest *bezwzględnie* zbieżna. (Znów analogia z szeregami!)

Dow. Stosując powyższe kryterium do całki $\int_a^\infty |f(x)|\mathrm{d}x$ (o której zakładamy, że jest zbieżna) mamy: Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje takie $A_0 > a$, że dla $A' > A > A_0$ zachodzi

$$\int_A^{A'} |f(x)|\mathrm{d}x < \epsilon;$$

ale mamy też:

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \int_A^{A'} |f(x)|\mathrm{d}x \quad \text{co znaczy, że} \quad \left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \epsilon$$

[3]Zwany też gdzieniegdzie warunkiem Bolzano-Cauchy'ego

a to oznacza, że zbieżna jest całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$.

CBDO

Tw. Jeśli całka $\int_a^\infty f(x)\mathsf{d}x$ jest zbieżna bezwzględnie, a funkcja $g(x)$ jest ograniczona (tzn. dla dowolnego x: $|g(x)| \leqslant C$), to całka $\int_a^\infty f(x)\cdot g(x)\mathsf{d}x$ też jest bezwzględnie zbieżna.

Dow. Wystarczy oszacować:

$$|f(x) \cdot g(x)| \leqslant C \cdot |f(x)|$$

i skorzystać z kryterium porównawczego.

CBDO

Przykł. Rozważmy całkę:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{k^2 + x^2}\mathsf{d}x, \quad k \neq 0.$$

Funkcja $\frac{1}{k^2+x^2}$ jest całkowalna (całka z tej funkcji jest oczywiście bezwzględnie zbieżna), zaś funkcja $\cos ax$ jest ograniczona; zatem powyższa całka jest bezwzględnie zbieżna.

3.6 Przykłady

Posiłkując się omówionymi wyżej kryteriami, bądź jawnymi wyliczeniami, rozstrzygnijmy teraz zbieżność następujących całek:

1. $$\int_0^\infty xe^{-x}\mathsf{d}x.$$

   Odp. Całka jest zbieżna – wyliczalna – oblicza się ją całkując przez części. Jej wartość wynosi 1.

2. $$\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathsf{d}x.$$

   Odp. j.w., tylko trzeba scałkować przez części n razy. Wartość całki wynosi $n!$.

3. Zdefiniujmy poniżej funkcję $\Gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) jako całkę zależną od parametru:

   $$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\mathsf{d}x, \quad s > 1.$$

   Odp. Całka jest zbieżna. Funkcję podcałkową szacuje się z wykorzystaniem nierówności $x^s \leqslant x^{[s]+1}$, z wykorzystaniem zbieżności całki z poprzedniego punktu.

   Uwaga. Funkcja $\Gamma(s)$ znana jest jako *funkcja gamma Eulera*; jest ona ważną funkcją nieelementarną. Można ją zdefiniować dla dziedziny znacznie większej niż powyżej. Zauważmy, że: $\Gamma(n + 1) = n!$ (por. poprzedni przykład), można więc funkcję $\Gamma(s)$ uważać jako rozszerzenie silni na argumenty niecałkowite.

4. $$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1} + 5x}{x^2 + 2x + 7}\mathsf{d}x.$$

   Odp. Funkcja podcałkowa daje się przedstawić w postaci $\phi(x) \cdot x^{4/3-2} = \phi(x) \cdot x^{-2/3}$, gdzie $\phi(x)$ to funkcja ograniczona, ostro większa od zera. Zatem z kryt. porównawczego w postaci Cauchy'ego całka jest *rozbieżna*.

5.
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} \mathsf{d}x.$$

Odp. Rozb.

6.
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\lambda} \mathsf{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Odp. Zbieżna dla $\lambda > 1$, rozbieżna dla $\lambda \leqslant 1$.

7.
$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda} \mathsf{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Odp. Zbieżna dla $\lambda > 1$, rozbieżna dla $\lambda \leqslant 1$.

3.7 Zadania

Posiłkując się różnymi kryteriami, bądź jawnymi wyliczeniami (jeśli nie będzie to wymagało dużego nakładu pracy), rozstrzygnąć zbieżność następujących całek:

1.
$$\int_0^\infty x e^{-x} \mathsf{d}x.$$

2.
$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \mathsf{d}x, \quad a > 0.$$

3. Zdefiniujmy poniżej funkcję $\Gamma(s)$ ($s \in \mathbb{R}$) jako całkę zależną od parametru. Rozstrzygnąć czy poniższa definicja jest z sensem, tzn. czy całka jest zbieżna.
$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} \mathsf{d}x, \quad s > 1.$$

4.
$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x^4 + x^2 + 1} + 5x}{x^2 + 2x + 7} \mathsf{d}x.$$

5.
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} \mathsf{d}x.$$

6.
$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^\lambda} \mathsf{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

7.
$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^\lambda} \mathsf{d}x, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda > 0.$$

Uwaga. Powyższe całki były robione na wykładzie.

8.
$$\int_0^\infty (x^5 + 3x^2 + 7) e^{-x^2} \mathsf{d}x.$$

9.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+x+1}\mathsf{d}x.$$

10.
$$\int_1^\infty \frac{\ln^2 x e^{-x}}{x+5}\mathsf{d}x.$$

11.
$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x^5+x^3+11x+2}+5x}{x^3+12x+7}\mathsf{d}x.$$

12.
$$\int_1^\infty \frac{\ln^3 x}{x}\mathsf{d}x.$$

13.
$$\int_1^\infty \frac{\ln^3 x}{x^{\sqrt{2}}}\mathsf{d}x.$$

14.
$$\int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x^\lambda}\mathsf{d}x, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ \ \lambda>0.$$

15.
$$\int_1^\infty \frac{\ln x \operatorname{arctg} x}{x^\lambda}\mathsf{d}x, \quad \lambda\in\mathbb{R},\ \ \lambda>0.$$

16.
$$\int_{10}^\infty \frac{1}{\ln(\ln x)}\mathsf{d}x.$$

17.
$$\int_0^\infty \frac{2^x+x+\sin x}{3^x+5x^2+7}\mathsf{d}x.$$

18.
$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{x^3+x^2+x+1}\mathsf{d}x, \quad k\in\mathbb{R}.$$

19.
$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos kx}{x^2+x+1}\mathsf{d}x, \quad k\in\mathbb{R}.$$

20.
$$\int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}(a+x)}\mathsf{d}x, \quad a>0.$$

21.
$$\int_0^\infty x^\mu e^{-ax}\cos x\mathsf{d}x, \quad \mu>0,\ a>0.$$

22.
$$\int_0^\infty \frac{x^2\ \cos x}{e^x+e^{-x}}\mathsf{d}x.$$