NOTATKI DO ĆWICZEŃ Z ALGEBRY METODĄ FIZYCZNĄ UPRAWIANEJ

Zadanie 1
Zbadać czy wektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, gdzie

$$i) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Odpowiedź: $i)$ tak: $\mathbf{v} = 2\,\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $ii)$ nie.

Zadanie 2
Czy wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7-i \\ 3+i \end{bmatrix},$$

są liniowo zależne? Zbadać sprawę nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad ciałem $\mathbb{C}$.
Rozwiązanie: Pytamy, czy równanie

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}\,,$$

(tłuste zero oznacza zero przestrzeni wektorowej, czyli wektor zerowy!) ma rozwiązanie dla $x_i \in \mathbb{R}$, gdy nad $\mathbb{R}$ oraz $x_i \in \mathbb{C}$ gdy nad $\mathbb{C}$. Rozwiążmy:

$$\begin{aligned} &x_1(1+2i) + x_2(7-i) = 0\,, \\ &x_1\, i + x_2(3+i) = 0\,, \end{aligned}$$

Z drugiego $x_1 = (-1+3i)x_2$ i to do pierwszego, co da: $[(1+2i)(-1+3i) + 7 - i]x_2 = 0$. To istotnie jest zero, niezależnie od wartości x_2. Rozwiązaniami są więc dowolne x_2 i $x_1 = (-1+3i)x_2$. Widać jednak, że jeśli $x_2 \in \mathbb{R}$ to x_1 jest zespolone. Zatem nad $\mathbb{R}$ wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, ale nad $\mathbb{C}$ zależne.

Zadanie 3
Zbadać liniową niezależność nad ciałem $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$ wektorów

$$i) \qquad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \qquad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: W przypadku $i)$ widać gołym okiem, że są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$ bo równanie $\lambda_1\,\mathbf{e}_1 + \lambda_2\,\mathbf{e}_2 + \lambda_3\,\mathbf{e}_3 + \lambda_4\,\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ ma rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$ dla dowolnego λ, a skoro są liniowo zależne nad $\mathbb{R}$ to i nad $\mathbb{C}$ też, bo $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Uwaga: ustalona wyżej liniowa zależność $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{e}_4$ oznacza, że np. $\mathbf{e}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{e}_4$, tj., że $\mathbf{e}_3$ jest kombinacją liniową pozostałych. W zasadzie zamiast badać istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\,\mathbf{e}_1 + \lambda_2\,\mathbf{e}_2 + \lambda_3\,\mathbf{e}_3 + \lambda_4\,\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$ moglibyśmy postawić problem, czy wektor $\mathbf{e}_3$ jest liniowo zależny od pozostałych. To jest jednak mniej ogólne: mogłoby się np. okazać, że sam wektor $\mathbf{e}_3$ nie daje sie przedstawić jako kombinacja liniowa $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_4$, ale te trzy wektory są liniowo zależne. Np. gdyby badać problem liniowej zależności wektorów

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

to okazałoby się (co w przypadku bardziej skomplikowanych wektorów nie musiałoby być od razu tak łatwo widoczne), że $\mathbf{v}_3$ nie jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$, niemniej te trzy wektory: $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne i tym samym cztery wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne. Badając ich liniową zależność przez pytanie o istnienie niezerowych rozwiązań równania $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 + \lambda_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$ dostalibyśmy, że niezerowym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = -\lambda_4 = \lambda$ i $\lambda_3 = 0$, czyli $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Jest jasne, że to nie pozwala wyrazić $\mathbf{v}_3$ przez pozostałe (bo $\lambda_3 = 0$).
W przypadku $ii)$ rozwiązujemy równanie $\xi_1\mathbf{f}_1 + \xi_2\mathbf{f}_2 + \xi_3\mathbf{f}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned} \xi_2 + i\xi_3 &= 0\,, \\ \xi_1 + i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 - i\xi_2 + \xi_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodając pierwsze pomnożone przez i do trzeciego dostajemy $\xi_1 = 0$. Uwzględniając to, z drugiego dodanego do trzeciego znajdujemy $2\xi_3 = 0$ czyli $\xi_3 = 0$ i wtedy (z pierwszego) $\xi_2 = 0$ też. Zatem wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są linowo niezależne nad obydwoma ciałami, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$.

Zadanie 4
Zbadać liniową zależność wektorów.

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Rozwiązujemy równanie $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \mathbf{0}$, czyli układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2ix_2 + x_3 &= 0\,, \\ ix_1 - x_2 + 2x_3 &= 0\,, \\ -ix_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Dodanie drugiego do trzeciego daje $x_3 = 0$. Wtedy pierwsze sprowadza się do $x_1 + ix_2 = 0$, a drugie do $ix_1 - x_2 = 0$, czyli do pierwszego pomnożonego przez i. Zatem szukanym rozwiązaniem jest $x_2 = ix_1$, $x_3 = 0$ i x_1 dowolne. Ponieważ albo x_1 albo x_2 jest zespolone (albo nawet oba) to wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ są liniowo zależne nad $\mathbb{C}$, ale nie nad $\mathbb{R}$.

Zadanie 5

Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne (nad $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$) to takimiż są i wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{f}_3 &= \phantom{\mathbf{e}_1 + {}} \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Jak zwykle pytamy, czy z faktu, że $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 = 0$ wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wiemy teraz także, iż równanie $\xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \xi_3\mathbf{e}_3 = 0$ ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Piszemy więc:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = \lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2 + \lambda_3\mathbf{f}_3 &= \lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Zatem na mocy założenia musimy mieć $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Drugie z pierwszym daje $\lambda_3 = 0$, wtedy trzecie daje $\lambda_1 = 0$ i na koniec z drugiego wynika wtedy że i $\lambda_2 = 0$.

Zadanie 6

Dowieść, że następujące zbiory wektorów-funkcji (tj. wektorów z przestrzeni $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) są liniowo niezależne

$$\begin{aligned} &a) && \sin x, \quad \cos x\,, \\ &b) && 1, \quad \sin x, \quad \cos x\,, \\ &c) && \sin x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \sin nx\,, \\ &d) && 1, \quad \cos x, \quad \cos 2x\,, \quad \ldots, \quad \cos nx \\ &e) && 1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \ldots, \quad \cos nx, \quad \sin nx\,. \end{aligned}$$

Rozwiązanie: W przypadku $a)$ jest jasne, że $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ może *dla wszystkich* $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ zachodzić tylko dla $\lambda = \xi = 0$: jeśli $x = k\pi$ i $x = l\pi + \frac{1}{2}\pi$ należą do (a, b) to jest to trywialne, jesli nie, to można zróżniczkować i ma się $\lambda \cos x - \xi \sin x = 0$ oraz

$\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ i znów jedynym rozwiązaniem obu dla wszystkich x-ów jest $\lambda = \xi = 0$. To samo w przypadku b): $\eta\, 1 + \lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ dla wszystkich $x \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ też wymaga $\eta = \lambda = \xi = 0$ (aby to zobaczyć, można znów zróżniczkować i dostaniemy ten sam problem, co w punkcie a). W przypadku c) możemy posłużyć się indukcją. Zakładamy, że wektory te są liniowo niezależne dla jakiegoś n (dla $n = 1$ jest to oczywiste) i sprawdzamy, czy z tego wynika to samo dla $n + 1$, to znaczy, że

$$f(x) \equiv \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \ldots + \lambda_n \sin nx + \lambda_{n+1} \sin(n + 1)x \equiv 0 \ ,$$

(symbol $\equiv$ przypomina, że ma to być 0 dla wszystkich x) tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Skoro ma to zachodzić dla wszystkich x to znaczy że i

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \equiv -\lambda_1 \sin x - 2^2\lambda_2 \sin 2x + \ldots - n^2\lambda_n \sin nx - (n + 1)^2\lambda_{n+1} \sin(n + 1)x \equiv 0 \ .$$

Mnożymy $f(x)$ przez $(n + 1)^2$ i dodajemy do tego tu wyżej, co da

$$[(n + 1)^2 - 1]\lambda_1 \sin x + [(n + 1)^2 - 4]\lambda_2 \sin 2x + \ldots + [(n + 1)^2 - n^2]\lambda_n \sin nx \equiv 0 \ ,$$

To zaś na mocy indukcyjnego założenia o liniowej niezależności wektorów $\sin x$, ..., $\sin nx$ oznacza, ze $[(n + 1)^2 - 1]\lambda_1 = [(n + 1)^2 - 4]\lambda_2 = \ldots = [(n + 1)^2 - n^2]\lambda_n = 0$. Stąd zeru muszą być wszystkie λ_i o $i = 1, \ldots, n$ z wyjątkiem ewentualnie k-tej, o takim k, że $(n + 1)^2 - k^2 = 0$. Ale to się nie może zdarzyć, bo w indukcji rozpatrujemy tylko $n + 1 > k$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$ i z tożsamościowego znikanie $f(x)$ wynika, iż także $\lambda_{n+1} = 0$. W przypadku d) także posługujemy się indukcją. Zakładamy, że teza (liniowa niezależność) jest prawdziwa dla n mamy pokazać, że

$$g(x) \equiv \eta + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \ldots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \cos(n + 1)x \equiv 0 \ ,$$

pociąga za sobą $\eta = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Mnożymy $g(x)$ przez $(n+1)^2$ i odejmujemy od tego dwakroć zróżniczkowane $g(x) = 0$. Jak wyżej wynika stąd, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$ i zostaje nam w $g(x) = 0$ tylko $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0$, co znów wymaga by $\eta = \lambda_{n+1} = 0$. Wreszcie w przypadku e) także zakładamy, że $\eta + \lambda_1 \cos x + \xi_1 \sin x + \lambda_n \cos nx + \xi_n \sin nx = 0$ tylko dla $\eta = \lambda_1 = \xi_1 = \ldots = \lambda_n = \xi_n = 0$ i robimy dla $n + 1$ sztuczkę z drugą pochodną, co zostawia nam $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n + 1)x + \xi_{n+1} \sin(n + 1)x = 0$. To też wymaga, by $\eta = \lambda_{n+1} = \xi_{n+1} = 0$ (choćby na mocy tego, że teza jest prawdziwa dla $n = 1$, a czymże się różni x od $(n + 1)x$? - tylko dziedziną...)

Zadanie 7
Dowieść, że wektory

$$\mathbf{f}_1 = \sin x \, , \qquad \mathbf{f}_2 = \sin^3 x \, , \qquad \mathbf{f}_3 = \sin 3x \, ,$$

z przestrzeni wektorowej $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ są liniowo zależne.
Rozwiązanie: To proste

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(1 - 2 \sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \, . \end{aligned}$$

Czyli $\mathbf{f}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$, co dowodzi, że $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ są liniowo zależne.

