# 1 Przypomnienia i definicje, i wyjście trochę poza nie

## 1.1 Grupa

**Def.** *Grupą* $G, \circ$ nazywamy zbiór $G$ z działaniem $\circ$ (operacją dwuargumentową): $G \times G \ni (g_1, g_2) \to g_1 \circ g_2 \in G$, spełniających warunki:

- Istnieje w $G$ element neutralny $e$, spełniający warunki: $\forall g \in G: \ g \circ e = e \circ g = g$;
- Dla każdego elementu $g \in G$ istnieje element odwrotny $g^{-1}$, spełniający: $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$;
- Działanie $\circ$ w grupie jest *łączne*, tzn. dla dowolnych $g_1, g_2, g_3 \in G$ zachodzi:

$$g_1 \circ (g_2 \circ g_3) = (g_1 \circ g_2) \circ g_3.$$

**Def.** Jeśli ponadto dla dowolnych $g_1, g_2 \in G$ zachodzi: $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, to grupę nazywamy *przemienną* (*abelową*).

**Przykł.**

1. Zbiór liczb całkowitych z dodawaniem $\mathbb{Z}, +$ jest grupą (abelową). Elementem neutralnym jest 0, a elementem odwrotnym do $x \in \mathbb{Z}$ jest $-x$.
2. Zbiór liczb $\mathbb{R} \setminus 0$ z działaniem mnożenia jest grupą (też abelową). Elementem neutralnym jest 1, a elementem odwrotnym do $x \in \mathbb{R}$ jest $\frac{1}{x}$.
3. Zbiór liczb $\{0, 1\}$ z dodawaniem modulo 2 stanowi też grupę (abelową). Zwana jest $\mathbb{Z}_2$. Dla ilustracji wypiszmy jawnie wszystkie możliwe operacje w tej grupie: $0+0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 0$. Elementem neutralnym jest 0. Elementem odwrotnym do 0 jest 0, a elementem odwrotnym do 1 jest 1. Grupa $\mathbb{Z}_2$ jest *skończona*, tzn. ilość jej elementów jest skończona; w dwu poprzednich przykładach tak nie było.

Wszystkie powyższe grupy były *abelowe*. Przykład grupy nieabelowej za jakiś czas poznamy, (uprzedzając wypadki, dla ciekawych i niecierpliwych: Nieabelowe są grupy permutacji $S_n$ zbioru $n-$elementowego dla $n > 2$; niedługo o nich powiemy) ale na razie jak najszybciej chcemy przejść do wektorów.

## 1.2 Przestrzeń wektorowa, liniowa niezależność, baza

### 1.2.1 Przestrzeń wektorowa

**Def.** *Przestrzenią wektorową* $V$ nad ciałem $\mathbb{K}$ nazywamy zbiór $V$ z dwoma działaniami:

- 'wewnętrznym' $V \times V \to V$, zapisywanym zazwyczaj jako dodawanie (*dodawanie wektorów* $\mathbf{v}$ oraz $\mathbf{w}$): $V \times V \ni (\mathbf{v}, \mathbf{w}) \to \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$, oraz
- 'zewnętrznym' $\mathbb{K} \times V$, zapisywanym zazwyczaj jako mnożenie (*mnożenie wektora $v$ przez liczbę $\alpha$*): $K \times V \ni (\alpha, \mathbf{v}) \to \alpha \cdot \mathbf{v} \in V$.

To nie koniec definicji, bo zakładamy, że są spełnione następujące aksjomaty:

1. Dodawanie elementów przestrzeni $V$ (tzn. *wektorów*) wprowadza w $V$ strukturę grupy abelowej. Element zerowy tej grupy jest zazwyczaj oznaczany przez $\mathbf{0}$, a element odwrotny do $\mathbf{v}$ jest oznaczany przez $-\mathbf{v}$.

2. Mnożenie wektorów przez elementy ciała $\mathbb{K}$ (zwane często *skalarami*) spełnia warunki: $1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ dla każdego $\mathbf{v} \in V$, oraz jest łączne, tzn. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} \in V$.

3. Dodawanie i mnożenie spełniają prawa rozdzielności:
$$\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}, \qquad (\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$$
dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$.

**Przykłady**

1. Przykład kanoniczny: $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ ($n$ razy) – iloczyn kartezjański $n$ egzemplarzy ciała $\mathbb{K}$. (W dalszym ciągu będziemy używać jedynie ciał $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.) Dodawanie wektorów i mnożenie wektora przez liczbę definiujemy analogicznie jak w przypadku trójwymiarowym:
$$\text{Dla } \ v = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix}$$
$$\text{mamy}: \quad v + w = \begin{bmatrix} v^1 + w^1 \\ v^2 + w^2 \\ \vdots \\ v^n + w^n \end{bmatrix} \text{oraz} \quad \alpha v = \begin{bmatrix} \alpha v^1 \\ \alpha v^2 \\ \vdots \\ \alpha v^n \end{bmatrix}$$
*Uwaga*: $v^k$ oznacza tu $k-$tą składową wektora $v$, a nie $k-$tą potęgę $v$ ! Okazuje się, że numerowanie warto prowadzić na dwa sposoby: Dla jednego rodzaju obiektów indeksy (numery) piszemy *z prawej strony na górze* (tu robimy to dla składowych wektorów), a dla drugiego (numery elementów bazy) piszemy *na dole*. Niedługo się okaże, dlaczego warto robić takie rozróżnienie.

2. $C([a, b])$ – przestrzeń funkcji ciągłych na odcinku $[a, b]$. Mając dane dwie funkcje $f, g \in C([a, b])$ (tzn. patrzymy na funkcje $f, g$ jako na wektory), definiujemy ich sumę jako funkcję $f + g$, której wartość w dowolnym punkcie $x$ jest:
$$(f + g)(x) = f(x) + g(x);$$
oraz mnożenie wektora $f$ przez liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ jest funkcją $\lambda f$, której wartość w dowolnym punkcie $x$ określamy jako:
$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

3. $\mathbb{K}_n[\cdot]$ – przestrzeń wielomianów stopnia *nie większego niż* $n$ o współczynnikach z ciała $\mathbb{K}$. Dodawanie wielomianów oraz mnożenie ich przez liczbę definiujemy analogicznie jak dla funkcji.

4. Niech $\tilde{V}^{(n)}$ – zbiór wielomianów stopnia *dokładnie* $n$. Czy $\tilde{V}^{(n)}$ jest przestrzenią wektorową? **Odp.** NIE. Rozważmy dwa wielomiany $v = x^n + 1 \in \tilde{V}^{(n)}$, $w = -x^n \in \tilde{V}^{(n)}$. Natomiast ich suma *nie jest* wielomianem stopnia $n$: $v + w = 1 \notin \tilde{V}^{(n)}$.

### 1.2.2 Kombinacja liniowa, liniowa niezależność

**Def.** *Kombinacją liniową* wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ z współczynnikami $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nazywamy wektor

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n$$

**Def.** Układ wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ nazywamy *liniowo niezależnym*, gdy równość

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

zachodzi tylko dla współczynników *zerowych*: $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$.

**Przykł. Def.** Mówimy, że przestrzeń wektorowa $V$ ma *wymiar* $n$, gdy każdy układ $n+1$ wektorów z $V$ jest liniowo zależny, zaś istnieją w $V$ układy $n$ wektorów liniowo niezależnych.

Wymiar przestrzeni $V$ oznaczamy $\dim V$ (od ang. *dimension*).

### 1.2.3 Baza

**Def.** *Bazą* w przestrzeni wektorowej wymiaru $n$ nazywamy układ $n$ wektorów liniowo niezależnych.

**Przykł.** (kontynuacja powyższych)

1. Przestrzeń $\mathbb{K}^n$ ma wymiar $n$. Jako bazę można w niej wybrać $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

   (tzn. w wektorze $e_k$ na $k-$tym miejscu mamy 1, pozostałe składowe są zerowe). Wymiar przestrzeni $\mathbb{K}^n$ wynosi $n$.

