Matematyka I – lista zadań nr 1

1. ■ Narysować sumę i przecięcie zbiorów $A := \{x \in \mathbb{R}; x > 2\}$ oraz $B := \{x \in \mathbb{R}; x \leq 8\}$,

2. ■ Niech A będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 2, zaś B – zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez 3. Znaleźć i opisać sumę i przecięcie tych zbiorów.

3. ■ Niech A i B będą podzbiorami U. Niech $C = A \cap B$, $D = A' \cup B$ i $E = A \cup B$. Zaznacz na diagramach Venna zbiory C, D i E. Korzystając z praw de Morgana pokaż, że $A = D' \cup C$. Udowodnij, że $B = D \cap E$.

4. Zilustrować przy pomocy diagramu Venna zdania:
   $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. ■ Niech p oznacza zdanie „idę do szkoły" zaś q odpowiada zdaniu „słońce świeci". Napisz korzystając z symboli logicznych: a) Jeżeli słonce świeci to idę do szkoły, b) Jeżeli nie idę do szkoły to słońce nie świeci. Podaj (słowami) zdanie przeciwne do „Jeżeli słońce świeci to idę do szkoły". Sporządź tabelkę logiczną dla zdań: $p \wedge q$, $p \vee q$, $\neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p$, $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$. Jak określimy zdanie: $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$?

6. Rozważmy zdanie: „Jeżeli coś jest kwadratem, to jest też rombem". Napisz jak powinno brzmieć: zaprzeczenie, zdanie przeciwne i zdanie przeciwstawne. Które z nich jest zdaniem prawdziwym?

7. ■ Niech $S = \{x : 1 \leq x \leq 17, x \in \mathbb{N}\}$ a P , Q i R to podzbiory S takie, że:
   $P :=$ {liczby podzielne przez cztery},
   $Q :=$ {dzielniki 36},
   $R :=$ {liczby będące kwadratem innej liczby}. Wypisz elementy zbiorów:
   S, $P \cap Q \cap R$, opisz słowami zbiór $P \cup Q$, narysuj diagram Venna pokazujący zależność między zbiorami P, Q, R, zaznacz na diagramie zbiór S.
   Niech p, q, r będą zdaniami: $p : x$ jest wielokrotością czterech
   $q : x$ jest podzielnikiem 36, $r : x$ jest kwadratem innej liczby. Napisz słowami następujące zdanie: $(p \vee r) \wedge \neg q$. Pokaż na diagramie Venna obszar reprezentujący $(p \vee r) \wedge \neg q$. Wypisz tabelkę logiczną dla zdania $(p \vee r) \wedge \neg q$, podaj wartość x, dla której to zdanie jest prawdziwe.

8. ■ Zdefiniować koniunkcję za pomocą alternatywy i negacji.
   Odpowiedź: $\neg(\neg p \vee \neg q)$.

9. Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.
   Odpowiedź: $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

10. Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.
    Odpowiedź: $\neg p \Rightarrow q$

11. ■ Sprawdzić, czy zdanie $p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$ jest tautologią. Czy jest prawdziwe zdanie: Jeżeli liczba naturalna a jest liczba pierwszą, to o ile a jest liczbą złożoną, to a równa się cztery. (Widać tu jak logika matematyczna ma się do tzw. codzienności)

12. Niech A, B, C – dowolne zbiory. Zilustrować poniższe równości bądź zawierania na diagramach Venne'a.

    (a) ■ Pokazać, że $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$.

    (b) ■ Pokazać, że $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

(c) Pokazać, że $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(d) Pokazać, że $(A \setminus B) \cup (B \setminus C \cup (C \setminus A) = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C)$.

(e) ■ Pokazać, że $(A \setminus C) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

13. *Różnicę symetryczną* zbiorów A oraz B definiujemy jako $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

    - Pokazać, że jest to równoważne definicji $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
    - Zilustrować na diagramie Venne'a.
    - Pokazać, zę różnica symetryczna jest łączna: $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
    - $A \triangle A = \emptyset$.
    - $A \triangle (A \triangle B) = B$.

14. Narysować w układzie kartezjańskim zbiory: $A \times B$ i $B \times A$, jeżeli $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

15. Znaleźć i zaznaczyć na płaszczyźnie zbiory $A \times B$ oraz $B \times A$, gdzie $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$.

16. ■ Narysuj zbiór $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ spełniający warunek: $x \leq y$, $\{x \leq 0\} \vee \{y \leq 0\}$.