Zadanie 8
Dowieść, że wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$.
Uwaga: jeśli w wektorach, tj. w tych kwadratowych nawiasikach, mają być tylko liczby rzeczywiste - bo tak sobie *definiujemy* tę przestrzeń - to musi to być przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{R}$; gdybyśmy bowiem dopuścili mnożenie wektorów przez liczby zespolone, to w nawiasikach wystąpiłyby z konieczności także liczby zespolone wbrew naszemu określeniu tej przestrzeni. W drugą zaś stronę rzecz jest możliwa: możemy sobie arbitralnie określić przestrzeń wektorową w taki sposób, że w nawiasikach mogą wystąpić także liczby zespolone, ale dopuszczać tylko kombinacje liniowe o współczynnikach rzeczywistych. W takim przypadku stosują się uwagi o bazie i wymiarze takiej przestrzeni umieszczone na końcu tego zadania.
Rozwiązanie: Trzeba pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{w}$ można przedstawić jako kombinację liniową tych trzech, tj. w postaci $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}$. Niech $\mathbf{w} = [a, b, c]$. Trzeba pokazać, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= a\,, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b\,, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= c\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c\,, \\ 4x_1 \qquad + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad &= a - b + c\,, \end{aligned}$$

ma rozwiązanie. Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając je do trzeciego

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c\,, \\ 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c\,, \\ 2x_1 - 8x_3 &= -a - 3b + 3c\,. \end{aligned}$$

Teraz trzecie razy -2 i dodać do drugiego. Otrzymujemy $18x_3 = a + 7b - 5c$. Czyli mamy x_3. W podobny sposób można znaleźć $18x_1 = -5a + b + 7c$ oraz $18x_2 = 7a - 5b + c$ (symetria równań!). Łatwo sprawdzić, że to dobry wynik. Skoro jest (jednoznaczne) rozwiązanie dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$ to $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tworzą bazę.
Uwaga: Wyjaśnijmy sobie na najprostszym przykładzie jeszcze jedną sprawę: dwa wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

rozpinają całą przestrzeń wektorową V nad ciałem $\mathbb{R}$ składającą się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{o} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}\,,$$

bo dowolny taki wektor można przedstawić jako $\mathbf{w} = x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$, tj. jako kombinację liniową $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ z rzeczywistymi współczynnikami. Przestrzeń ta jest zatem dwuwymiarowa, bo jej baza składa się z dwu wektorów. Te same dwa wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ nie rozpinają jednak całej przestrzeni wektorowej W, też nad ciałem $\mathbb{R}$, składającej się z wektorów postaci

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{o} \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}\,,$$

bo np. wektora

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},$$

nie można dostać z kombinacji linowej $x_1\,\mathbf{e}_1 + x_2\,\mathbf{e}_2$ o *rzeczywistych* współczynnikach x_1 i x_2. Do tego trzeba wziąć większą bazę, np.:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}.$$

Czyli taka przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{R}$) jest czterowymiarowa. Oczywiście, jeśli przestrzeń wektorowa jest nad ciałem $\mathbb{C}$ to te cztery powyższe wektory są parami do siebie proporcjonalne ($\mathbf{e}_2 = i\,\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_4 = i\,\mathbf{e}_3$), czyli liniowo zależne. Wtedy baza ma dwa wektory i ta przestrzeń wektorowa (nad ciałem $\mathbb{C}$) jest tylko dwuwymiarowa.

Zadanie 9

Znaleźć wymiar i jakąś bazę podprzestrzeni wektorowej $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Ponieważ $\mathbb{R}^4$ ma wymiar 4, zatem przynajmniej jeden z tych wektorów musi być liniowo zależny od pozostałych. Odrzućmy ostatni (bo ma brzydkie liczby). Aby zobaczyć, czy pierwsze cztery są liniowo zależne spróbujmy (trochę na "chybił -trafiał") zapisać czwarty jako kombinację liniową trzech pierwszych, tj. jako $\mathbf{v}_4 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$. To daje układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1\,, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

Weźmy trzy pierwsze na razie. Odjąć od trzeciego pierwsze. To da $x_2 = 4x_3$. Wstawiamy to do dwu pierwszych i mamy układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 15x_3 &= -1\,, \\ x_1 + 11x_3 &= 1\,. \end{aligned}$$

To łatwo rozwiązać (drugie razy dwa i odjąć od pierwszego). Stąd mamy jako rozwiązanie układu trzech pierwszych równań

$$x_1 = -\frac{26}{7}\,, \qquad x_2 = \frac{12}{7}\,, \qquad x_3 = \frac{3}{7}\,.$$

Teraz możemy sprawdzić ostatnie

$$-\frac{26}{7} + 2 \cdot \frac{12}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = 1\,.$$

(Cztery równania na trzy zmienne - trzeba mieć szczęście żeby tak się udało!!) To dowodzi, że cztery pierwsze wektory są liniowo zależne bo

$$-\frac{26}{7}\mathbf{v}_1 + \frac{12}{7}\mathbf{v}_2 + \frac{3}{7}\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}\,.$$

Zarazem z jednoznaczności tego rozwiązania wynika, że jak byśmy wzięli którekolwiek dwa wektory z $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ to się nie uda, tzn. $\mathbf{v}_4$ nie jest kombinacją liniową tylko dwu z nich. Zatem wymiar podprzestrzeni E jest równy conajmniej 3. Skoro jednak się okazało, że z czterech wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ tylko trzy są liniowo niezależne, to trzeba wrócić i zapytać, czy nie jest w takim razie możliwe dołączenie $\mathbf{v}_5$, tzn. trzeba sprawdzić czy układ wektorów $\mathbf{v}_1$ $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$, nie jest przypadkiem liniowo niezależny. Jeśli jest, to $\mathbf{v}_5$ się powinnien dać zapisać jako $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4$. Sprawdźmy to:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 - x_4 &= 2\,, \\ x_1 - \ x_3 + x_4 &= 3\,, \\ 2x_1 - \ x_3 - x_4 &= 7\,, \\ x_1 + 3x_3 + x_4 &= -2\,. \end{aligned}$$

Najpierw rozwiązujemy pierwsze trzy: od pierwszego trzecie da $4x_3 = -5$, czyli $x_3 = -\frac{5}{4}$. To do drugiego i trzeciego:

$$\begin{aligned} x_1 + x_4 &= \frac{7}{4}\,, \\ 2x_1 - x_4 &= \frac{23}{4}\,. \end{aligned}$$

Dodanie stronami da $x_1 = \frac{10}{4}$ i wtedy z pierwszego wyżej $x_4 = \frac{7}{2} - \frac{10}{4} = -\frac{3}{4}$. Łatwo sprawdzić, że to jest dobre rozwiązanie trzech pierwszych równań. Sprawdzamy teraz ostatnie, czwarte: $x_1 + 3x_3 + x_4 = \frac{10}{4} - 3 \cdot \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{8}{4} = -2$. Czyli to czwarte też jest wtedy spełnione! Zatem ostatecznie $\mathbf{v}_5$ jest kombinacją liniową $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, i $\mathbf{v}_4$ czyli jest od nich liniowo zależny. Ponieważ już wiemy, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ też są liniowo niezależne, więc bazę podprzestrzeni E mogą tworzyć wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$.

Zadanie 10
Jak w zadaniu 9 tylko z wektorami

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

Rozwiązanie: Jak i poprzednio (nawet nad ciałem $\mathbb{R}$, bo wszystkie liczby w kolumienkach są czysto rzeczywiste) pięć wektorów nie może być liniowo niezależnych. Teraz jednak postapimy bardziej regulaminowo i zbadamy warunek

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 + \lambda_4 \mathbf{v}_4 + \lambda_5 \mathbf{v}_5 = \mathbf{0} .$$

Mamy zatem układ równań:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 \qquad &= 0 , \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 + \lambda_5 &= 0 , \\ \lambda_2 + \lambda_3 + 3\lambda_4 + 2\lambda_5 &= 0 , \\ -\lambda_1 \qquad + \lambda_3 + 4\lambda_4 + 3\lambda_5 &= 0 . \end{aligned}$$

Drugie od trzeciego daje $\lambda_4 + \lambda_5 = 0$; pomijając trzecie piszemy więc pozostałe równania (eliminując z nich λ_5):

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 , \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 , \\ -\lambda_1 \qquad + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Teraz ostatnie minus przedostatnie da $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Po wykorzystaniu tego pierwsze i trzecie stają się tożsame z drugim. Zatem zostaje do spełnienia tylko $\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$; mamy więc jedno równanie na trzy niewiadome! Widać, że rozwiązanie można napisać w postaci

$$\lambda_1 = \xi , \qquad \lambda_2 = -\xi , \qquad \lambda_3 = \xi - \eta , \qquad \lambda_4 = \eta , \qquad \lambda_5 = -\eta .$$

ξ i η są tu zupełnie dowolnymi liczbami. Mamy zatem dla dowolnych wartości ξ i η związek

$$\xi\, \mathbf{v}_1 - \xi\, \mathbf{v}_2 + (\xi - \eta)\, \mathbf{v}_3 + \eta\, \mathbf{v}_4 - \eta\, \mathbf{v}_5 = \mathbf{0} .$$

Możemy tu np. położyć $\xi = 0$ i $\eta = 1$ albo $\xi = 1$ i $\eta = 0$, co da związki

$$\mathbf{v}_5 = -\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 , \qquad \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 ,$$

pokazujące, że np. $\mathbf{v}_1$ oraz $\mathbf{v}_5$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowych $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$. Te trzy wektory mogą więc stanowić bazę całej podprzestrzeni rozpiętej przez $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ i $\mathbf{v}_5$.

Zadanie 11
Znaleźć sumę prostą i przecięcie dwu podprzestrzeni w $\mathbb{R}^3$ rozpinanych przez dwa zbiory wektorów:

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\},$$

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rozwiązanie: Najpierw znajdziemy ich sumę prostą. Jeśli 3 wektory V (lub W) są liniowo niezależne, to rozpinają całą przestrzeń wektorową $\mathbb{R}^3$ i $V = \mathbb{R}^3$ ($W = \mathbb{R}^3$) i wtedy w oczywisty sposób $V \oplus W = \mathbb{R}^3$. Sprawdźmy więc liniową niezależność wektorów z V. Układ

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0\,, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0\,, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

ma jak łatwo sprawdzić tylko rozwiązanie $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, zatem rzeczywiście $V = \mathbb{R}^3$ i $V \oplus W = \mathbb{R}^3$. Jeśli zaś chodzi o W to gołym okiem widać, że $\mathbf{w}_3 = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, więc podprzestrzeń W jest tylko dwuwymiarowa i jest rozpinana np. przez $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$. Ponieważ $V = \mathbb{R}^3$ to przecięcie V z W, tj. poprzestrzeń utworzona przez wyktory takie,że należą one jednocześnie do V i do W jest samą podprzestrzenią W (bo $W \subset V = \mathbb{R}^3$).

