

Matematyka I – lista zadań nr 8.
Pochodne – cd.

1. ■ Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w jej punkcie przegięcia. (Plus definicja punktu przegięcia).
2. ■ Napisać równania stycznych do wykresu funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ w jej punktach przegięcia.
3. Pokazać, że funkcja $f(x) = xe^{-x^2}$ jest różnowartościowa na przedziale $] \frac{1}{\sqrt{2}}, \infty[$. Znaleźć pozostałe przedziały, na których jest różnowartościowa.
4. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2).$$

5. Pokazać, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

6. Pokazać, że jeżeli x_0 jest pierwiastkiem *wielokrotnym* wielomianu $P(x)$, to x_0 jest też pierwiastkiem pochodnej $P'(x)$ tego wielomianu.
7. Wykazać następujące nierówności (■ – 4 podpunkty):

- (a) $\ln x \leq \sqrt{x}$ dla $x > 0$;
- (b) $\ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) < \frac{1}{x} + \ln x$ dla $x > 0$;
- (c) $\ln x \leq \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$ dla $x > 0, x \neq 1$;
- (d) $2 \ln x < x - \frac{1}{x}$ dla $x > 1$;
- (e) $\frac{2}{2x + 1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}}$
- (f) $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$ dla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;
- (g) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x > x^2$ dla $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

8. ■ Pokazać, że

$$\frac{x}{x + 1} \leq \ln(1 + x) \leq x \quad \text{dla } x > -1.$$

9. ■ Pokazać, że

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \quad \text{dla } x \geq 0 \text{ i } \alpha \in]0, 1[$$

10. Pokazać, że $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ dla $x > 0$.

11. ■ Wykazać, że zachodzą równości:

- (a) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{x}$ dla $x > -1$;
- (b) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ dla $|x| > 1$;
- (c) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ dla $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$;

12. Obliczyć następujące granice (■ – po 2 przykłady na typowe nieoznaczoności):

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$;
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$;
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$;
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^x$;
- (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{\sin^2 x}$;
- (f) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;
- (g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^x$;
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$;
- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right)$;
- (j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$;
- (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{2x^2}\right)$;
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- (m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- (n) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;
- (p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}\right) + x\right]$.

13. (■ – ze 3 przykłady porządnie) Zbadać przebieg następujących funkcji. Tzn: Znaleźć dziedzinę; zbadać ciągłość i różniczkowalność; jeśli funkcja jest nieciągła to znaleźć granice w punktach nieciągłości; znaleźć przedziały monotoniczności; znaleźć punkty krytyczne, sprawdzić, które są minimami i maksimami; jeśli istnieją, to znaleźć

punkty przegięcia; przedziały wypukłości/wklesłości funkcji; jeśli istnieją, to znaleźć asymptoty; na podstawie otrzymanych informacji naszkicować wykres funkcji.

(a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

(b) $f(x) = \frac{x+1}{x\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$;

(d) $f(x) = xe^{-x^2}$;

(e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$;

(f) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}e^{-\frac{x^2}{3}}$

14. Do rzeki o szerokości 30 m wpada pod kątem prostym kanał o szerokości 10 m. Jaka jest największa długość pnia drewna, który może wpłynąć z kanału do rzeki (lub vice versa)?
15. ■ Światło porusza się tak, aby czas jego przejścia pomiędzy dwoma punktami był możliwie najkrótszy. Pokazać, że z tej zasady wynika:
- (a) *Gdy rozpatrujemy zjawisko odbicia światła na granicy dwóch ośrodków – wynika zasada, że kąt padania jest równy kątowi odbicia;*
- (b) *Gdy rozpatrujemy przejście z jednego ośrodka do drugiego – wynika prawo Snella.*
16. Znaleźć największą wartość funkcji $f(x)$ na zbiorze liczb rzeczywistych: $f(x) = (7+x)\sqrt[3]{11-3x}$.
17. ■ Znaleźć objętość największego stożka wpisanego w kulę.
18. ■ Znaleźć objętość najmniejszego stożka opisanego na kuli.