

Matematyka I – lista zadań nr 7: Ciągłość – cd. i różniczkowalność.

1. Wykaż opierając się na def. Cauchy'ego, że $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła w punkcie $x = 2$.
2. Zbadać ciągłość funkcji: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$
3. Ciągłość jednostajna: opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $[1, +\infty[$.
4. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.
5. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.
6. Opierając się na definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.
7. Czy funkcja $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, 1[$?
8. ■ Czy funkcja $f(x) = \sqrt{x}$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$?
9. Czy funkcja $f(x) = e^x$ jest jednostajnie ciągła w przedziale $]0, \infty[$? A w przedziale $] - \infty, 0[$?
10. Pokazać, że funkcja Dirichleta: $f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ nie jest ciągła w żadnym punkcie.
11. Pokazać, że funkcja Dirichleta jest granicą całkiem przyzwoicie wyglądającego ciągu: $f_D(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} [\cos(n! \pi x)]^{2k}$ (zwrócić uwagę na kolejność granic!)
12. **Parę faktów nt. funkcji sinh i cosh** Definicje. Sprawdzić, że spełniona jest 'jedynka hiperboliczna'. Która jest symetryczna a która antysymetryczna względem zamiany $x \rightarrow -x$? Wyrazić $\sinh 2x$ i $\cosh 2x$ przez $\sinh x$ i $\cosh x$. Naszkicować wykresy. Obliczyć funkcje odwrotne (pamiętając o dziedzinach). Definicja $\tanh(x)$ i szkic wykresu.

Pochodne

13. Niech ■ $f(x) = \sqrt{9x + 2}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.
14. Niech ■ $f(x) = \frac{1}{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.
15. Niech ■ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$. Obliczyć z definicji $f'(1)$.
16. Niech $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Obliczyć z definicji $f'(2)$.
17. Niech $f(x) = e^{x-1}$. Obliczyć z definicji $f'(3)$.

18. ■ Obliczyć (jeśli istnieje) $f'(1)$ dla funkcji: $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3x + 1 & \text{dla } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 4 & \text{dla } x > 1 \end{cases}$

19. ■ Obliczyć (jeśli istnieją) $f'_+(0)$, $f'_-(0)$, $f'(0)$ dla funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{dla } x < 0 \\ x(1-x)(2-x) & \text{dla } x \geq 0 \end{cases}$$

20. Obliczyć pochodne funkcji po skorzystaniu z odpowiednich twierdzeń (■ – 5 zadań):

(a) $\frac{1}{x^3 - 1}$;

(b) $\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 1}$;

(c) $\frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + x^4}}$;

(d) $\cos^5 x$;

(e) $\sin(5x - 3)$;

(f) $\sin(\sqrt[3]{1 - x^3})$;

(g) $\frac{x^2}{4^x}$;

(h) $\arcsin \frac{2}{x}$;

(i) $\ln \sin x$;

(j) $\operatorname{arctg}(x - \sqrt{1 + x^2})$;

(k) $e^{\sqrt{2+x^2}}$;

(l) $\cosh(x^3 - 2x + 1)$;

21. Obliczyć pochodne funkcji:

(a) ■ x^x ;

(b) $(\sin x)^{\cos x}$;

(c) $x^{\sin x}$.

22. ■ Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = \sqrt{\ln(1 + x^2)}$ w punkcie $x = 0$.

23. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = \sqrt{\cosh x - 1}$ w punkcie $x = 0$.

24. Zbadać różniczkowalność funkcji $f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$ w punkcie $x = 0$. (Funkcja f jest określona na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).

25. Obliczyć pierwsze, drugie i trzecie pochodne funkcji:

(a) $f(x) = e^{-x^2}$;

(b) $f(x) = \operatorname{tg} x$;

(c) $f(x) = \operatorname{th} x$.

26. Obliczyć n -te pochodne funkcji $f(x)$ (■ – 5 zadań):

(a) $f(x) = \sin x$;

(b) $f(x) = \cos x$;

(c) $f(x) = \sinh x$;

(d) $f(x) = \cosh x$;

(e) $f(x) = e^{2x}$;

(f) $f(x) = e^{-3x}$;

(g) $f(x) = \sin^2 x$; *Wsk.* Wyrazić $\sin^2 x$ przez funkcję trygonometryczną podwojonego kąta.

(h) $f(x) = \cos^2 x$;

(i) $f(x) = \ln x$;

(j) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$;

(k) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$; *Wsk.* Rozłożyć na ułamki proste.

(l) $f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2}$;

(m) $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$.

27. Znaleźć styczne i prostopadłe do następujących krzywych w następujących punktach:

(a) ■ paraboli $y = x^2$ w punkcie $x = 3$;

(b) ■ wykresu funkcji $y = e^x$ w punkcie $x = 1$;

(c) ■ wykresu funkcji $y = \ln x$ w punkcie $x = e^2$;

(d) krzywej danej równaniem $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$;

(e) krzywej danej równaniem $x^2 + xy + y^2 = 3$ (jaka to krzywa?) w punkcie $(1, 1)$.

28. Pokazać, że funkcja $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna w punkcie $x = 0$.