Zadanie 12
Znaleźć wymiar i podać jakąś bazę podprzestrzeni $E \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć także ogólną postać wektora z E.
Rozwiązanie: Znów zobaczmy, czy się da przedstawić $\mathbf{w}_4$ w postaci $x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3$. Aby się dało musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \qquad &= 1\,, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3\,, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3\,, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7\,. \end{aligned}$$

Rozwiążmy trzy pierwsze, a potem sprawdzimy ostatnie. Drugie minus pierwsze daje $x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1$. To do trzeciego i mamy razem z pierwszym układ (kolejny!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1\,, \\ \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 &= 2\,. \end{aligned}$$

Stąd już łatwo i mamy jako rozwiązanie trzech pierwszych

$$x_1 = 2\ , \qquad x_2 = -1\ , \qquad x_3 = 0\,.$$

(Łatwo sprawdzić, że to rozwiązuje trzy pierwsze równania). Teraz sprawdzamy czwarte:

$$2 \cdot (4) - 1 \cdot (1) + 0 \cdot (3) = 7\,.$$

Hurra! Znów się udało! Czyli $\mathbf{w}_4$ jest liniowo zależny od $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Co więcej znów rozwiązanie jest jednoznaczne, więc wszystkie trzy, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$, są już liniowo niezależne. Zatem wymiar $\dim E = 3$, a jej bazą mogą być te trzy wektory.

Oczywiście dowolny wektor należący do E ma postać

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + x_3\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Na użytek zadania 14 wygodnie będzie przedstawić ten wektor tak, że trzy jego pierwsze składowe będą dowolne, a czwarta będzie się wyrażała przez trzy pierwsze. W tym celu zastępujemy w drugim i trzecim wierszu $x_1 + x_2$ przez a, tak by znikło z nich x_1

$$\begin{bmatrix} a \\ 2a - x_2 + 2x_3 \\ 3a + x_3 \\ 4a - 3x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

W następnym kroku zastępujemy $3a + x_3$ przez c a w drugim i czwartym wierszu zastępujemy x_3 przez $c - 3a$. W ten sposób

$$\begin{bmatrix} a \\ -4a + 2c - x_2 \\ c \\ -5a + 3c - 3x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

Wreszcie, w drugim wierszu zastępujemy $-4a + 2c - x_2$ przez b, a w czwartym zamiast x_2 dajemy $-4a + 2c - b$. W ten sposób postać wektora z E jest taka

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3b - 3c \end{bmatrix}.$$

Zadanie 13
Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $F \subset \mathbb{R}^4$ rozpiętej przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} 2y - 2z - t = 0 \\ x - 4y + 4z + 2t = 0 \end{array}.$$

Rozwiązanie: dwa razy pierwszy warunek plus drugi da $x = 0$. Z pierwszego zaś mamy, że $t = 2y - 2z$. Wektory rozpinające E są więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y-2z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \equiv y\,\mathbf{e}_1 + z\,\mathbf{e}_2\,.$$

Wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ są ewidentnie liniowo niezależne. Zatem $\dim F = 2$ i jej bazą mogą być $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Zadanie 14
Znaleźć wymiary i podać jakieś bazy sumy oraz przecięcia podprzestrzeni E z zadania 12 i podprzestrzeni F z zadania 13.
Rozwiązanie: Conajmniej jeden z pięciu wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rozpinających $E \oplus F$ musi być liniowo zależny od pozostałych. Wyrzućmy pierwszy bo najbardziej skomplikowany. Zobaczmy następnie, czy $\mathbf{w}_2$ się da zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$. Gołym okiem widać, że się nie da. Co więcej, łatwo sprawdzić, że równanie $x\,\mathbf{w}_3 + y\,\mathbf{w}_4 + z\,\mathbf{w}_5 = \mathbf{0}$ ma tylko rozwiązanie $x = y = z = 0$. Zatem $E \oplus F = \mathbb{R}^4$, bo jest rozpinana przez cztery wektory $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, które można przyjąć za jej bazę.

Teraz przecięcie E i F. Tworzą je wektory należące i do E i do F. Oznacza to, że wektory te muszą się dać jednocześnie przedstawić w dwu postaciach

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ 7a + 3(b-c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y - 2z \end{bmatrix}.$$

Widać, że aby tak było musi być $a = 0$, $b = y$, $c = z$ i do tego jeszcze musi zachodzić równość $7a + 3(b-c) = 2(y-z)$. Ale skoro $a = 0$, $b = y$, $c = z$ to może tak być tylko dla

$b = c$. Zatem ogólną postacia wektora należącego do przecięcia podprzestrzeni E i F jest

$$\begin{bmatrix} 0 \\ b \\ b \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem przecięcie E i F jest podprzestrzenią jednowymiarową rozpinaną przez jakikolwiek wektor powyższej postaci (np. z $b = 1$).

Zadanie 15
Pokazać, że podprzestrzeń liniowa $E \subset \mathbb{R}^4$ złożona z wektorów postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \qquad \begin{array}{c} 3z - 4t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{array},$$

jest rozpinana przez dwa wektory.
Rozwiązanie: Warunki są dwa na cztery składowe. Weźmy x i z jako niezależne. Wtedy $t = \frac{3}{4}z$ oraz (po wstawieniu tego do drugiego warunku) $x - y + \frac{7}{4}z = 0$, czyli $y = x + \frac{7}{4}z$. Zatem każdy wektor z E musi mieć postać

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 16
Pokazać, że podprzestrzeń E rozpięta przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ postaci

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zawiera wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{oraz} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix},$$

oraz, że wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ rozpinają tę samą podprzestrzeń E.
Rozwiązanie: Najpierw trzeba pokazać, że równania $x_1\,\mathbf{v}_1 + x_2\,\mathbf{v}_2 + x_3\,\mathbf{v}_3 + x_4\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1$

oraz $y_1\,\mathbf{v}_1 + y_2\,\mathbf{v}_2 + y_3\,\mathbf{v}_3 + y_4\,\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_2$ mają rozwiązania. Pierwsze daje układ równań

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad + 2x_3 + 3x_4 &= 1\,, \\ ix_2 - ix_3 \qquad &= i\,, \\ 2x_1 \qquad + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3\,, \\ ix_1 + (1-i)x_2 \qquad + x_4 &= 1\,. \end{aligned}$$

Z drugiego $x_2 - x_3 = 1$, czyli $x_2 = 1 + x_3$. To do pozostałych trzech, co da układ

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + 2x_3 + 3x_4 &= 1\,, \\ 2x_1 \qquad + 2x_3 + 4x_4 &= 2\,, \\ ix_1 + (1-i)x_3 + x_4 &= i\,. \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $x_1 = 1 - x_4$. To do pierwszego i trzeciego

$$\begin{aligned} 2(x_3 + x_4) &= 0\,, \\ (1-i)(x_3 + x_4) &= 0\,. \end{aligned}$$

Czyli da się przedstawić $\mathbf{w}_1$, z tym, że nie w sposób jednoznaczny. To zaś oznacza, że same wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne (czyli $\dim E < 4$). Istotnie, widać, że $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem by dowieść, że $\mathbf{w}_2 \in E$, wystarczy pokazać, że $\mathbf{w}_2 = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$. Widać, że $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ po prostu. Ogólniej, można zauważyć, że

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \xi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4)\,, \end{aligned}$$

dla dowolnych λ i ξ ponieważ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Stąd dla $\lambda = -1$ uzyskujemy związek

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3\,.$$

Następnie kładąc raz $\lambda = 1$, $\xi = 2$, a drugi raz $\lambda = 1$, $\xi = 1$ dostajemy dwa układy równań

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,, \\ \mathbf{w}_2 &= 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_4\,, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= 2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,, \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\,. \end{aligned}$$

Z pierwszego układu, odejmując pierwsze od drugiego otrzymujemy

$$\mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{w}_1\,,$$

gdzie w drugim kroku wykorzystany został otrzymany już wyżej związek $\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_3$. Z drugiego zaś układu, odejmując od pierwszego drugie, dostajemy

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3\,.$$

Tak więc możemy wyrazić $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ przez $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3 \,, \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3 \,, \end{aligned}$$

(co łatwo sprawdzić). Zatem każdy wektor postaci $\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 + \gamma\mathbf{v}_3 \in E$ można napisać jako

$$\alpha(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3) + \gamma\mathbf{v}_3 = \alpha\mathbf{w}_1 + (\beta - \alpha)\mathbf{w}_2 + (\alpha - \beta + \gamma)\mathbf{w}_3 \,.$$

Zatem wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ i $\mathbf{v}_3$ także rozpinają E. Zauważmy jeszcze na koniec, że nie zastanawialiśmy się tutaj, nad jakim ciałem rozpięta jest przestrzeń wektorowa, do której należą rozpatrywane tu wektory. Ponieważ liczby występujące w wektorach $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są zespolone, a priori odpowiedź na postawione pytania mogłaby zależeć od tego, czy ciałem tym jest $\mathbb{C}$, czy tylko $\mathbb{R}$. Wyszło nam jednak, że wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są kombinacjami liniowymi o współczynnikach czysto rzeczywistych wektorów $\mathbf{v}_i$, a to oznacza, że odpowiedź nie zależy od tego, czy ciałem jest $\mathbb{C}$ czy $\mathbb{R}$.

Uwaga. Jak dotąd liniową (nie)zależność zbioru wektorów sprawdzaliśmy badając bezpośrednio warunek zerowania się ich kombinacji liniowej. Później nauczymy się robić to badając rząd odpowiedniej macierzy utworzonej z tych wektorów.

Zadanie 17

W pewnej bazie pewnej przestrzeni wektorowej (o której charakterze nic nie musimy w zasadzie wiedzieć) wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ mają współrzędne (składowe)

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ $\mathbf{v}_3$ są także bazą tej przestrzeni i podać w tej nowej bazie współrzędne wektora $\mathbf{w}$, który w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 9, 14)$.