2. $\dim C([0,1]) = \infty$. Na tej konstatacji poprzestaniemy. Bazę można wybrać, ale wymaga to dużego wkładu z analizy, wychodzącego poza ramy tego wykładu.

3. $\dim \mathbb{K}_n[\cdot] = n+1$. Bo: Z tego co ongiś mówiliśmy o wielomianach, pamiętamy, że wielomian jest określony jednoznacznie przez podanie swoich współczynników (przy potęgach $t$ od 0 do $n$ – zakładamy, że mamy wielomiany od zmiennej $t$). Jako bazę można wybrać: $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2, \ldots, e_n = t^n$. Korzystając z tego, zinterpretujmy w języku wektorowym wzór na sumę wielomianów: Niech $\mathbf{v} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{K}_n[\cdot]$, $\mathbf{w} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n \mathbb{K}_n[\cdot]$. Wtedy wartość wielomianu $v + w$ w punkcie $x$ jest: $(\mathbf{v} + \mathbf{w})(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n$.

Ale! W przykładach 1. i 3. bazy można powybierać inaczej. Weźmy np. $V = \mathbb{R}^3$. Mamy tu bazę standardową:

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

ale w niczym nie gorszy jest wybór:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sprawdźmy, że jest to baza: Równość

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = \mathbf{0}$$

jest równoważna układowi równań:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

który ma jedyne rozwiązanie

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

### 1.2.4 Podprzestrzeń wektorowa

**Def.** Niech będzie dany podzbiór $W$ przestrzeni wektorowej $V$ (dokładniej, $(V, \mathbb{K})$: $W \subset V$ Mówimy, że $W$ jest *podprzestrzenią* $V$, gdy sam jest przestrzenią wektorową, tzn. gdy, dla dowolnych $u, w \in W$, $\alpha \in \mathbb{K}$ zachodzi: $u + w \in W$, $\alpha w \in W$.

*Uwaga.* Podprzestrzeniami $V$ są zawsze: $\mathbf{0} \in V$ oraz cała przestrzeń $V$.

**Przykłady.**

1. Niech $V = \mathbb{R}^n$. Zbiór wektorów $W$, których pierwsza ze składowych jest równa zeru, jest podprzestrzenią $V$. Bo: Niech $\mathbf{u}, \mathbf{w} \in W$. Mamy, dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}^n$:

$$\lambda \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda u^2 \\ \vdots \\ \lambda u^n \end{bmatrix} \in W; \qquad \mathbf{w} + \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ u^2 \\ \vdots \\ u^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ u^2 + w^2 \\ \vdots \\ u^n + w^n \end{bmatrix} \in W.$$

2. Niech $V = \mathbb{R}^n$. Zbiór wektorów $W$, których pierwsza ze składowych jest równa 1, *nie* jest podprzestrzenią $V$. Bo: Gdy jakiś $\mathbf{w} \in W$ pomnożymy przez liczbę $\lambda \neq 1$, to pierwsza składowa $\lambda \mathbf{w}$ będzie równa $\lambda$, zatem $\lambda \mathbf{w} \notin W$.

3. Niech $V = C(\mathbb{R})$, i niech $P$ będzie zbiorem funkcji *parzystych*, tzn. spełniających $f(-x) = f(x)$. Łatwo zobaczyć, że $P$ *jest* podprzestrzenią wektorową $V$ (bo suma funkcji parzystych jest funkcją parzystą, oraz iloczyn funkcji parzystej przez liczbę jest dalej funkcją parzystą).

4. Analogicznie, zbiór funkcji *nieparzystych*, tzn. spełniających $f(-x) = -f(x)$ dla dowolnego $x$, jest podprzestrzenią $C(\mathbb{R})$.

5. Niech $V = \mathbb{R}^3$. Każdy $\mathbf{v} \in V$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – zadane liczby. Niech $W$ będzie zbiorem tych $\mathbf{w} \in V$, dla których zachodzi równość

$$\alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 = 0. \tag{2}$$

Zauważmy, że można patrzeć na równanie (2) jako na *układ 1. równania na 3. zmienne*. Łatwo stwierdzić, że $W$ *jest* podprzestrzenią $V$. Niech bowiem $\mathbf{w} \in W$; mamy więc dla $\mathbf{w}$ spełniony warunek (2). Pomnóżmy tę równość przez $\lambda \in \mathbb{R}$. Mamy

$$0 = \lambda(\alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3) = \alpha_1(\lambda w^1) + \alpha_2(\lambda w^2) + \alpha_3(\lambda w^3),$$

czyli również dla składowych wektora $\lambda\mathbf{w}$ spełniony jest warunek (2), a to znaczy, że wektor $\lambda\mathbf{w} \in W$.
Podobnie, jeśli $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{w} \in W$, tzn.

$$\alpha_1 w^1 + \alpha_2 w^2 + \alpha_3 w^3 = 0, \qquad \alpha_1 u^1 + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 = 0,$$

to dodając obie równości stronami dostaniemy równość

$$\alpha_1(u^1 + w^1) + \alpha_2(u^2 + w^2) + \alpha_3(u^3 + w^3) = 0,$$

co znaczy, że $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$.
Z geometrycznego punktu widzenia możemy utożsamić wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (1) z punktem o współrzędnych $(v^1, v^2, v^3)$ w $\mathbb{R}^3$. Zbiór rozwiązań równania (2) jest – z geometrycznego punktu widzenia – *płaszczyzną* w $\mathbb{R}^3$, przechodzącą przez środek układu współrzędnych. (Tak jest w typowym przypadku, gdy przynajmniej jeden ze współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest niezerowy. Gdy wszystkie są zerowe, to zbiorem rozwiązań jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^3$; ale nie psuje to faktu bycia podprzestrzenią $\mathbb{R}^3$).

6. Niech teraz będą zadane 6 liczb $\{\alpha_{ij}\}$ $(i = 1, 2,\ j = 1, 2, 3)$, które ułóżmy w tablicę:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{bmatrix}$$

Niech znowu $W$ będzie zbiorem tych wektorów $\mathbf{w} \in V$, których składowe $w^1, w^2, w^3$ spełniają układ równań (2 równania na 3 niewiadome):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_{11} w^1 + \alpha_{12} w^2 + \alpha_{13} w^3 & = & 0 \\ \alpha_{21} w^1 + \alpha_{22} w^2 + \alpha_{23} w^3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{3}$$

Analogicznie jak poprzednio, możemy sprawdzić, że *jeżeli* $\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{w} \in W$, *to również* $\lambda\mathbf{u} \in W$, $\mathbf{u} + \mathbf{w} \in W$, tzn. że $W$ *jest podprzestrzenią* $V$
Czym jest geometrycznie zbiór rozwiązań układu (3)? Zbiór rozwiązań każdego z równań jest (w typowym przypadku) *płaszczyzną*. Układ (3) jest warunkiem należenia punktu do *obu* płaszczyzn – a więc do ich *przecięcia*; przecięcie zaś (tzn. część wspólna) jest na ogół *prostą*. (Znowu: Nie musi tak być zawsze. Gdy oba równania definiują tę samą płaszczyznę, to przecięcie jest tą samą płaszczyzną. Lecz znowu, nie psuje to faktu bycia podprzestrzenią).

