

# Pytania egzaminacyjne przedmiotu: Matematyka I

## Powtórzenie i uzupełnienie ze szkoły średniej.

1. Rachunek logiczny: koniunkcja, alternatywa, zaprzeczenie zdań, prawa de Morgana, kwantyfikatory, zaprzeczanie kwantyfikatorów.
2. Rachunek zbiorów: Suma, iloczyn, różnica mnogościowe, związek z rachunkiem zdań, iloczyn kartezjański.
3. Funkcja i odwzorowanie. Dziedzina funkcji, wartości, argumenty, obraz, przeciwobraz, iniekcja, surjekcja, bijekcja. Funkcja odwrotna. Wykres funkcji.
4. Funkcje liniowe, kwadratowe, homografie. Asymptoty.
5. Niektóre dalsze własności funkcji: Funkcje parzyste, nieparzyste, wykresy:  $f(-x)$ ,  $f(x+a)$ ,  $f(x)+b$ ,  $a f(x)$ ,  $f(ax)$ . ( $a, b$  – stałe).
6. Funkcje trygonometryczne, jedynka trygonometryczna,  $\sin(x+y)$ ,  $\cos(x+y)$ . Zachowanie funkcji w dziedzinie, okresowość, amplituda, okres, układ współrzędnych biegunowych. Funkcje odwrotne do trygonometrycznych.
7. Wektory w  $\mathbb{R}^3$ , liniowa niezależność, baza, rozkład wektora w bazie.
8. Iloczyn skalarny i wektorowy, przykłady zastosowań.
9. Zasada indukcji matematycznej. Przykłady.
10. Funkcja potęgowa, dwumian Newtona, wielomiany i ich pierwiastki, twierdzenie Bezout.
11. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.

## Początek analizy właściwej

1. Liczby naturalne, całkowite, wymierne. Niezupełność zbioru liczb wymiernych: dowód że pierwiastek z 2 jest liczbą niewymierną.
2. Liczby rzeczywiste. Aksjomatyka zbioru liczb rzeczywistych.
3. Podzbiory  $\mathbb{R}$ : zbiór ograniczony i nieograniczony, kresy zbioru, istnienie kresów.
4. Ciąg, pojęcie granicy ciągu.
5. Przykłady obliczania granic. Granice: sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, złożenia (superpozycji) ciągów.
6. Twierdzenie o trzech ciągach.
7. Ciąg Cauchy'ego i własność Cauchy'ego. Równoważność definicji zbieżności: zwykłej i Cauchy'ego.
8. Podciągi ciągów. Twierdzenie Bolzano-Weierstrassa.
9. Liczba  $e$ , wyrażenie  $e$  przez granicę sumy i iloczynu, równoważność tych sposobów.
10. Funkcja wykładnicza i logarytmiczna.
11. Ciągłość funkcji w punkcie – definicje Heinego i Cauchy'ego i ich równoważność.
12. Funkcje ciągłe, działania na funkcjach ciągłych. Ciągłość jednostajna.
13. Własność Darboux, twierdzenie Weierstrassa dla funkcji ciągłych.
14. Definicja pochodnej. Interpretacja geometryczna. Równanie stycznej i normalnej.
15. Twierdzenia o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu funkcji różniczkowalnych.
16. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a, Cauchy'ego.
17. Pochodna funkcji odwrotnej i funkcji złożonej.
18. Reguły de l'Hospitala, przykłady.
19. Wzór Taylora. Reszta w postaci Lagrange'a i Cauchy'ego.
20. Punkty krytyczne i ekstrema lokalne. Kryteria na ekstrema.
21. Wypukłość funkcji, nierówność Jensena, związek wypukłości z drugą pochodną.
22. Całka nieoznaczona. Zamiana zmiennych w całce. Całkowanie przez części.
23. Podstawowe typy całek. Całkowanie funkcji wymiernych.
24. Całkowanie funkcji trygonometrycznych.

25. Całkowanie funkcji niewymiernych.
26. Sumy: górna i dolna, suma wypunktowana, całki: górna i dolna. Całka Riemanna.
27. Własności całki. Klasy funkcji całkownych.
28. Podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego.
29. Twierdzenia o wartości średniej w rachunku całkowym.
30. Szeregi. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Suma szeregu geometrycznego.
31. Kryteria: d'Alemberta, Cauchy'ego, Leibniza, kryterium porównawcze.
32. Liczby zespolone i działania algebraiczne na nich. Płaszczyzna zespolona. Postać trygonometryczna liczby zespolonej.
33. Podstawowe twierdzenie algebry.
34. Pierwiastki  $n$ -tego stopnia z liczb zespolonych.