Uwaga: Użyliśmy wyżej symbolu := aby podkreślić, że w zasadzie nie należy utożsamiać wektora z jego składowymi: wektor pozostaje sobą niezależnie od naszego wyboru bazy; składowe zaś od tego wyboru jak najbardziej zależą! W tych notatkach składowe wektorów będziemy zawsze pisać w nawiasach okrągłych aby podkreślić, że nie należy ich mylić z wektorami z przestrzeni $\mathbb{R}^n$, które zawsze pedantycznie piszemy w nawiasach prostokątnych. Np. jeden i ten sam wektor $\mathbf{w}$ z $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ma w kanonicznej bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(1,2,3)$, bo $\mathbf{w} = 1\cdot\mathbf{e}_1 + 2\cdot\mathbf{e}_2 + 3\cdot\mathbf{e}_3$, a w bazie $\mathbf{f}_i$, $i = 1,2,3$

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

składowe $(0,2,1)$ bo, jak łatwo zobaczyć, $\mathbf{w} = 0\cdot\mathbf{f}_1 + 2\cdot\mathbf{f}_2 + 1\cdot\mathbf{f}_3$. Zauważmy jednak, że w zadaniu, w odróżnieniu od tego przykładu (w którym wektory są kolumnami liczbowymi, na których umiemy bezpośrednio wykonywać działania), nie mamy dostępu do "żywych" wektorów: nie wiemy, czym są $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (mogą one być strzałkami w przestrzeni, wielomianami, albo żyrafami, jeśli komuś się uda nadać zbiorowi żyraf strukturę przestrzeni wektorowej) i jedyne czym dysponujemy, to informacja, że $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ są wektorami liniowo niezależnymi oraz składowym wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ i $\mathbf{w}$ w bazie tworzonej przez wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Rozwiązanie: Niech wyjściową bazą będą wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Odejmijmy pierwsze od drugiego:

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\ .$$

To do dwu pozostałych:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,. \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\,, \\ \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 &= 3\,\mathbf{v}_1 - 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,. \end{aligned}$$

Od drugiego pierwsze oraz od dwa razy pierwszego drugie. Razem więc mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3\,, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,, \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,. \end{aligned}$$

Udało się jednoznacznie wyrazić trzy liniowo niezależne (z założenia) wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, co oznacza, że te drugie też są liniowo niezależne, czyli też mogą być bazą przestrzeni.[1] Możemy teraz przerobić wektor $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= 6\,\mathbf{e}_1 + 9\,\mathbf{e}_2 + 14\,\mathbf{e}_3 \\ &= 6\,(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 9\,(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 14\,(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 3\,\mathbf{v}_3\,,\end{aligned}$$

czyli współrzędne $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ to $(1, 2, 3)$. Zapiszmy uzyskany wyżej związek za pomocą macierzy:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mnożenie "paluchowe" podrazumywajetsia. Stojąca tu macierz jest tzw. *macierzą zmiany bazy* lub *macierzą przejścia*; dokładniej, jest to macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ do bazy $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, 3$. Macierz taką będziemy oznaczać $R_{v\leftarrow e}$, aby podkreślić, że pozwala one ze składowych wektora w bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ otrzymać jego składowe w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$.

Stosując konwencję sumacyjną wujka A.E. można powyższy wzór z macierzą zapisać jako $\mathbf{e}_k = \mathbf{v}_j [R_{v\leftarrow e}]^j{}_k$. Konwencja polega na *niepisaniu* w prawej stronie sumy po wartościach wskaźnika j od 1 do 3. Jawnie wzór ten mówi, że np. $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1\,[R_{v\leftarrow e}]^1{}_1 + \mathbf{v}_2\,[R_{v\leftarrow e}]^2{}_1 + \mathbf{v}_3\,[R_{v\leftarrow e}]^3{}_1$, gdzie $[R_{v\leftarrow e}]^1{}_1 = 1$, $[R_{v\leftarrow e}]^2{}_1 = 1$, $[R_{v\leftarrow e}]^3{}_1 = -1$, etc.

Jeśli teraz napiszemy wektor $\mathbf{w}$ w postaci $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w^i_{(e)}$ (indeksik e u $w^i_{(e)}$ ma przypominać że $w^i_{(e)} = (6, 9, 14)$ to są współrzędne tego wektora w bazie $\mathbf{e}_i$), to będziemy mieć:

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_i\,w^i_{(e)} = \mathbf{v}_k\,[R_{v\leftarrow e}]^k{}_i\,w^i_{(e)} \equiv \mathbf{v}_k\,w^i_{(v)}\,.$$

gdzie $(R_{v\leftarrow e})^k{}_i$ jest macierzą zmiany bazy,[2] a związek $w^i_{(v)} = [R_{v\leftarrow e}]^k{}_i w^i_{(e)}$ jawnie wygląda tak:

$$\begin{pmatrix} w^1_{(v)} \\ w^2_{(v)} \\ w^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

[1] W dalszym toku ćwiczeń zobaczymy, że liniową niezależność wektorów $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, można sprawdzić badając rząd macierzy utworzonej z postawionych obok siebie ich składowych (w dowolnej bazie), co z kolei można sprowadzić do sprawdzenia, czy wyznacznik takiej macierzy jest niezerowy. Tu jednak dzięki przyjętemu sposobowi sprawdzania mamy od razu wynik przydatny dalej w tym zadaniu.

[2] Matematycy z Katedry Metod Matematycznych Fizyki zwykli macierz $R_{v\leftarrow e}$ oznaczać Id (w ich notacji jest to $[\mathrm{Id}]^v{}_e$), co jest dobrze uzasadnione, jako że (jak to się stanie dalej jasne) jest to w istocie rzeczy macierz odwzorowania identycznościowego - tj. liniowego odwzorowania Id: $V \to V$, które każdemu wektorowi $\mathbf{v} \in V$ przypisuje ten sam wektor $\mathbf{v} \in V$, tylko zapisana "z dwu stron" (co to znaczy wyjaśni się dalej) w dwu różnych bazach; ponieważ fizycy muszą się jednak różnić od matematyków (niechby i mniejszą logiką stosowanych oznaczeń!), w tym skrypcie macierz zmiany bazy w przestrzeni wektorowej oznaczam R, a macierz zmiany bazy w przestrzeni kowektorów (pojawi się dalej) P.

Takie właśnie składowe $w^i_{(e)}$ otrzymaliśmy już wcześniej (w istocie rzeczy w ten sam sposób, tylko bez tego sztafażu, który jednakowoż na dłuższą metę jest niezwykle wygodny).

Jak już wszystko "rozebraliśmy" w szczegółach, to możemy teraz macierz $R_{v\leftarrow e}$ otrzymać prostszym sposobem. Rozłóżmy najpierw całkiem ogólny wektor $\mathbf{w} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3$ na wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. Sprowadza się to do rozwiązania układu równań:[3]

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Rozwiązujemy i znajdujemy: $\alpha = a + b - c$, $\beta = a - 2b + c$, $\gamma = -a + b$. Liczby te są składowymi wektora $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{v}_i$. Powinno się je otrzymywać z działania macierzy $R_{v\leftarrow e}$ na składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{e}_i$:

$$R_{v\leftarrow e}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b-c\\a-2b+c\\-a+b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\1 & -2 & 1\\-1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

W drugim kroku po zapisaliśmy wynik działania (nieznanej jeszcze!) macierzy $R_{v\leftarrow e}$ na składowe (a, b, c) w postaci konkretnej macierzy działającej na (a, b, c). Ponieważ składowe te są dowolne (za a, b i c można podstawić dowolne liczby), to co się otrzymuje musi być właśnie macierzą $R_{v\leftarrow e}$!

Zadanie 18
Jak w zadaniu 17 tylko teraz

$$\mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix}3\\2\\-5\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

a wektor $\mathbf{w}$ w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 2, -7)$.
Rozwiązanie: Znów piszemy

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{v}_2 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - 5\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,.\end{aligned}$$

Trzecie dodać do pierwszego, a potem dwa razy trzecie do drugiego

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3\,,\\ \mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 &= 5\,\mathbf{e}_1 - 3\,\mathbf{e}_3\,,\end{aligned}$$

[3] Po prostu składowe wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ ale potraktowane tu jakby były wektorami z $\mathbb{R}^3$, muszą być kombinacjami liniowymi składowych wektorów $\mathbf{v}_i$ (w bazie $\mathbf{e}_i$) też potraktowanych jak wektory z $\mathbb{R}^3$. Trzeba jednak pamiętać, że to nie są wektory tylko składowe. I jak tu nie dostać algebraicznego kręćka!?

Teraz pierwsze razy 3, drugie razy 2 i odjąć, oraz pierwsze razy 5, a drugie razy 3 i odjąć:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Do tego jeszcze

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_3\\ &= (-3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3 + (-5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\\ &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Razem więc

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_2 &= -8\,\mathbf{v}_1 + 5\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,,\\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + 3\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,.\end{aligned}$$

Czyli macierz $R_{v\leftarrow e}$ zmiany bazy ma postać

$$R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

a współrzędne $w^i_{(v)}$ wektora $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ $i = 1, 2, 3$ to

$$\begin{pmatrix} w^1_{(v)}\\ w^2_{(v)}\\ w^3_{(v)}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6\\ 2\\ -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Oczywiście mając wyjściowe wzory wyrażające wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ w postaci kombinacji liniowych bazowych wektorów $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$, mamy od razu "za darmo" macierz przejścia $R_{e\leftarrow v}$:

$$R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ -3 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Macierze $R_{e\leftarrow v}$ i $R_{v\leftarrow e}$ muszą być ze sobą oczywiście jakoś związane. Związek ten jest oczywisty: skoro macierz $R_{v\leftarrow e}$ robi ze składowych $w^i_{(e)}$ w bazie $\mathbf{e}_i$ dowolnego wektora $\mathbf{w}$ jego składowe $w^i_{(v)}$ w bazie $\mathbf{e}_j$, a macierz $R_{e\leftarrow v}$ zamienia na powrót składowe $w^i_{(v)}$ w składowe $w^i_{(e)}$, to powinniśmy mieć

$$w^i_{(e)} = [R_{e\leftarrow v}]^i{}_j w^j_{(v)} = [R_{e\leftarrow v}]^i{}_j [R_{v\leftarrow e}]^j{}_k w^k_{(e)}\,.$$

tj.[4] $[R_{e\leftarrow v}]^i{}_j [R_{v\leftarrow e}]^j{}_k = \delta^i{}_k$. Macierzowo:

$$R_{e\leftarrow v}\cdot R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Zachęcam do sprawdzenia, że istotnie iloczyn daje macierz jednostkową!). Oczywiście mamy także

$$R_{v\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tak więc $[R_{v\leftarrow e}]^{-1} = R_{e\leftarrow v}$, a $[R_{e\leftarrow v}]^{-1} = R_{v\leftarrow e}$.

Uwaga: W związku z powyższym zadaniem zauważmy, że znaleźliśmy sposób odwracania macierzy kwadratowych.[5] Inny bardziej "teoretyczny" sposób zostanie podany dalej. Niemniej sposób tu znaleziony pozostanie i tak naogół najużyteczniejszym z praktycznego punktu widzenia.

Zadanie 19

Znaleźć macierze odwrotne do macierzy

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Zacznijmy od drugiej macierzy (wymiaru 3×3) wykorzystując to, co ustaliliśmy wyżej: interpretujemy sobie tę macierz jako macierz zmiany bazy $R_{e\leftarrow v}$, co pozwala napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1\,, \\ \mathbf{v}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{v}_3 &= -3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Układ ten traktujemy jak układ równań na $\mathbf{e}_i$ i rozwiązujemy względem $\mathbf{e}_i$, co tu akurat jest proste:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1\,, \\ \mathbf{e}_2 &= -2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,, \\ \mathbf{e}_3 &= 7\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,. \end{aligned}$$

[4]Definicja symbolu $\delta^i{}_k$ czyli tzw. delta Kroneckera: $\delta^i{}_k = 1$ gdy $i=k$ i $\delta^i{}_k = 0$ gdy $i\neq k$. Kronecker to ten, co mówił, że dobry Pan Bóg stworzył liczby naturalne, a inne to już ludzie.