7. Poprzednie dwa przykłady łatwo się rozszerzają na przypadek ogólny: Weźmy układ $m$ równań liniowych na $n$ niewiadomych $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, o prawej stronie równej

zeru. Taki układ nazywamy *układem jednorodnym.*
Konkretnie: Mamy dany zbiór $n \times m$ liczb $\alpha^i_j$ – współczynników układu. Ustawmy je w tablicę:

$$\begin{bmatrix} \alpha^1_1 & \alpha^1_2 & \dots & \alpha^1_n \\ \alpha^2_1 & \alpha^2_2 & \dots & \alpha^2_n \\ . & . & \dots & . \\ \alpha^m_1 & \alpha^m_2 & \dots & \alpha^m_n \end{bmatrix}$$

Tę tablicę nazywamy czasem *macierzą* układu.
Traktujmy zbiór niewiadomych jako element $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}$$

Układ równań ma postać:

$$\begin{bmatrix} \alpha^1_1 x^1 + \alpha^1_2 x^2 + \dots + \alpha^1_n x^n & = & 0 \\ \alpha^2_1 x^1 + \alpha^2_2 x^2 + \dots + \alpha^2_n x^n & = & 0 \\ . & . & \dots \\ \alpha^m_1 x^1 + \alpha^m_2 x^2 + \dots + \alpha^m_n x^n & = & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Mamy proste
**Stw.** Zbiór rozwiązań układu jednorodnego (4) jest podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^n$.

### 1.2.5 Podprzestrzenie – drugi sposób opisu

Powyższe Stwierdzenie daje jeden sposób opisu podprzestrzeni.

Istnieje też drugi ważny sposób opisu podprzestrzeni – przez *generatory.*

**Def.** Niech $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \mathbf{v}_n\}, \mathbf{v}_k \in V$ – zbiór wektorów należących do przestrzeni $V$. *Powłoką liniową* powyższego układu wektorów jest zbiór *wszystkich* kombinacji liniowych $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n$ (tzn. zbiór wektorów powyższej postaci, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ są dowolnymi współczynnikami).

Powłokę liniową układu wektorów oznaczamy $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$. Wektory $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ nazywamy *generatorami* powłoki liniowej. (Mówimy też na nie: *wektory generujące*, lub *wektory rozpinające* powłokę).

Mamy (raczej) oczywiste

**Stw.** Powłoka liniowa układu wektorów $W = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n \rangle$ jest podprzestrzenią liniową.

**Dow.** Istotnie: Jeśli $\mathbf{x} \in W, \mathbf{y} \in W$, to są one kombinacjami liniowymi wektorów $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$; tak więc też$\mathbf{x} + \mathbf{y}$ też jest kombinacją liniową wektorów generujących, a więc elementem zbioru *wszystkich* kombinacji liniowych.

Podobnie, jeśli $\mathbf{x} \in W$, to $\mathbf{x}$ jest liniową kombinacją generatorów, a wektor $\lambda\mathbf{x}$ – tak samo, więc również $\mathbf{x} \in W$.

**CBDO**

### 1.2.6 Uproszczenia sposobów opisu

Wiemy, że powłoka liniowa układu wektorów jest podprzestrzenią liniową. Czasem jednak potrzebujemy większej ilości szczegółów. Weźmy taki typowy problem:

**Problem 1.** Znaleźć wymiar i podać jakąś bazę podprzestrzeni, generowanej przez układ wektorów

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Można też postawić analogiczny problem dla podprzestrzeni, generowanej przez układ równań:

**Problem 2**. Znaleźć wymiar i podać możliwie prosty opis podprzestrzeni, zadanej przez układ równań o macierzy:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & -7 \\ 5 & 1 & -5 & 4 \end{bmatrix}.$$

### 1.2.7 Redukcja (wierszowa i kolumnowa) jako sugerowana metoda wyliczeń

Zajmijmy się najsampierw jednorodnymi układami równań, do rozwiązywania których stosujemy redukcję wierszową.

Przy rozwiązywaniu układu równań liniowych, jedna z metod to dodawanie równań stronami, aby otrzymać prostsze (lub o bardziej pożądanej postaci) równanie. Metoda redukcji to pewne sformalizowanie i usystematyzowanie tej procedury – tak, by po kolejnym jej stosowaniu otrzymać możliwie prostą macierz układu. Wykorzystujemy tu oczywisty fakt, że dodając do jakiegoś równania kombinację liniową pozostałych równań, otrzymujemy układ równoważny, tzn. mający te same rozwiązania.

Z formalnego punktu widzenia, redukcja wierszowa jest kombinacją następujących *operacji elementarnych*, z których każda w oczywisty sposób nie zmienia rozwiązań układu:

1. Mnożenie wiersza przez niezerową stałą.
2. Dodawanie jednego wiersza do drugiego.
3. Przestawianie dwóch wierszy.

### 1.2.8 Suma i przecięcie podprzestrzeni

Niech $V$ – przestrzeń wektorowa, $U, W$ – podprzestrzenie $V$.

**Def.** *Sumą algebraiczną* podprzestrzeni $U, W$ (ozn. $U+W$) nazywamy zbiór wszystkich możliwych sum wektorów z $U$ i $W$:

$$U + W = \{\mathbf{s} : \mathbf{s} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \mathbf{w} \in W\}. \tag{5}$$

*Uwaga.* Suma algebraiczna na ogół różni się od sumy mnogościowej! Np. suma algebraiczna dwóch nie pokrywających się podprzestrzeni jednowymiarowych (prostych) to *płaszczyzna* rozpięta przez te proste, zaś suma mnogościowa to po prostu dwie przecinające się proste.

**Def.** *Przecięciem* dwóch podprzestrzeni $U, W$ (ozn. $U \cap W$) nazywamy zbiór wektorów należących jednocześnie do jednej *i* drugiej podprzestrzeni:

$$U \cap W = \{\mathbf{s} : \mathbf{s} \in U \quad i \quad \mathbf{s} \in W\}. \tag{6}$$

### 1.2.9 Przykłady wyliczeń sum i przecięć podprzestrzeni

### 1.2.10 Wzór wiążący wymiary podprzestrzeni oraz ich sumy i przecięcia

**Tw.** Niech $U, W$ – podprzestrzenie (skończenie wymiarowej) przestrzeni wektorowej $V$. Zachodzi następująca relacja między wymiarami $\dim U$, $\dim W$, $\dim(U+W)$ oraz $\dim(U \cap W)$:

$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W) \tag{7}$$

**Dow.** W podprzestrzeniach $U$, $W$ oraz ich przecięciu można w następujący sposób wprowadzić bazy:

- $s_1, \ldots, s_k$ – baza w $U \cap W$;
- $s_1, \ldots, s_k, u_1, \ldots, u_m$ – baza $U$;
- $s_1, \ldots, s_k, w_1, \ldots, w_n$ – baza $W$.

Zauważmy, że wtedy $s_1, \ldots, s_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ stanowi bazę w $U + W$. Bowiem: Powyższy układ wektorów generuje $U + W$. Ponadto, *jest liniowo niezależny.* Załóżmy że jest przeciwnie. Wówczas w równaniu

$$\lambda^1 s_1 + \cdots + \lambda^k s_k + \mu^1 u_1 + \cdots + \mu^m u_m + \underbrace{\nu^1 w_1 + \cdots + \nu^n w_n}_{\mathbf{w}} = \mathbf{0}. \tag{8}$$

któreś ze współczynników $\lambda_i, \mu_j, \nu_l$ są różne od zera.

A dokładniej, muszą być różne od zera któreś ze współczynników zarówno $\mu_j$ jak i $\nu_l$. W innym bowiem przypadku otrzymalibyśmy nietrywialną zależność liniową (tzn. brak liniowej niezależności) dla elementów bazy $U$ lub $W$.