17. ■ Wykres $|x| = |y|$, $|x - y| = 1$, $\sup(x, y) = 1$

18. Narysuj zbiór $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ spełniający warunek: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x + y = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $\{x^2 + y^2 < 4\} \wedge \{|z| < 1\}$, $\{|x| < 1\} \wedge \{|y| < 1\} \wedge \{|z| < 1\}$.

19. Niech U będzie zbiorem punktów (x, y), dla których $x^2 + y^2 < 1$, B będzie zbiorem punktów, dla których $x^2 + y^2 < 4$, C będzie zbiorem punktów, dla których $(x-1)^2 + y^2 < 1$, Znaleźć zbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$.

20. ■ Znaleźć dziedziny funkcji: $f_1(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 9}$, $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x + 9}}$, $f_3(x) = \log(x^2 - 4)$.

21. ■ Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste, dla których $|4x + 1| > |2x - 3|$.

22. ■ Znaleźć wszystkie $x \in \mathbb{R}$, spełniające nierówność $\frac{x+3}{x-4} > 7$. Zilustrować na osi liczbowej.

23. ■ Rozwiązać nierówność $\frac{|x+9|}{|x-9|} < 2$.

24. ■ Funkcje f i g są zdefiniowane następujaco: $f(x) = x - 5, g(x) = 2x - 3$, znaleźć: $f^{-1}, g^{-1}, f(g(x)), g(f(x)), f(g^{-1})(x)$,

25. Wiedząc, że $f(x) := \frac{x}{x+2}$ oraz $g(x) := f\left(\frac{x-2}{3}\right)$, uprościć $g(x)$ i podać dziedzinę $g(x)$.

26. ■ Dla funkcji $f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$ znaleźć $f^{-1}(x)$ i podać jej dziedzinę oraz zbiór wartości.

27. Dla funkcji $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$, $x \leq 0$ znaleźć $f^{-1}(x)$ i podać jej dziedzinę oraz zbiór wartości.

28. ■ Niech $f(x) = 2x - 1$ a $g(x) = \frac{x}{x+1}$. Rozwiązać nierówność: $(f \circ g)(x) \leq (g \circ f)(x)$.

29. Niech $f(x) = x^3$. Znaleźć takie $g(x)$, że: a) $(f \circ g)(x) = x + 1$, b) $(g \circ f)(x) = x + 1$

30. Niech trójkąt ma wierzchołki:$(0,0),(1,1),(2,3)$. Podać nierówności go opisujące.

31. To samo dla sześciokąta foremnego o środku w środku układu współrzędnych i jednym wierzchołku w punkcie $(0,4)$.

32. Narysować funkcję $f(x)$ składającą się z trzech odcinków (jeden poziomy) na skończonej dziedzinie i poprosić o narysowanie $\frac{1}{f(x)}$.

33. Staś i Nel chcą hodować groszki i róże. Mają 16 hektarów ziemi, sadzonki róż kosztują 20 pln na hektar a nasiona groszku 12 pln na hektar. Do wydania mają 240 pln i muszą obsadzić groszkiem minimum 6 hektarów. Opisz matematycznie i narysuj zależności występujące w zadaniu. Z hektara można otrzymać 7000 róż lub 10000 groszków. Róża kosztuje 2 pln a groszek 1.5 pln. Podaj maksymalny zysk, jaki Staś i Nel mogą otrzymać.

34. ■ Zbadać injektywność i surjektywność funkcji $y(x) = x^3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. (Zwrocić uwagę na to, że bez podania zbioru wartości zadanie nie ma sensu)

35. ■ Zbadać surjektywność i injektywność funkcji (zwrocić uwagę na to, że bez podania zbioru wartości zadanie nie ma sensu): $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, \text{ gdy } x \text{ jest parzyste} \\ \frac{x+5}{2}, \text{ gdy } x \text{ jest nieparzyste} \end{cases}$.

36. ■ Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Znaleźć $f([0,1])$, $f([-2,-1])$, $f^{-1}(]-\infty,-6])$, $f^{-1}(\{-3,-4\})$, $f(\{1,2\})$. (Milcząco zakładamy, że f jest ciągła ew. zwracamy uwagę na to, że bez takiej własności byłoby nam ciężko)

37. ■ Pokazać, że funkcja $f : X \to Y$, gdzie $X =]0,1[$, $Y = [-2,2] \setminus \{-1,1\}$, zaś f zdefiniowana jest jako: $f(x) = \begin{cases} -3x-1, x \in]0, \frac{1}{3}], \\ 3x, x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 6x-5, x \in]\frac{2}{3}, 1[\end{cases}$ jest bijekcją. Znaleźć $f^{-1}(x)$.