[5]Tzw. nieosobliwych macierzy kwadratowych. Nie każda macierz kwadratowa daje się odwrócić (macierze niekwadratowe oczywiście nie mają odwrotnych). Ale macierze zmiany bazy z samej swojej istoty są zawsze odwracalne, czyli należą do pospolitego gatunku macierzy nieosobliwych.

Stąd odczytujemy, że

$$R_{v\leftarrow e} = [R_{e\leftarrow v}]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Sprawdzamy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tak jak być powinno.

W przypadku trzeciej macierzy postępujemy analogicznie:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \,, \\ \mathbf{v}_4 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \,. \end{aligned}$$

Biorąc sumę i różnicę pierwszego i trzeciego równania oraz sumę i różnicę drugiego i czwartego (jak kto woli, moňa też równania dobrać w pary inaczej) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 2\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 &= 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_4 \,, \\ \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4 &= 2\,\mathbf{e}_1 - 2\,\mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_4 &= 2\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_4 \,. \end{aligned}$$

Robiąc to samo raz jeszcze znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4\right), \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\right), \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4\right), \\ \mathbf{e}_4 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4\right), \end{aligned}$$

Mamy więc (mnożenie macierzy przez liczbę to oczywiście mnożenie przez tę liczbę *każdego* elementu owej macierzy):

$$R_{e\leftarrow v} \cdot R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(z dokładnością do czynnika 1/4 macierz odwrotna jest tu równa macierzy wyjściowej).

Wreszcie, w przypadku pierwszej macierzy 2×2 można by robić tak jak wyżej, ale prościej (i na przyszłośc bardziej przydatnie) jest zapamiętać regułkę:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Zakładamy tu, że $ad-bc \neq 0$; jeśli $ad-bc = 0$, to macierz jest osobliwa i nie ma odwrotnej. (Wyrażenie $ad - bc$ jest to jej *wyznacznik* - będzie o nich dalej).

Zadanie 20
Sprawdzić, że wielomiany

$$\mathbf{w}_1 = x + 1\,, \qquad \mathbf{w}_2 = x - 1\,, \qquad \mathbf{w}_3 = x^2 + x\,,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa i znaleźć współrzędne (składowe) w tej bazie wielomianu $\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1$.
Rozwiązanie: Trzeba sprawdzić, że $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ są liniowo niezależne, czyli, że równość

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 = \mathbf{0}\,,$$

dla wszystkich wartości x zachodzi tylko gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To widać (tu znów możemy operować na "żywych" wektorach): zachodzenie dla dowolnego x równości

$$\lambda_1 (x + 1) + \lambda_2 (x - 1) + \lambda_3 (x^2 + x) = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\, x + \lambda_3\, x^2 = 0\,,$$

wymaga by $\lambda_3 = 0$, oraz by $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A to rzeczywiście zachodzi tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Czyli są liniowo niezależne, a zatem tworzą bazę. Chcemy teraz napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1 &= \mathbf{w}_1\, v^1_{(w)} + \mathbf{w}_2\, v^2_{(w)} + \mathbf{w}_3\, v^3_{(w)} \\ &= (x + 1)\, v^1_{(w)} + (x - 1)\, v^2_{(w)} + (x^2 + x)\, v^3_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Czyli $v^3_{(w)} = 2$ oraz $v^1_{(w)} + v^2_{(w)} + v^3_{(w)} = 3$ i $v^1_{(w)} - v^2_{(w)} = 1$. Stąd $v^1_{(w)} = 1$, $v^2_{(w)} = 0$. Istotnie

$$1 \cdot (x + 1) + 2 \cdot (x^2 + x) = 2x^2 + 3x + 1\,.$$

Zadanie 21
W bazie $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ mają składowe (współrzędne) $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 3)$ oraz $(3, 8, 2)$, zaś wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ mają w tejże samej bazie składowe $(3, 5, 8)$, $(5, 14, 13)$ i $(1, 9, 2)$. Sprawdzić, że trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ lub trzy wektory $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$ także tworzą dwie inne bazy tej samej przestrzeni i znaleźć macierz przejścia z jednej z nich do drugiej.
Rozwiązanie: Tu z kolei nie wiemy, czym są w istocie te wektory i operujemy wyłącznie na składowych. Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 8\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \end{aligned}$$

Drugie od 2×pierwszego: $2\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, czyli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. To do pierwszego i trzeciego:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,, \\ \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 8\,\mathbf{e}_2 + 2\,(\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\,, \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} 3\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,, \\ 4\,\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 10\,\mathbf{e}_2\,, \end{aligned}$$

Teraz 3× pierwsze od drugiego i mamy $\mathbf{e}_2 = -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 3\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3(-5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)\,, \\ \mathbf{e}_3 &= -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\,. \end{aligned}$$

Reasumując: trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ da lo się wyrazić przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 18\,\mathbf{v}_1 - 4\,\mathbf{v}_2 - 3\,\mathbf{v}_3\,, \\ \mathbf{e}_2 &= -5\,\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,, \\ \mathbf{e}_3 &= -7\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\,, \end{aligned}$$

więc $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ też mogą być (są) bazą. W podobny sposób można wyrazić $\mathbf{e}_i$ także przez $\mathbf{w}_j$, ale już nie będziemy tu tego robić (w zasadzie trzeba by, aby dowieść, że $\mathbf{w}_j$ też są bazą). Mamy teraz związki (w konwencji sumacyjnej):

$$\mathbf{e}_j = \mathbf{v}_l\,[R_{v\leftarrow e}]^l{}_j\,, \qquad \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow w}]^j{}_i\,.$$

$R_{v\leftarrow e}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{v}_l$, którą odczytujemy ze wzorów wyrażających wektory $\mathbf{e}_j$ przez wektory $\mathbf{v}_l$, a macierz $R_{e\leftarrow w}$ jest macierzą przejścia z bazy $\mathbf{w}_i$ do bazy $\mathbf{e}_j$, odwrotną do macierzy $R_{w\leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_j$ do bazy $\mathbf{w}_i$ (której tu nie wyliczyliśmy). Łącząc te wzory otrzymujemy

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_l\,[R_{v\leftarrow e}]^l{}_j\,[R_{e\leftarrow w}]^j{}_i\,.$$

Zatem jeśli $\mathbf{X} = \mathbf{w}_i\,X^i_{(w)}$, to $\mathbf{X} = \mathbf{v}_l\,X^l_{(v)}$, gdzie $X^l_{(v)} = [R_{v\leftarrow e}]^l{}_j\,[R_{e\leftarrow w}]^j{}_i\,X^i_{(w)}$, przy czym

$$R_{v\leftarrow e}\cdot R_{e\leftarrow w} = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest oczywiście macierzą zmiany bazy $R_{v\leftarrow w}$.

Zadanie 22
Znaleźć współrzędne (składowe) wektora z $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

w bazie

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Następnie znaleźć macierze przejścia z bazy $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ do bazy "kanonicznej"

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

i z powrotem. Znaleźć współrzędne wektora $\mathbf{v}$ w bazie kanonicznej.
Rozwiązanie: Tu znów wiemy, czym są "żywe" wektory. Trzeba rozwiązać układ $\mathbf{v} = x\,\mathbf{f}_1 + y\,\mathbf{f}_2 + z\,\mathbf{f}_3 + t\,\mathbf{f}_4$:

$$\begin{aligned} x + t &= 5\,, \\ -x + y &= 1\,, \\ -y + z &= 1\,, \\ -z + t &= 1\,. \end{aligned}$$

To się łatwo rozwiązuje bo z trzech ostatnich $t = 1 + z = 1 + 1 + y = 2 + 1 + x = 3 + x$. Czyli $2x + 3 = 5$ i $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$, $t = 4$. Współrzędnymi $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, $\mathbf{f}_4$ są liczby $(1, 2, 3, 4)$.

Teraz zmiana bazy. Mamy oczywisty związek $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_j (R_{e \leftarrow f})^j{}_i$, czyli jawnie

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby mieć to samo w drugą stronę trzeba albo odwrócić stojącą tu macierz (czego bezpośrednio jeszcze robić nie umiemy), albo po prostu rozwiązać cztery równania (na szczęście są one proste). Pierwsze z nich, $\mathbf{e}_1 = x_1\,\mathbf{f}_1 + y_1\,\mathbf{f}_2 + z_1\,\mathbf{f}_3 + t_1\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_1 + t_1 &= 1\,, \\ -x_1 + y_1 &= 0\,, \\ -y_1 + z_1 &= 0\,, \\ -z_1 + t_1 &= 0\,, \end{aligned}$$

którego jednoznacznym rozwiązaniem są $x_1 = y_1 = z_1 = t_1 = \frac{1}{2}$ (widać gołym okiem, że to jest ok.). Drugie, $\mathbf{e}_2 = x_2\,\mathbf{f}_1 + y_2\,\mathbf{f}_2 + z_2\,\mathbf{f}_3 + t_2\,\mathbf{f}_4$, daje układ

$$\begin{aligned} x_2 + t_2 &= 0\,, \\ -x_2 + y_2 &= 1\,, \\ -y_2 + z_2 &= 0\,, \\ -z_2 + t_2 &= 0\,, \end{aligned}$$

o rozwiązaniu $x_2 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = z_2 = t_2 = \frac{1}{2}$ (też widać, że to ok.). Trzecie $\mathbf{e}_3 = x_3\,\mathbf{f}_1 + y_3\,\mathbf{f}_2 + z_3\,\mathbf{f}_3 + t_3\,\mathbf{f}_4$, prowadzi do

$$\begin{aligned} x_3 + t_3 &= 0\,, \\ -x_3 + y_3 &= 0\,, \\ -y_3 + z_3 &= 1\,, \\ -z_3 + t_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

i ma rozwiązanie $x_3 = y_3 = -\frac{1}{2}$, $z_3 = t_3 = \frac{1}{2}$. Wreszcie, czwarte $\mathbf{e}_4 = x_4\,\mathbf{f}_1 + y_4\,\mathbf{f}_2 + z_4\,\mathbf{f}_3 + t_4\,\mathbf{f}_4$, czyli

$$\begin{aligned} x_4 + t_4 &= 0\,, \\ -x_4 + y_4 &= 0\,, \\ -y_4 + z_4 &= 0\,, \\ -z_4 + t_4 &= 1\,, \end{aligned}$$

daje $x_4 = y_4 = z_4 - \frac{1}{2}$, $t_4 = \frac{1}{2}$. Możemy więc napisać związek $\mathbf{e}_j = \mathbf{f}_k\,[R_{f\leftarrow e}]^k{}_j$ jawnie:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4)\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy, że to jest istotnie macierz odwrotna

$$R_{f\leftarrow e} \cdot R_{e\leftarrow f} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Czyli jest ok. Teraz współrzędne $\mathbf{v}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Mamy $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i\,v^i_{(f)} = \mathbf{e}_j[R_{e\leftarrow f}]^j{}_i v^i_{(f)}$, czyli $v^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_i\,v^i_{(f)}$. Jawnie:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

co powinno było od początku być oczywiste.