Wobec tego niezerowy wektor $\mathbf{w} = \sum_j \nu^j w_j \in W$ należy także do $U$, gdyż można (z równości (8) przedstawić go w postaci: $\mathbf{w} = -(\sum_i \lambda^i s_i + \sum_k \mu^k u_k)$. Skoro $\mathbf{w} \in U$, $\mathbf{w} \in W$, to należy też do przecięcia: $\mathbf{w} \in U \cap W$, jest zatem kombinacją liniową wektorów $s_1, \ldots, s_k$. A to znaczy, że istnieje nietrywialna zależność liniowa dla układu wektorów $s_1, \ldots, s_k, w_1, \ldots, w_j$ (tzn. zachodzi równość:

$$\lambda^1 s_1 + \cdots + \lambda^k s_k + \nu^1 w_1 + \cdots + \nu^n w_n = \mathbf{0}$$

z pewnymi współczynnikami $\lambda_i$ oraz $\nu_l$ różnymi od zera), co jest sprzeczne z założeniem, że stanowią one bazę w $W$.

Pokazaliśmy więc, że wektory $s_1, \ldots, s_k, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ stanowią bazę w $U+W$. Policzmy teraz wymiar $U + W$. Niech $k = \dim(U \cap W)$; wtedy $\dim U = k + m$, $\dim W = k + n$, $\dim(U + W) = k + m + n$. Napiszmy liczbę $k + m + n$ w postaci: $k + m + n = (k+n) + (k+m) - k$, co przepisujemy jako: $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$, a to jest dokładnie wzór (7).

**CBDO**

## 1.3 Rozkład wektora w bazie

Mamy proste ale ważne

**Stw.** Niech w przestrzeni wektorowej $V$ będzie zadana baza $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Wtedy każdy wektor $v \in V$ ma jednoznaczny rozkład w bazie $e$:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 + \cdots + v^n e_n, \tag{9}$$

tzn. współczynniki $v^1, v^2, \dots, v^n$ są jednoznacznie wyznaczone.

**Dow.** Załózmy, że rozkład $v$ nie jest jednoznaczny, tzn. że istnieje rozkład identyczny jak (9), tyle że z innymi współczynnikami:

$$v = s^1 e_1 + s^2 e_2 + \cdots + s^n e_n; \tag{10}$$

odejmijmy stronami (9) i (10). Mamy:

$$(s^1 - v^1)e_1 + (s^2 - v^2)e_2 + \cdots + (s^n - v^n)e_n = \mathbf{0}. \tag{11}$$

Ale jeżeli któryś ze współczynników $s^k$ ma być różny od któregoś ze współczynników $v^k$, to $s^k - v^k \neq 0$, czyli jeśli któryś ze współczynników równości (11) jest niezerowy. A to oznacza sprzeczność z założeniem o liniowej niezależności $e$.

**CBDO**

**Ozn.** Często przydatne jest zaznaczanie, w jakiej bazie rozkładamy wektor. Jeśli rozkładamy wektor $v$ w bazie $e$ i otrzymujemy przy tym rozkład (9), to ten fakt oznaczamy jako:

$$[v]^e = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}; \tag{12}$$

jest to po prostu inny zapis postaci rozkładu (9), z jawnym zaznaczeniem, że składowe wektora $v$ to współczynniki rozkładu w bazie $e$.

Wspominaliśmy, że w danej przestrzeni może być wiele różnych baz. Załóżmy, że mamy w danej przestrzeni $V$ dwie bazy. Jak są powiązane współczynniki rozkładu jakiegoś wektora $v$ w obu tych bazach?

W pełnej ogólności na to pytanie odpowiemy nieco później, po podaniu kilku faktów nt. odwzorowań liniowych. Na razie zauważmy, że mając współczynniki rozkładu w jednej bazie $e$, możemy uzyskać współczynniki rozkładu w innej bazie $E$ przez *rozwiązanie układu równań.*

**Przykł.** Rozkład tego samego wektora w różnych bazach.

Niech $V = \mathbb{R}_2[\cdot]$. Jako pierwszą bazę weźmy bazę standardową $e$:

$$e_0 = 1, \quad e_1 = t, \quad e_2 = t^2 \tag{13}$$

Weźmy też drugą bazę $E$, zdefiniowaną jako:

$$E_0 = 1, \quad E_1 = 1 + t, \quad E_2 = 1 + t + t^2 \tag{14}$$

. Analogicznie jak w przykładzie sprzed dwóch stron, przekonujemy się, że $E$ jest bazą.

Miejmy teraz zadany jakiś wektor $v \in V$; weźmy: $v \equiv v(t) = 3t^2 + 5t - 2$. Rozkład wektora $v$ w bazie $e$ jest natychmiastowy:

$$v = -2e_0 + 5e_1 + 3e_2. \tag{15}$$

Odwołując się do zapisu (9), mamy: $v = v^0 e_0 + v^1 e_1 + v^2 e_2$, czyli: $v^0 = -2$, $v^1 = 5$, $v^2 = 3$. Stosując sposób oznaczania (12), mamy:

$$[v]^e = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Rozłóżmy teraz wektor $v$ w bazie $E$. Uczyńmy to na dwa sposoby.

• Pierwszy sposób. Oznaczmy współczynniki rozkładu w bazie $E$ przez $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$. Mamy więc: $v = \alpha^0 E_0 + \alpha^1 E_1 + \alpha^2 E_2$. Korzystając z definicji (14), mamy:

$$v = \alpha^0 \cdot 1 + \alpha^1(1+t) + \alpha^2(1+t+t^2) = (\alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2) \cdot 1 + (\alpha^1 + \alpha^2) \cdot t + \alpha^2 t^2,$$

co daje układ równań na współczynniki:

$$\begin{cases} \alpha^0 + \alpha^1 + \alpha^2 &= -2 \\ \alpha^1 + \alpha^2 &= 5 \\ \alpha^2 &= 3 \end{cases}$$

który łatwo rozwiązać, i otrzymujemy

$$\alpha^0 = -7, \quad \alpha^1 = 2, \quad \alpha^2 = 3.$$

Możemy zapisać otrzymany wynik jako

$$[v]^E = \begin{bmatrix} -7 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{17}$$

• • Drugi sposób. Spójrzmy na definicję (14) bazy $E$ jako na wyrażenie wektorów bazy $E$ przez wektory bazy $e$:

$$E_0 = 1 = e_0; \quad E_1 = 1 + t = e_0 + e_1; \quad E_2 = 1 + t + t^2 = e_0 + e_1 + e_2.$$

*Odwróćmy* teraz tę zamianę zmiennych, tzn. wyraźmy wektory bazy $e$ przez wektory bazy $E$. W powyższym przypadku łatwo ten układ rozwiązać. Mamy:

$$e_0 = E_0;$$

$$e_1 = E_1 - e_0 = E_1 - E_0;$$

$$e_2 = E_2 - e_0 - e_1 = E_2 - E_0 - (E_1 - E_0) = E_2 - E_1.$$

Skorzystajmy teraz z rozkładu (15) wektora $v$ w bazie $e$; mamy:

$$\begin{aligned} v = -2e_0 + 5e_1 + 3e_2 &= -2 \cdot E_0 + 5(E_1 - E_0) + 3(E_2 - E_1) \\ &= 3E_2 + (5-3)E_1 + (-2-5)E_0 = 3E_2 + 2E_1 - 7E_0 \\ &= \alpha^0 E_0 + \alpha^1 E_1 + \alpha^2 E_2; \end{aligned}$$

czyli otrzymaliśmy $[v]^E$ – rozkład (17) wektora $v$ na składowe w bazie $E$ – to samo co w pierwszym sposobie.