Przypomnienie.
Odwzorowanie F z p. wektorowej V w inną (lub tę samą) p. wektorową W (oczywiście w ogólności przestrzenie V i W mogą mieć inne wymiary), $F : V \to W$ jest *liniowe* jeśli

$$F(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2) = \lambda_1 F(\mathbf{v}_1) + \lambda_2 F(\mathbf{v}_2)\,.$$

Zadanie działania takiego odwzorowania na (wszystkie) wektory bazy $\mathbf{e}_i$ p. V wyznacza jednoznacznie jego działanie na dowolny wektor $\mathbf{v}$ z tej przestrzeni.

Przykłady
i) Odwzorowanie $F : V \longrightarrow W$ dane wzorem $F(\mathbf{v}) = \mathbf{a}$, gdzie $\mathbf{v} \in V$, a $\mathbf{a}$ jest ustalonym wektorem z W nie jest liniowe; ii) $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{a}$ również nie jest; iii) odwzorowanie $F(\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$, gdzie α jest liczbą z ciała jest liniowe; iv) $F(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}|\mathbf{v})\mathbf{b}$, gdzie $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ są ustalonymi wektorami, a $(\cdot|\cdot)$ jakimś iloczynem skalarnym[6] jest liniowe, v) zaś odwzorowanie $F(\mathbf{v}) = (\mathbf{a}|\mathbf{v})\mathbf{v}$ nie jest. Jeszcze inny przykład: niech $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ będzie przestrzenią wektorową funkcji odwzorowujących $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (to jest przestrzeń wektorowa!). Niech F odwzorowuje V w V w taki sposób, że każdej funkcji $f \in V$ przypisuje funkcję $g \in V$ zdefiniowaną wzorem $g(x) = f(x+1) - f(x)$; w innym zapisie (zgodnym z bardzo właściwym widzeniem funkcji jako maszynek z dziurkami - dwiema, jeśli to są funkcje z $V = \mathrm{Map}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ - do pierwszej z których wrzuca się liczbę z $\mathbb{R}$ i otrzymuje z drugiej dziurki inną liczbę z $\mathbb{R}$) wygląda to tak: $F[f(\cdot)] = g(\cdot) \equiv f(\cdot + 1) - f(\cdot)$; kropka oznacza właśnie dziurkę do której wsadza się liczbę. Odwzorowanie F też jest liniowe.

Zadanie 23
Czy odwzorowanie $V = \mathbb{R}^3$ w $W = \mathbb{R}^2$ zadane wzorem

$$H\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x+2)^2 - x - z - 4 \\ 4x + 2y + 6z \end{bmatrix}$$

jest odwzorowaniem liniowym? Jeśli jest, znaleźć jego macierz w kanonicznych zero-jedynkowych bazach $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$.
Rozwiązanie: Pytamy, czy

$$H\left(\lambda_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) \equiv H\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \\ \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \\ \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + 2)^2 - (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - (\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) - 4 \\ 4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + 2(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) + 6(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) \end{bmatrix}$$

jest tym samym, co

$$\lambda_1 H\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + \lambda_2 H\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)$$

[6] O iloczynach skalarnych jeszcze nie było więc powiedzmy tu, że jest to maszynka, do której wsadza się dwa wektory i otrzymuje liczbę z ciała, przy czym maszynka ta działa liniowo (jak u Lema: "sepulki - patrz sepulkowanie" przecież właśnie usiłujemy ustalić, co to znaczy "liniowe"...) w każdym z wektorów.

$$= \lambda_1 \begin{bmatrix} (x_1+2)^2 - x_1 - z_2 - 4 \\ 4x + 2y + 6z \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} (x_2+2)^2 - x_2 - z_2 - 4 \\ 4x_2 + 2y_2 + 6z_2 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście nie jest, bo tu np. nie wystąpi wyraz $\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2$. To zamyka sprawę.

Zadanie 24
Wzór

$$F\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix},$$

zadaje odwzorowanie liniowe przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$ w nią samą: $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Znaleźć macierz tego odwzorowania w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej) $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, oraz w bazie tworzonej przez trzy wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3\,, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 3\,\mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Sprawdzić działanie otrzymanych macierzy na wektorze $\mathbf{w}$, który w bazie kanonicznej ma składowe $(3, 2, 1)$.
Rozwiązanie: W tym zadaniu mamy do czynienia z "żywymi" wektorami, tj. mamy jawny przepis na znalezienie obrazu dowolnego wektora bez odniesienia do jakichkolwiek baz. Podanie macierzy jest więc tu sztuką dla sztuki. Ponieważ F odwzorowuje $\mathbb{R}^3$ w tę samą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ naturalne (ale nie obowiązkowe!) będzie znalezienie najpierw jego macierzy w tej samej kanonicznej zerojedynkowej bazie $\mathbf{e}_i$ "z obu stron". Aby ten wybór był jasny będziemy tę macierz oznaczać $F_{(e)(e)}$. W celu znalezienia tej macierzy $F_{(e)(e)}$ odwzorowania liniowego F w bazie kanonicznej obliczamy F na wektorach tejże bazy:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{e}_1) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ F(\mathbf{e}_2) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\ F(\mathbf{e}_3) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\,\mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Następnie otrzymane współczynniku rozkładu $F(\mathbf{e}_i)$ na wektory bazy tej drugiej przestrzeni $\mathbb{R}^3$, tj. trójki liczb: $(1, 1, 0)$, $(0, 2, 1)$ oraz $(0, 0, 3)$, stawiamy po kolei "na sztorc". Otrzymujemy w ten sposób macierz $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j\, F^j(\mathbf{e}_i) \equiv \mathbf{e}_j\, [F_{(e)(e)}]^j{}_i$. Jawnie:

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jeśli teraz chcemy znaleźć wartość F na wektorze $\mathbf{w}$ ("wartość" tzn. wektor będący obrazem odwzorowania F działającego na wektor $\mathbf{w}$) o składowych $(3,2,1)$ w bazie $\mathbf{e}_i$, to działamy na te składowe macierzą $F_{(e)(e)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

tj. $F(\mathbf{w}) = 3\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$. W zapisie wskaźnikowym: $F(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_i F^i(\mathbf{w}) = \mathbf{e}_i [F_{(e)(e)}]^i{}_j w^j_{(e)}$.

Ponieważ znamy $\mathbf{v}_i$ jako kombinacje liniowe $\mathbf{e}_i$, mamy też od razu macierz przejścia $R_{e\leftarrow v}$:

$$R_{e\leftarrow v} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

a odwrotną do niej macierz $R_{v\leftarrow e}$ również nietrudno znaleźć (patrz zadania 18 i 19):

$$R_{v\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Działając na składowe wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$ macierz $F_{(v)(v)}$ powinna dawać składowe obrazów tych wektorów w bazie $\mathbf{v}_i$. Zgodnie z logiką musi więc ona być dana iloczynem macierzy $R_{v\leftarrow e} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow v}$:

$$\begin{aligned} F_{(v)(v)} = R_{v\leftarrow e} \cdot F_{(e)(e)} \cdot R_{e\leftarrow v} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ = R_{v\leftarrow e} \cdot F_{(e)(v)} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

"Po drodze" powstała macierz $F_{(e)(v)}$, którą skądinąd łatwo można dostać bezpośrednio działając odwzorowaniem F według podanego przepisu na "żywe" wektory $\mathbf{v}_i$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 4\,\mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{v}_2) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 + 7\,\mathbf{e}_3, \\ F(\mathbf{v}_3) &\equiv F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix} = \mathbf{e}_1 + 5\,\mathbf{e}_2 + 11\,\mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Bezpośrednie znalezienie w ten sposób macierzy $F_{(v)(v)}$ wymaga dalszego rozłożenia wektorów po prawej stronie na wyktory bazy $\mathbf{v}_i$. Zamiast tego łatwiej patrząc na już otrzymaną macierz $F_{(v)(v)}$ sprawdzić, że jest dobrze:

$$\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix} = 0\,\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 = 0\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix} = -3\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 2\,\mathbf{v}_3 = -3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}1\\5\\11\end{bmatrix} = -5\,\mathbf{v}_1 + 2\,\mathbf{v}_2 + 4\,\mathbf{v}_3 = -5\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}.$$

Uwaga: Tak jak współrzędne (składowe) wektora $\mathbf{V}$ piszemy w tym skrypcie jako $V^i_{(e)}$ lub $V^i_{(f)}$, aby pamiętać, w jakiej bazie są to współrzędne, tak też i macierz odwzorowania liniowego opatrujemy[7] symbolami mówiącymi w jakich bazach jest ona dana. Zauważmy przy tym, że wprowadzona tu notacja jest niezwykle sugestywna: symbole przypominające, co jest w jakiej bazie oraz symbole na macierzach przejścia układają się w logiczne ciągi, nie pozostawiając miejsca na wątpliwości, przez jaką macierz, z której strony trzeba pomnożyć, by przejść z jednej bazy do drugiej.

Zadanie 25
W przestrzeni wszystkich odwzorowań $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$ (matematycy oznaczają ją $\mathrm{Map}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, ale jak ją zwał tak ją zwał...) podprzestrzeń wektorowa V jest rozpięta przez funkcje $f_1(x) = \sin x$ i $f_2(x) = \cos x$. Czy odwzorowanie wektorów tej podprzestrzeni zadane wzorem $F^\alpha[f(x)] \to f(x+\alpha)$ jest odwzorowaniem liniowym? Jeśli jest to podać jego macierz $F^\alpha_{(f)(f)}$.
Rozwiązanie: Odwzorowanie F^α jesli liniowe, bo

$$\begin{aligned}F^\alpha[\lambda_s \sin x + \lambda_c \cos x] &= \lambda_s \sin(x+\alpha) + \lambda_c \cos(x+\alpha)\\ &= \lambda_s F^\alpha[\sin x] + \lambda_c F^\alpha[\cos x]\,.\end{aligned}$$

Aby znaleźć macierz $F^\alpha_{(f)(f)}$, znajdujemy działanie F^α na wektory bazowe i wynik rozkładamy znów na te wektory:

$$\begin{aligned}F^\alpha(\mathbf{f}_1) &\equiv F^\alpha[\sin x] = \sin(x+\alpha) = \cos\alpha \sin x + \sin\alpha \cos x\,,\\ F^\alpha(\mathbf{f}_2) &\equiv F^\alpha[\cos x] = \cos(x+\alpha) = \cos\alpha \cos x - \sin\alpha \sin x\,.\end{aligned}$$

Stąd, stawiając współczynniki “na sztorc”,

$$F^\alpha_{(f)(f)} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

[7] Przynajmniej dopóki jesteśmy w matematycznym “przedszkolu”.