## 2 Odwzorowanie liniowe

**Def.** Niech $V, W$ – dwie przestrzenie wektorowe. Mówimy, że odwzorowanie $F : V \to W$ jest *liniowe*, gdy dla dowolnych wektorów $x, y \in V$ i dla dowolnego elementu ciała $\alpha \in \mathbb{K}$ spełnione są warunki:

$$F(x+y) = F(x) + F(y), \text{ (addytywność)} \quad F(\alpha v) = \alpha F(v) \text{ (jednorodność)}. \tag{18}$$

Czasem te warunki zapisuje się w postaci jednego ('2 w 1')

$$\underset{x,y\in V}{\forall} \ \underset{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}{\forall} : \ F(\alpha x + \beta y) = \alpha F(x) + \beta F(y). \tag{19}$$

**Przykł.**

1. $\mathbb{R}_n[\cdot] \to \mathbb{R}$: Branie wartości wielomianu w (zadanym) punkcie $x$.
2. $C([a,b]) \to \mathbb{R}$: $C([a,b]) \ni f \to \displaystyle\int_a^b f(x)\mathsf{d}x$
3. Kot Arnolda: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Zanim zaczniemy pokazywać liniowość, wprowadźmy pojęcie *macierzy* oraz *mnożenia macierzy przez wektor*.
**Def.** *Macierz* $A$ rozmiaru $m \times n$ (o $m$ wierszach i $n$ kolumnach) i elementach z ciała $\mathbb{K}$ to tablica liczb postaci

$$A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} \tag{20}$$

gdzie $a^i{}_j$ (*elementy macierzy*) są liczbami z ciała $\mathbb{K}$. Dolny wskaźnik numeruje *kolumny* macierzy (przebiega więc wartości od 1 do $n$), a górny numeruje *wiersze* i przebiega wartości od 1 do $m$.
Zwróćmy uwagę, że na wektor też można patrzeć jako na macierz. Jest to macierz o jednej kolumnie. Obserwacja ta przyda się nam później.
Działanie macierzy na wektor (tzn. mnożenie macierzy przez wektor) określamy następująco:
Niech $A$ będzie macierzą daną przez (20) rozmiaru $m \times n$. Niech $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Mnożenie macierzy $A$ przez wektor $\mathbf{x}$ określamy jako

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^m{}_1 & a^m{}_2 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 x^1 + a^1{}_2 x^2 + \dots + a^1{}_n x^n \\ a^2{}_1 x^1 + a^2{}_2 x^2 + \dots + a^2{}_n x^n \\ \vdots \\ a^m{}_1 x^1 + a^m{}_2 x^2 + \dots + a^m{}_n x^n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

• *Stw.* (na razie bardziej agitacyjne) Najogólniejsze odwzorowanie liniowe $F : V \to W$ dane jest (po ustaleniu baz w przestrzeniach $V$ i $W$) przez pewną *macierz*.

Działanie operatora liniowego $F$ na wektor $v \in V$ sprowadza się do mnożenia tej macierzy (macierz operatora $F$ w bazach w $V$ i $W$) przez wektor $v$.
**Przykł.**

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^1 + x^2 \\ x^1 + x^2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzenie, że tak określona operacja jest odwzorowaniem liniowym, jest natychmiastowe

4. Różniczkowanie wielomianów. Niech $V = \mathbb{R}[\cdot]$. Nazwijmy odwzorowanie $D : V \to V$ *różniczkowaniem* i określmy je tak, jak to było na analizie (aczkolwiek poniższa definicja jest tylko algebraiczna, nie analityczna):

$$D(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1}. \tag{21}$$

Pamiętając, jak się dodaje wielomiany, sprawdzamy łatwo, że $D$ jest operatorem liniowym.

5. Obrót w $\mathbb{R}^2$. Rozważmy operację obrotu na płaszczyźnie o kąt $\alpha$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Nazwijmy tę operację $R_\alpha$. Jej działanie na wektor $\mathbf{x}$ można (w bazie standardowej) opisać macierzą

$$R_\alpha \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha x^1 - \sin\alpha x^2 \\ \sin\alpha x^1 + \cos\alpha x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Jeśli ktoś tego nie pamięta (albo nie zna), wyprowadzenie pojawi się wrychle (za ok. 2 strony).

6. Rozpatrzmy *rzut* wektora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ na płaszczyznę $xy$ wzdłuż osi $z$; oznaczamy go $\Pi_z$. (Dalej oznaczmy $x, y, z$ jako $x^1, x^2, x^3$). Działanie takiego rzutu polega po prostu na 'zapominaniu' trzeciej (tzn. $z-$owej) składowej wektora:

$$\Pi_z \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Dla odwzorowań liniowych mamy dwie ważne definicje. Niech więc $F : U \to V$ – odwz. liniowe.

**Def.** *Jądrem* odwzorowania $F$ (ozn.$\operatorname{Ker} F$; oznaczenie jest skrótem od 'kernel') jest zbiór wektorów z $U$, przeprowadzanych w wektor zerowy z $V$:

$$\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{u} \in U : \quad F\mathbf{u} = \mathbf{0} \in V\}. \tag{24}$$

Mamy proste

**Stw.** $\operatorname{Ker} F$ jest podprzestrzenią $U$.

**Dow.** Dla $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} F$, $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker} F$ mamy, z liniowości $F$: $\mathbf{0} = F\mathbf{x} + F\mathbf{y} = F(\mathbf{x} + \mathbf{y})$, zatem $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \operatorname{Ker} F$. Podobnie, dla $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} F$: $\mathbf{0} = \lambda F\mathbf{x} = F(\lambda\mathbf{x})$, zatem $\lambda\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} F$.

**CBDO**

**Def.** *Obrazem* odwzorowania liniowego $F$ (ozn. $\operatorname{Im} F$; oznaczenie jest skrótem od 'image'. Zbieżność oznaczenia z częścią urojoną liczby zespolonej jest czysto przypadkowa!) jest to zbiór tych wektorów z $V$, które dają się zapisać jako $F\mathbf{x}$ dla pewnego $\mathbf{x} \in U$:

$$\operatorname{Im} F = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v} = F\mathbf{x} \quad \text{dla pewnego} \;\; \mathbf{x} \in U\}. \tag{25}$$

**Stw.** $\operatorname{Im} F$ jest podprzestrzenią $V$.

**Przykł.**

- Dla operatora różniczkowania, jądrem jest zbiór wielomianów będących stałą; obrazem jest zbiór wielomianów stopnia mniejszego lub równego $n-1$.

$$\operatorname{Ker} D = \{v \in \mathbb{R}_n[\cdot] : v(x) = \text{const}\}; \qquad \operatorname{Im} D = \mathbb{R}_{n-1}[\cdot].$$

- Dla operatora obrotu, jądro jest trywialne (tzn. $\operatorname{Ker} R_\alpha = \mathbf{0}$), bowiem przy obrocie nie zmienia się długość wektora, zatem dowolny niezerowy wektor przechodzi w niezerowy. Obrazem jest cała przestrzeń $\mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{Ker} R_\alpha = \{\mathbf{0}\}; \qquad \operatorname{Im} D = \mathbb{R}^2.$$

- Jądrem rzutu $\Pi_z$ są wektory o składowych pierwszej i drugiej równej zeru. Obrazem jest płaszczyzna $xy$.

$$\operatorname{Ker} \Pi_z = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle; \qquad \operatorname{Im} D = \Pi_z = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

# 3 Macierze odwzorowań liniowych

Rozpatrzmy teraz zbiór *wszystkich możliwych* odwzorowań liniowych z $V$ do $W$. Nazwiemy go $L(V, W)$.

Zbiorowi temu łatwo nadamy strukturę przestrzeni wektorowej – podobnie jak to było w przypadku zbioru funkcji ciągłych. Tu definicja będzie wyglądała tak:

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x), \qquad (\alpha F)(x) = \alpha F(x)$$

**Przykł.** $L(R^1, R^1)$: $y = ax$ dla $x \in V = \mathbb{R}^1$, $y \in W = \mathbb{R}^1$. Odwzorowanie takie jest jednoznacznie wyznaczone przez jedną liczbę $a$. Suma dwóch odwzorowań: $M_a : y = ax$ oraz $M_b : y = bx$ to odwzorowanie $y = (a + b)x$.