Zadanie 25′
Niech V_n będzie przestrzenią wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ i niech odwzorowanie F będzie operacją wzięcia pochodnej wielomianu: $F[W(x)] = W'(x)$. Traktując tu F jak odwzorowanie V_n w V_n podać jego macierz $F_{(e)(e)}$ w bazie kanonicznej ($\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_{n-1}, \dots, \mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_0$, gdzie $\mathbf{e}_k = x^k$ oraz jego macierz $F_{(f)(f)}$ w bazie

$$\mathbf{f}_0 = 1\,, \qquad \mathbf{f}_1 = x - 1\,, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2!}(x-1)^2 \qquad \dots \qquad \mathbf{f}_n = \frac{1}{n!}(x-1)^n\,.$$

Rozwiązanie: Jak łatwo sprawdzić,

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Istotnie: w rozpatrywanej bazie ogólny wielomian $W(x) = a_n x^n + \dots a_1 x + a_0$ na składowe $(a_n,\, a_{n-1}\,, \dots, a_1,\, a_0)$, a $F[W]$ ma składowe $(0,\, na_n,\, (n-1)a_{n-1}\,, \dots, a_1)$, które oczywiście dostaje się działając podaną tu macierzą na składowe $(a_n,\, a_{n-1}\,, \dots, a_1,\, a_0)$. Oczywiście, gdyby wektory bazy uszeregować odwrotnie, tj. $(\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1},\ \mathbf{e}_n)$, to macierz $F_{(e)(e)}$ miałaby postać

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Działając odwzorowaniem F na wektory bazy $\mathbf{f}_k$ znajdujemy, że $F(\mathbf{f}_k) = \mathbf{f}_{k-1}$ (przy czym $\mathbf{f}_{-1} \equiv \mathbf{0}$). Stąd macierz F w bazie $(\mathbf{f}_0,\ \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n-1},\ \mathbf{f}_n)$, ma postać

$$F_{(f)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zauważmy na koniec że de facto F odwzorowuje V_n w V_{n-1} w związku z czym, jeśli potraktować F w ten sposób, to macierz $F_{(f)(f)}$ będzie wymiaru $(n-1)\times n$ (tj. skróci się o pierwszą (zerową) kolumnę.

Zadanie 26

Mamy przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 3. Definiujemy odwzorowanie F z tej przestrzeni w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia ≤ 2 wzorem

$$F[W(x)] = W'(x) + x^2 W(0) + 12x \int_0^1 dt\, W(t)\,.\text{"}$$

Sprawdzić, czy odwzorowanie F jest liniowe. Jeśli tak, to znaleźć jego macierz w bazach kanonicznych $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2, gdzie $\mathbf{e}_n \equiv x^n$.

Rozwiązanie: F jest liniowe bo jeśli mamy wielomian $W(x) = \alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)$ to

$$\begin{aligned} F[W(x)] = & \frac{d}{dx}[\alpha_1 W^{(1)}(x) + \alpha_2 W^{(2)}(x)] + x^2[\alpha_1 W^{(1)}(0) + \alpha_2 W^{(2)}(0)] \\ & +12x \int_0^1 dt\, [\alpha_1 W^{(1)}(t) + \alpha_2 W^{(2)}(t)] \\ = & \ \alpha_1 \frac{d}{dx} W^{(1)}(x) + \alpha_1 x^2 W^{(1)}(0) + \alpha_1\, 12x \int_0^1 dt\, W^{(1)}(t) \\ & +\alpha_2 \frac{d}{dx} W^{(2)}(x) + \alpha_2 x^2 W^{(2)}(0) + \alpha_2\, 12x \int_0^1 dt\, W^{(2)}(t) \\ = & \ \alpha_1 F[W^{(1)}(x)] + \alpha_2 F[W^{(2)}(x)]\,. \end{aligned}$$

Teraz możemy znaleźć macierz odwzorowania F w bazach kanonicznych. Dowolny wielomian stopnia ≤ 3 jest postaci:

$$\mathbf{W} = \mathbf{e}_0 W^0_{(e)} + \mathbf{e}_1 W^1_{(e)} + \mathbf{e}_2 W^2_{(e)} + \mathbf{e}_3 W^3_{(e)} \equiv W^0_{(e)} + W^1_{(e)} x + W^2_{(e)} x^2 + W^3_{(e)} x^3\,.$$

gdzie $W^i_{(e)} \in \mathbb{R}$ są składowymi wielomianu $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{e}_i$. Co F robi z wektorów bazowych?

$$\begin{aligned} F[\mathbf{e}_0] \equiv F[1] &= x^2 + 12x = 12\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\ F[\mathbf{e}_1] \equiv F[x] &= 1 + 6x = \mathbf{e}_0 + 6\mathbf{e}_1\,, \\ F[\mathbf{e}_2] \equiv F[x^2] &= 6x = 6\mathbf{e}_1\,, \\ F[\mathbf{e}_3] \equiv F[x^3] &= 3x^2 + 3x = 3\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2\,. \end{aligned}$$

Z liniowości F mamy więc (w konwencji sumacyjnej: powtarzające się wskaźniki są wysumowane):

$$F[\mathbf{W}] = F[\mathbf{e}_i]\, W^i_{(e)} = \mathbf{e}_k\, [F_{(e)(e)}]^k{}_i\, W^i_{(e)}\,,$$

gdzie $\mathbf{e}_k [F_{(e)(e)}]^k{}_i = F[\mathbf{e}_i]$. Korzystając ze znalezionego wyżej działania F na wektory bazy $\mathbf{e}_i$ łatwo znajdujemy macierz $[F_{(e)(e)}]^k{}_i$ (k numeruje wiersze, a i kolumny) odwzorowania F:

$$[F_{(e)(e)}]^k{}_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy jak to działa. Niech $W(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$. Działanie F na $\mathbf{W}$ możemy łatwo znaleźć bezpośrednio ze wzoru:

$$F[\mathbf{W}] = 6x^2 - 6x + x^2 \cdot 7 + 12x \int_0^1 dt\,(2t^3 - 3t^2 + 7) = 72x + 13x^2 = 72\,\mathbf{e}_1 + 13\,\mathbf{e}_2\,.$$

Współrzędnymi $W^i_{(e)}$ wielomianu-wektora $\mathbf{W}$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ są

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Działając na te współrzędne macierzą $[F_{(e)(e)}]^k{}_i$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli istotnie współrzędne $X^k_{(e)}$ wielomianu $\mathbf{X} = F[\mathbf{W}]$ w bazie $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Przypomnienie.
Obrazem[8] (im$F$) odwzorowania liniowego $F : V \to W$ nazywa się zbiór wszystkich wektorów $\mathbf{w} \in W$, dla których istnieje takie $\mathbf{v} \in V$, że $\mathbf{w} = F(\mathbf{v})$. *Jądro* (ker$F$) odwzorowania liniowego F tworzą wszystkie te wektory $\mathbf{v} \in V$, na których F daje zero (tzn. przeprowadza je na wektor zerowy przestrzeni W). Zarówno obraz, jak i jądro F są podprzestrzeniami wektorowymi odpowiednio w W i w V. Zachodzi też związek

$$\mathrm{dim}V = \mathrm{dim}(\mathrm{ker}F) + \mathrm{dim}(\mathrm{im}F)\,.$$

Zadanie 27
Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F trójwymiarowej przestrzeni wektorowej V w inną (a może tę samą - nie jest to istotne) przestrzeń wektorową W mającą również wymiar 3; w bazach $\mathbf{v}_i \in V$ i $\mathbf{w}_i \in W$ macierz F ma postać

$$F_{(w)(v)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Znajdźmy najpierw jądro. Szukamy zatem wszystkich takich wektorów $\mathbf{u} = \mathbf{v}_i\, u^i_{(v)}$, że $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Jest to równoważne żądaniu, by

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(v)} \\ u^2_{(v)} \\ u^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

[8]Nie mylić symbolu "im" z częścią urojoną (oznaczaną "Im") liczby zespolonej!

czyli, by

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= 0\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 5\,u^2_{(v)} + 6\,u^3_{(v)} &= 0\,, \\ 7\,u^1_{(v)} + 8\,u^2_{(v)} + 9\,u^3_{(v)} &= 0\,. \end{aligned}$$

Odejmując od trzeciego trzy razy pierwsze, a od drugiego dwa razy pierwsze dowiadujemy się, że $2\,u^1_{(v)} + u^2_{(v)} = 0$, a stąd, po wstawieniu tego do pierwszego, że $u^3_{(v)} = u^1_{(v)}$. Zatem wszystkie wektory jądra są postaci

$$\lambda\,(\mathbf{v}_1 - 2\,\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \in \ker F\,,$$

z czynnikiem λ dowolnym. Zatem $\dim(\ker F) = 1$, co oznacza, że $\dim(\mathrm{im} F) = 2$.

Szukamy następnie obrazu $(\ker F)$, czyli pytamy, jakie wektory $\mathbf{t} = \mathbf{w}_i\,t^i_{(w)}$ daje się otrzymać z jakiegoś $\mathbf{u} \in V$. Inaczej mówiąc, dla jakich $t^i_{(w)}$ istnieją jakieś $u^i_{(v)}$, z którymi spełniony jest związek

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1_{(v)} \\ u^2_{(v)} \\ u^3_{(v)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^1_{(w)} \\ t^2_{(w)} \\ t^1_{(w)} \end{pmatrix},$$

lub, co równoważne, układ

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= t^1_{(w)}\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 5\,u^2_{(v)} + 6\,u^3_{(v)} &= t^2_{(w)}\,, \\ 7\,u^1_{(v)} + 8\,u^2_{(v)} + 9\,u^3_{(v)} &= t^3_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Znów odejmując od trzeciego trzy razy pierwsze, a od drugiego dwa razy pierwsze dostajemy równania:

$$\begin{aligned} 2\,u^1_{(v)} + u^2_{(v)} &= t^2_{(w)} - 2\,t^1_{(w)}\,, \\ 4\,u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} &= t^3_{(w)} - 3\,t^1_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Widać z nich, że aby istniało jakieś rozwiązanie, składowe wektora $\mathbf{t}$ (w bazie $\mathbf{w}_i$) muszą spełniać związek $2\,t^2_{(w)} - 4\,t^1_{(w)} = t^3_{(w)} - 3\,t^1_{(w)}$, czyli $t^1_{(w)} - 2\,t^2_{(w)} + t^3_{(w)} = 0$. Jeśli jest on spełniony, to możemy rozwiązywać dwa pierwsze równania (drugie przerobione jak wyżej)

$$\begin{aligned} u^1_{(v)} + 2\,u^2_{(v)} + 3\,u^3_{(v)} &= t^1_{(w)}\,, \\ 2\,u^1_{(v)} + u^2_{(v)} \qquad\quad &= t^2_{(w)} - 2\,t^1_{(w)}\,. \end{aligned}$$