Jak będzie w ogólnym przypadku, tzn. ile jest odwzorowań liniowych z $V$ do $W$? Jak opisać (czy też: parametryzować) ich zbiór (będący – jak widzieliśmy – przestrzenią liniową)?

**Przykład.** Jeśli $V = W = \mathbb{R}$, to odwzorowanie liniowe $T : V \to W$ ma postać: $V \ni v \to w = \alpha v \in W$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), tzn. odwzorowanie to jest po prostu mnożeniem przez liczbę. Odwzorowań liniowych z $\mathbb{R}^1$ do $\mathbb{R}^1$ jest więc tyle ile liczb $\alpha$, a więc zbiór tych odwzorowań to $\mathbb{R}^1$: $L(V, W) \sim \mathbb{R}$.

W ogólnym przypadku mamy

**Stwierdzenie.** Jeśli $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – baza w $V$ oraz $w_1, \ldots, w_n$ – jakiekolwiek wektory z $W$, to istnieje dokładnie jedno $T \in L(V, W)$ takie, że $Te_1 = w_1, \ldots, Te_n = w_n$. Innymi słowy, odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości na wektorach bazy.

**Dowód:** *Zdefiniujmy* działanie $T \in L(V, W)$ na wektorach bazy tak jak powyżej. Wtedy dla dowolnego wektora $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ mamy

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i w_i,$$

do daje szukany wzór na $T$ (dokładniej, na $T(v)$). Pozostaje upewnić się, czy ten wzór określa odwzorowanie liniowe. Biorąc $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ i $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}^i e_i$, mamy: $v+\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n}(v^i+\tilde{v}^i)e_i$ oraz

$$T(v + \tilde{v}) = \sum_{i=1}^{n}(v^i + \tilde{v}^i)w_i = \sum_{i=1}^{n} v^i w_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}^i w_i = T(v) + T(\tilde{v}).$$

Podobnie sprawdza się jednorodność.

**CBDO**

**Wniosek:** Baza $e$ w $V$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami $L(V, W)$ a ciągami $(w_1, \ldots, w_n)$ wektorów z $W$. Innymi słowy, cała informacja o $T$ jest zawarta w ciągu $[T]_e$:

$$[T]_e = (Te_1, \ldots, Te_n).$$

$[T]_e$ jest ciągiem wektorów, a każdy z nich jest kolumienką liczb. Wyraźmy więc $[T]_e$ w bardziej konkretny sposób (jako zbiór liczb). Najsampierw, ustalmy bazę $f = f_1, \ldots, f_m$ w przestrzeni $W$. Każdy z wektorów $Te_j$ można zapisać $[Te_j]^f \in \mathbb{K}^m$. Zatem cała informacja o $T$ jest zawarta w ciągu (dwuwskaźnikowym) liczb ${[T]^f}_e$:

$${[T]^f}_e = ([Te_1]^f, \ldots, [Te_n]^f).$$

Oznaczając współrzędne wektora $[Te_j]^f$ przez ${T^i}_j$ (tu $i = 1, \ldots, m$) możemy zapisać:

$$[Te_j]^f = \begin{bmatrix} {T^1}_j \\ \vdots \\ {T^m}_j \end{bmatrix} \tag{26}$$

a dla ciągu wektorów ${[T]^f}_e$

$${[T]^f}_e = ([Te_1]^f, \ldots, [Te_n]^f) = \left( \begin{bmatrix} {T^1}_1 \\ \vdots \\ {T^m}_1 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} {T^1}_n \\ \vdots \\ {T^m}_n \end{bmatrix} \right).$$

Ilość nawiasów w tym ostatnim wyrażeniu jest zdecydowanie za duża; zapiszmy to więc inaczej:

$${[T]^f}_e = ([Te_1]^f, \ldots, [Te_n]^f) = \begin{bmatrix} {T^1}_1 & \ldots & {T^1}_n \\ \vdots & & \vdots \\ {T^m}_1 & \ldots & {T^m}_n \end{bmatrix}. \tag{27}$$

To – po przypomnieniu sobie, co to jest macierz – w naturalny sposób prowadzi nas do definicji:

**Def.** *Macierz odwzorowania liniowego* $T \in L(V, W)$ w zadanych bazach: $e$ w $V$ oraz $f$ w $W$, to tablica liczb (macierz) ${[T]^f}_e$ opisana wyżej.

Ustalenie baz w $V$ oraz $W$ zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami $L(V, W)$ oraz macierzami $m \times n$.

Podsumujmy związki pomiędzy wprowadzonymi wyżej trzema pojęciami: ($T$ – odwzorowanie liniowe $V \to W$; ${[T]^f}_e$ – macierz tego odwzorowania w bazach: $e$ w $V$, $f$ w $W$; ${T^i}_j$ – elementy tej macierzy.

Mając bazy $e$ w $V$ oraz $f$ w $W$, elementy ${T^i}_j$ możemy liczyć na dwa sposoby:

1. **Sposób I** (transformacja wektorów bazy):

$$Te_i = {T^1}_i f_1 + \cdots + {T^m}_i f_m = \sum_{j=1}^{m} {T^j}_i f_j \tag{28}$$

(rozwijamy w bazie $f$ działania operatora $T$ na poszczególne wektory bazy $e$).

Jest to po prostu inna postać wzoru (26).

2. **Sposób II** (transformacja składowych): Jeśli $Tv = w$, gdzie $V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$, $W \ni w = \sum_{j=1}^{m} w^j f_j$, to

$$w^j = \sum_{i=1}^{n} {T^j}_i v^i \tag{29}$$

Wynika to z poprzedniego sposobu przez proste przeliczenie:

$$Tv = T(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i (\sum_{j=1}^{m} {T^j}_i f_j) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} {T^j}_i v^i) f_j$$

$$= w = \sum_{j=1}^{m} w^j f_j$$

i skoro tak, to mamy na składową $w^j$ wzór (29).

**Przykł.** Policzmy macierz operatora różniczkowania w bazie standardowej, tzn. niech $\mathbf{e}_0 = 1$, $\mathbf{e}_1 = x$, $\mathbf{e}_2 = x^2, \ldots$, ogólnie: $\mathbf{e}_k = x^k$.

Popatrzmy, jak różniczkowanie działa na kolejne wektory bazy. Wynik zapiszemy jako kombinację liniową wszystkich wektorów bazy:

$$D\mathbf{e}_0 = D(1) = 0 = 0\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + \cdots + 0\mathbf{e}_n,$$

$$D\mathbf{e}_1 = D(x) = 1 = 1\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + \cdots + 0\mathbf{e}_n,$$

itd. Ogólnie dla $\mathbf{e}_k$:

$$D\mathbf{e}_k = D(x^k) = kx^{k-1} = k\mathbf{e}_{k-1} = 0\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + \cdots + k\mathbf{e}_{k-1} + 0\mathbf{e}_k + \ldots,$$

i ostatnia równość dla $x^n$:

$$D\mathbf{e}_n = D(x^n) = x^{n-1} = n\mathbf{e}_{n-1} = 0\mathbf{e}_0 + 0\mathbf{e}_1 + \cdots + n\mathbf{e}_{n-1} + 0\mathbf{e}_n.$$

Te współczynniki kombinacji liniowej musimy teraz kolejno poustawiac *w kolumnach* – pamiętajmy, że we wzorze (28) sumujemy po *pierwszym*, tzn. kolumnowym, wskaźniku! Mamy więc:

$$[D]^e{}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Sprawdźmy wynik, porównując, czy działając operatorem różniczkowania na dowolny wielomian dostaniemy to samo w języku 'macierzowym' oraz 'wielomianowym'. Najpierw ten drugi język: Dla dowolnego wielomianu $v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ mamy: $(Dv)(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$.

A teraz działając macierzą (30) na wielomian, zapisany jako wektor kolumnowy:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ \vdots \\ na_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Wektor po prawej stronie odpowiada wielomianowi $a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_{n-1}x^{n-1}$. Otrzymaliśmy więc to samo – jak było trzeba.

# 4 Przestrzeń wektorowa macierzy

Oznaczmy przez $\mathbb{K}^m{}_n$ zbiór macierzy $m \times n$ o elementach z $\mathbb{K}$.

Zbiorowi $\mathbb{K}^m{}_n$ można nadać strukturę przestrzeni liniowej w następujący sposób: Dodawanie macierzy określamy jako:

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1{}_1 & \dots & b^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ b^m{}_1 & \dots & b^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 + b^1{}_1 & \dots & a^1{}_n + b^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 + b^m{}_1 & \dots & a^m{}_n + b^m{}_n \end{bmatrix},$$

a mnożenie macierzy przez liczbę jako:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a^1{}_1 & \dots & \lambda a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a^m{}_1 & \dots & \lambda a^m{}_n \end{bmatrix}.$$

Takie zdefiniowanie dodawania macierzy i mnożenia ich przez liczbę zadaje izomorfizm pomiędzy $L(V, W)$ a $\mathbb{K}^m{}_n$.

# 5 Macierz złożenia odwzorowań

Niech $U, V, W$ będą trzema przestrzeniami wektorowymi z wybranymi bazami: $e = (e_1, \dots, e_p)$ – baza w $U$; $f = (f_1, \dots, f_n)$ – baza w $V$; $g = (g_1, \dots, g_m)$ – baza w $W$. Jeśli $S \in L(U, V)$

i $T \in L(V,W)$, to $R = T \circ S \in L(U,W)$. Znajdźmy, jak macierz złożenia odwzorowań $T$ i $S$:

$$[R]^g{}_e = C = \begin{bmatrix} c^1{}_1 & \dots & c^1{}_p \\ \vdots & & \vdots \\ c^m{}_1 & \dots & c^m{}_p \end{bmatrix}$$

wyraża się przez macierze tych odwzorowań:

$$[T]^g{}_f = A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}, \qquad [S]^f{}_e = B = \begin{bmatrix} b^1{}_1 & \dots & b^1{}_p \\ \vdots & & \vdots \\ b^n{}_1 & \dots & b^n{}_p \end{bmatrix}.$$

Współczynniki $c^i{}_j$ macierzy $C = [R]^g{}_f$ są określone przez: Jeśli $U \ni u = \sum_{j=1}^p u^j e_j$, $W \ni w = \sum_{i=1}^n w^i g_i$, to

$$w = Ru \qquad \Longleftrightarrow \qquad w^i = \sum_{j=1}^p c^i{}_j u^j.$$

Ponieważ $w = Tv$, gdzie $v = Su$, to oznaczając przez $v^k$ współrzędne wektora $v$ w bazie $e$ (mamy więc $v = \sum_{k=1}^n v^k f_k$) mamy

$$w^i = \sum_{k=1}^n a^i{}_k v^k = \sum_{k=1}^n a^i{}_k \left( \sum_{j=1}^p b^k{}_j u^j \right) = \sum_{j=1}^p \left( \sum_{k=1}^n a^i{}_k b^k{}_j \right) u^j.$$

Współczynniki $c^i{}_j$ są więc dane przez

$$c^i{}_j = \sum_{k=1}^n a^i{}_k b^k{}_j. \tag{31}$$

**Def.** Jeśli $A \in \mathbb{K}^m{}_n$, $B \in \mathbb{K}^n{}_p$, to macierz $C \in \mathbb{K}^m{}_p$, której elementy $c^i{}_j$ dane są przez wzór (31), nazywamy *iloczynem macierzy* $A$ i $B$ (i piszemy: $C = AB$).

Podsumowując, *macierz złożenia odwzorowań jest iloczynem macierzy tych odwzorowań*:

$$[T \circ S]^f{}_g = [T]^f{}_e [S]^e{}_g.$$

## 5.1 Własności mnożenia macierzy

Mnożenie macierzy jest *łączne*, tzn. $(AB)C = A(BC)$, jeśli iloczyny $AB$ i $BC$ są określone z sensem (łączność mnożenia macierzy wynika z łączności składania odwzorowań). Natomiast mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jeśli przez $\mathrm{Id}_V$ oznaczymy odwzorowanie identycznościowe $V \to V$, to dla $T \in L(V,W)$ mamy

$$[T]^f{}_e = [T \circ \mathrm{Id}_V]^f{}_e = [T]^f{}_e [\mathrm{Id}_V]^e{}_e.$$

Podobnie

$$[T]^f{}_e = [\mathrm{Id}_W \circ T]^f{}_e = [\mathrm{Id}_W]^f{}_f [T]^f{}_e$$

dla $\mathrm{Id}_W$ – odwzorowania identycznościowego $W \to W$.

Macierz

$$[\mathrm{Id}_V]^e{}_e = ([(\mathrm{Id}_V)e_1]^e, \dots, [(\mathrm{Id}_V)e_n]^e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \overset{ozn}{=} I_n$$

nazywamy *macierzą jednostkową*. Pomnożenie dowolnej macierzy $A$ przez macierz jednostkową (w przypadkach, kiedy jest to wykonalne) nie zmienia $A$ (własność elementu neutralnego): Dla $A \in \mathbb{K}^m{}_n$ mamy

$$A\, I_n = A = I_m\, A.$$

**Def.** Mówimy, że macierz $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ jest *odwracalna*, jeśli istnieje macierz $B \in \mathbb{K}^n{}_n$ taka, że $AB = I_n = BA$. W takim przypadku $B$ nazywamy macierzą *odwrotną* do $A$.

Łatwo zobaczyć, że powyższa macierz $B$, jeśli istnieje, jest określona jednoznacznie. Zapisujemy ją jako $A^{-1}$. Zachodzi: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Gdy mamy odwzorowania (odwracalne) $S, T$, to odwzorowanie odwrotne do $S \circ T$ jest: $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$. To daje wzór na macierz odwrotną do iloczynu: Jeśli $A, C$ – macierze (odwracalne), to $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$.

Macierze izomorfizmów (tzn. odwzorowań liniowych odwracalnych) są odwracalne: Jeśli $T \in L(V, W)$ jest odwracalne, $e$ – baza w $V$, $f$ – baza w $W$, to

$$[T]^f{}_e[T^{-1}]^e{}_f = [T \circ T^{-1}]^f{}_f = [\mathrm{Id}_W]^f{}_f = I_n, \qquad [T^{-1}]^e{}_f[T]^f{}_e = [T^{-1} \circ T]^e{}_e = [\mathrm{Id}_V]^e{}_e = I_n,$$

gdzie $n = \dim V = \dim W$.

## 5.2 Zmiana baz i zmiana macierzy operatora przy zmianie bazy

Jeśli $T \in L(V, W)$ oraz $e, e'$ – dwie bazy w $V$, zaś $f, f'$ – dwie bazy w $W$, to

$$[T]^{f'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_W \circ T \circ \mathrm{Id}_V]^{f'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_W]^{f'}{}_f[T]^f{}_e[\mathrm{Id}_V]^e{}_{e'}.$$

Wzór ten pozwala obliczyć macierz odwzorowania $T$ w "nowych"' bazach $e', f'$ mając macierz $T$ w "starych"' bazach $e, f$.

Macierz

$$[\mathrm{Id}_V]^e{}_{e'} = ([e'_1]^e, \dots, [e'_n]^e)$$

nazywa się *macierzą zmiany bazy*. Macierz $[\mathrm{Id}_V]^e{}_{e'}$ jest macierzą odwrotną do $[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_e$:

$$[\mathrm{Id}_V]^e{}_{e'}[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_e = [\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V]^e{}_e = [\mathrm{Id}_V]^e{}_e = I_n,$$

i analogicznie

$$[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_e[\mathrm{Id}_V]^e{}_{e'} = [\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e'} = I_n.$$

**Przykład.** Niech operator $A$ w bazie standardowej $e = (e_1, e_2) = \left( \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ będzie dany macierzą:

$$[A]^e{}_e = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdźmy jego macierz w bazie $e' = (e'_1, e'_2) = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$

Mamy:
$$[\mathrm{Id}]^e{}_{e'} = ([e'_1]^e, [e'_2]^e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
(poszczególne kolumny są to składowe wektorów $e'_i$ w bazie wektorów $e_k$). Macierz $[\mathrm{Id}]^{e'}{}_e$ jest macierzą *odwrotną* do $[\mathrm{Id}]^e{}_{e'}$. Niedługo zobaczymy, jak się liczy macierz odwrotną. W tym momencie jedynie sprawdzimy, że
$$[\mathrm{Id}]^{e'}{}_e = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$
tzn.
$$[\mathrm{Id}]^{e'}{}_e[\mathrm{Id}]^e{}_{e'} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Mamy więc macierz operatora w bazie $e'$:
$$[A]^{e'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}]^{e'}{}_e[A]^e{}_e[\mathrm{Id}]^e{}_{e'}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
W tym przypadku, przez odpowiedni wybór bazy, udało się wyrazić operator $A$ w postaci *diagonalnej*; taka postać jest bardzo ważna przy badaniu macierzy.

## 5.3 Układy równań liniowych

Układ równości
$$\begin{cases} a^1{}_1x^1 & + & \dots & + & a^1{}_nx^n & = & b^1 \\ a^2{}_1x^1 & + & \dots & + & a^2{}_nx^n & = & b^2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1x^1 & + & \dots & + & a^m{}_nx^n & = & b^m \end{cases} \tag{32}$$
gdzie $a^i{}_j$, $b^i$ – dane liczby (z ciała $\mathbb{K}$), zaś $x^1, \dots, x^n$ – liczby niewiadome, nazywa się *układem $m$ równań liniowych z $n$ niewiadomymi*.

Przepiszmy lewą stronę układu równań na trzy sposoby:
$$x^1\begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ \vdots \\ a^m{}_1 \end{bmatrix} + \dots + x^n\begin{bmatrix} a^1{}_n \\ \vdots \\ a^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1x^1 & + & \dots & + & a^1{}_nx^n \\ a^2{}_1x^1 & + & \dots & + & a^2{}_nx^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a^m{}_1x^1 & + & \dots & + & a^m{}_nx^n \end{bmatrix} \tag{33}$$
$$= \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Stąd, wprowadzając oznaczenia:
$$a_1 = \begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ a^2{}_1 \\ \vdots \\ a^m{}_1 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad a_n = \begin{bmatrix} a^1{}_n \\ a^2{}_n \\ \vdots \\ a^m{}_n \end{bmatrix}, \qquad A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}$$

układ równań (32) można zapisać w postaci

$$x^1 a_1 + \cdots + x^n a_n = b$$

lub

$$Ax = b.$$

Macierz $A$ nazywa się *macierzą układu równań* (32).

Można rozpatrywać ją jako macierz pewnego operatora liniowego $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Ze względu na lewą część (33) mamy

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \mathrm{Im} A.$$

**Def.** Liczbę

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}\, A$$

nazywamy *rzędem* (kolumnowym) macierzy $A$. Jest oczywiste, że jest to też ilość liniowo niezależnych kolumn macierzy $A$.

Zachodzi następujące stwierdzenie dotyczące istnienia rozwiązań układu (32).

**Stwierdzenie.** Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje rozwiązanie układu (32).
2. $b \in \mathrm{Im}\, A$.
3. $b \in \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.
4. $\langle a_1, \ldots, a_n, b \rangle = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$
5. $\mathrm{rank}(A, b) = \mathrm{rank}(A)$

Tutaj $(A, b) = (a_1, \ldots, a_n, b)$ oznacza macierz powstałą z $A$ przez dołączenie jeszcze jednej kolumny – wektora $b$. Macierz $(A, b)$ nazywa się *macierzą rozszerzoną* układu (32). Zawiera ona pełną informację o układzie.

**Uwagi.**

- Równoważność 1) i 5) nosi nazwę *twierdzenia Kroneckera – Capelliego.*
- Jeśli prawa strona układu jest zerem (tzn. $b = \mathbf{0}$), to układ nazywamy *jednorodnym*; jeśli $b \neq \mathbf{0}$), to układ nazywamy *niejednorodnym.*
- Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest przestrzenią wektorową (podprzestrzenią $\mathbb{K}^n$). Zbiór rozwiązań układu niejednorodnego *nie* jest przestrzenią wektorową.

Mamy też proste

**Stwierdzenie.** Jeśli $m = n$, to równanie $Ax = b$ ma dla każdego $b$ dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $A^{-1}$. Wówczas $x = A^{-1}b$.

W praktyce rzadko rozwiązuje się układy równań przez znajdowanie macierzy odwrotnej. ("'Rzadko"' nie znaczy "'wcale"'; jest to sposób potrzebny gdy np. macierz $A$ zależy od parametrów). Najczęściej robi się znaną nam już metodą *redukcji wierszowej.*

Popatrzmy najsampierw, jak metoda redukcji pracuje w przypadku zwykłych układów równań. **Przykład.**

1) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Piszemy rozszerzoną macierz układu i redukujemy (wierszowo).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & -8 \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -11 & 22 \\ -9 & 0 & 9 & -18 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

Równoważność (1) bierze się stąd, że równanie trzecie dodawaliśmy do pierwszego i drugiego z takimi współczynnikami, żeby w drugiej kolumnie pojawiły się same zera. Równoważność (2): Pomnożyliśmy równania: pierwsze i drugie przez odpowiednio 11 i -9, aby otrzymać prostszą postać. I dalej:

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Równoważność (3): Skreśliliśmy jedno z powtarzających się równań. (4): Dodaliśmy pierwsze równanie do drugiego z takim współczynnikiem, by wyzerować w nim trzecią kolumnę. (5): Przestawiliśmy wiersze, aby uzyskać jawnie diagonalną podmacierz układu.

Ostatnia macierz układu oznacza, że wyjściowy układ doprowadziliśmy do postaci

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -1 \\ -x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

którego rozwiązanie od razu piszemy:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ x_3 = x_1 - 2 \end{cases}$$

lub, w równoważnej postaci (zmieniając jeszcze nazwę $x_1$ na $\lambda$)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

jest sprzeczny.

3) Będzie tu jeszcze liczenie macierzy odwrotnej.

Metoda redukcji wierszowej (i kolumnowej, gdzie analogiczne operacje przeprowadza się na kolumnach macierzy) mają szerokie zastosowanie jako metody rachunkowe do znajdowania jądra i obrazu operatora czy macierzy odwrotnej.

W analogii do rzędu kolumnowego, definiuje się też *rząd wierszowy*:

**Def.** Rząd wierszowy macierzy $A$: $\text{rank}_w(A)$ to ilość liniowo niezależnych wierszy tej macierzy.

Okazuje się, że zachodzi *równość* tych dwu rzędów:
**Tw.** $\mathrm{rank}_w(A) = \mathrm{rank}_k(A)$.
**Dow.** pomijamy.