Widać, że dla dowolnego $u^3_{(v)}$ (i dowolnych $t^1_{(w)}$ i $t^2_{(w)}$) można tak dobrać $u^1_{(v)}$ i $u^2_{(v)}$, by te równania były spełnione. Zatem jeśli składowe wektora $\mathbf{t} \in W$ spełniają związek

$$t^1_{(w)} - 2\,t^2_{(w)} + t^3_{(w)} = 0\,,$$

to $\mathbf{t}$ jest obrazem jakiegoś wektora z V. Co więcej, wektor, którego $\mathbf{t}$ jest obrazem, nie jest wyznaczony jednoznacznie; wynika to jasno choćby z tego, że można sobie wybrać dowolne $u^3_{(v)}$ i znaleźć rozwiązania na $u^1_{(v)}$ i $u^2_{(v)}$. Jest to oczywiście związane z tym, że ker$F$ jest nietrywialne (nietrywialne tzn. zawierające więcej niż tylko wektor zerowy)! Ponieważ składowe wektora $\mathbf{t}$, który może być obrazem jakiegoś $\mathbf{u}$ wiąże tylko jeden warunek, im$F$ jest podprzestrzenią $3-1=2$ wymiarową; jako jej bazę można wybrać np. liniowo niezależne wektory

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_3\,, \qquad \mathbf{h}_2 = \mathbf{w}_2 + 2\,\mathbf{w}_3\,,$$

których składowe (w bazie $\mathbf{w}_i$) spełniają powyższy warunek.

Alternatywnym spojrzeniem na problem wyznaczenia obrazu F jest zauważenie że skoro $F(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_i$, to obraz F ma zawsze postać kombinacji liniowej wektorów

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}_1 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_1 = \mathbf{w}_1 + 4\,\mathbf{w}_2 + 7\,\mathbf{w}_3\,,\\
\mathbf{n}_2 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_2 = 2\,\mathbf{w}_1 + 5\,\mathbf{w}_2 + 8\,\mathbf{w}_3\,,\\
\mathbf{n}_3 &= \mathbf{w}_j\,[F_{(w)(v)}]^j{}_3 = 3\,\mathbf{w}_1 + 6\,\mathbf{w}_2 + 9\,\mathbf{w}_3\,,
\end{aligned}$$

i problem wyznaczenia obrazu F sprowadza się do ustalenia czy wektory $\mathbf{n}_i$ są liniowo niezależne czy nie. To zaś jest równoważne sprawdzeniu, czy kolumny macierzy $F_{(w)(v)}$ potraktowane jak wektory z $\mathbb{R}^3$ są liniowo zależne, czy nie, a jeśli tak, to ile z nich jest liniowo niezależnych (wtedy te liniowo niezależne kolumny przemnożone odpowiednio przez wektory $\mathbf{w}_i$ stanowią dobrą bazę podprzestrzeni im$F$).

Zadanie 27′

Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F z $\mathbb{R}^4$ w $\mathbb{R}^4$ zadanego w bazach kanonicznych (zero-jedynkowych) $\mathbf{e}_i$ macierzą

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: Nietrudno zobaczyć (gołym okiem!), że macierz $F_{(e)(e)}$ daje zera, gdy działa na kolumienki

$$\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zatem jądro ker$F$ rozpinają dwa liniowo niezależne (widać, że one takie są!) wektory

$$\mathbf{j}_1 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3\,, \qquad \mathbf{j}_2 = \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,.$$

Aby znaleźć wektory rozpinające obraz im$F$ wystarczy zauważyć, że kolumienki składowych wektorów będących obrazami F są kombinacjami liniowymi kolumienek $\mathbf{C}_i$ (zarówno kolumienki składowych wektorów jak i kolumienki macierzy możemy przez chwilę potraktować jak wektory z $\mathbb{R}^4$) macierzy $F_{(e)(e)}$

$$\begin{pmatrix} t^1_{(e)} \\ t^2_{(e)} \\ t^3_{(e)} \\ t^4_{(e)} \end{pmatrix} = \mathbf{C}_1 v^1_{(e)} + \mathbf{C}_2 v^2_{(e)} + \mathbf{C}_3 v^3_{(e)} + \mathbf{C}_4 v^4_{(e)}\,,$$

gdzie $v^i_{(e)}$ są składowymi wektora $\mathbf{v}$, na który działa F. Z kolei z tego, że jądro rozpinają podane wyżej wektory $\mathbf{j}_1$ i $\mathbf{j}_2$ wynika, że jako wektory cztery kolumienki $\mathbf{C}_i$ są liniowo zależne; liniowo niezależne są tylko dwie z nich: np. $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$. Zatem wszystkie kolumienki-wektory składowych wektorów będących obrazami F można dostać także jako kombinacje liniowe tylko kolumienek $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$ macierzy $F_{(e)(e)}$. Stąd już wynika, że za wektory rozpinające im$F$ można np. przyjąć wektory

$$\mathbf{o}_1 = \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4\,, \qquad \mathbf{o}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,,$$

tj. kombinacje liniowe wektorów bazy, współczynnikami których to kombinacji są elementy kolumienek $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$ macierzy $F_{(e)(e)}$.

Zadanie 28

Znaleźć jądro (ker) i obraz (im) odwzorowania F z Zadania 26.

Rozwiązanie: Jądro jest to w tym przypadku podprzestrzeń liniowa przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 tworzona przez takie wielomiany $W(x)$, że $F[W(x)] = \mathbf{0}$ (zero $\mathbf{0}$ oczywiście rozumiane jako wektor-wielomian zerowy). Niech $W(x) = a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$. Zobaczymy, jakie muszą być współczynniki a_3, a_2, a_1, a_0, żeby $W(x)$ należał do jądra F. Zażądajmy by

$$F[\mathbf{W}] = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0x^2 + 12x\left(\frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{2}a_1 + a_0\right) = \mathbf{0}\,.$$

Wymaga to, by $a_1 = 0$, $3a_3 + a_0 = 0$ oraz $3a_3 + 6a_2 + 6a_1 + 12a_0 = 0$, czyli by cztery współczynniki a_i spełniały trzy równania. Weźmy a_0 jako niezależną wielkość. Wtedy $a_3 = -\frac{1}{3}a_0$ i $a_2 = -\frac{11}{6}a_0$. Zatem jądro odwzorowania F jest w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 podprzestrzenią jednowymiarową rozpiętą przez wektor o składowych

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{11}{6} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, takiej jak w poprzednim Zadaniu. Możemy teraz skorzystać ze znalezionej tam macierzy $[F_{(e)(e)}]^j{}_i$ odwzorowania F by sprawdzić, że istotnie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\frac{11}{6}\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dla dowolnego λ. Zatem do jądra odwzorowania F należą wektory-wielomiany postaci

$$\lambda(\mathbf{e}_0 - \frac{11}{6}\,\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\,\mathbf{e}_3) = \lambda(1 - \frac{11}{6}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3)\,.$$

Jeśli chodzi o obraz odwzorowania F, to odpowiedź zależy od trochę akademickiego problemu, co uznamy za przestrzeń wektorową, w którą wielomiany stopnia ≤ 3 odwzorowuje F. Jeśli umówimy się, że jest to przestrzeń wielomianów stopnia $\leq n$ o $n = 2$, to musimy zbadać, czy każdy wielomian postaci $b_0 + b_1x + b_2x^2$ jest F-obrazem jakiegoś wielomianu stopnia ≤ 3. W tym celu musimy zbadać, czy układ równań

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad\qquad &= b_0 \\ 4a_0 + 2a_1 + 2a_2 + a_3 &= \frac{1}{3}b_1 \\ a_0 \qquad\qquad + 3a_3 &= b_2\,, \end{aligned}$$

ma rozwiązanie względem a_i, dla zupełnie dowolnych b_i. Z pierwszego a_1 musi być równe b_0, to następnie do drugiego i przenosimy na drugą stronę. Mamy wtedy

$$\begin{aligned} 4a_0 + 2a_2 + a_3 &= -2b_0 + \frac{1}{3}b_1 \\ 4a_0 \qquad + 12a_3 &= 4b_2\,, \end{aligned}$$

i stąd $2a_2 - 11a_3 = -2b_0 + \frac{1}{3}b_1 - 4b_2$. Wybrawszy dowolnie np. a_3 mamy stąd, dla dowolnych b_0, b_1 i b_2, wyznaczone potrzebne a_2, a z pozostałych równań a_1 i a_0. Jak więc widać rozwiązanie zawsze istnieje, czyli obrazem F, tj. $\mathrm{im}F$, jest cała przestrzeń wielomianów stopnia ≤ 2. To, że rozwiązanie jest niejednoznaczne (tylko $2a_2 - 11a_3$ jest wyznaczone), tzn. ten sam wielomian stopnia ≤ 2 można dostać jako obraz F z różnych wielomianów stopnia ≤ 3 jest oczywistym wnioskiem w tego, że $\ker F$ jest nietrywialne, tzn. nie składa się wyłącznie z wektora (wielomianu) zerowego.

Oczywiście jeśli dla jakiegoś kaprysu zechcemy uznać, że F odwzorowuje wielomiany stopnia ≤ 3 w przestrzeń wektorową wielomianów stopnia $\leq n$ o $n \geq 3$, to oczywiście $\mathrm{im}F$ już nie będzie całą tą przestrzenią, bo np. wielomianu $W = 5x^3$ nie da się nijak za pomocą F z wielomianu stopnia ≤ 3 otrzymać.

Zadanie 29

Niech wektory $\mathbf{f}_0 = 1 + x$, $\mathbf{f}_1 = x + x^2$, $\mathbf{f}_2 = x^2 + x^3$, $\mathbf{f}_3 = x^3$ będą inną bazą przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 (istotnie, można sprawdzić, że są one bazą). Znaleźć

tej bazie macierz odwzorowania F z Zadania 26. Wyznaczyć także postać wektorów-wielomianów należących do jądra odwzorowania F.
Uwaga: w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 trzymamy starą, "kanoniczną" bazę $\mathbf{e}_n = x^n$, tj. chcemy by nowa macierz odwzorowania F działając na składowe wielomianu stopnia ≤ 3 w bazie $\mathbf{f}_k$ dawała składowe odpowiedniego wielomianu stopnia ≤ 2 w bazie $\mathbf{e}_n$.
Rozwiązanie: To zadanie możemy wykonać posługując się bezpośrednio procedurą wyznaczania macierzy w danych bazach obu przestrzeni: po prostu działamy po kolei odwzorowaniem F na nowe bazowe wektory-wielomiany $\mathbf{f}_i$ i wynik takiego działania rozpisujemy w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_k$:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{f}_0) \equiv \; F(1+x) &= 1 + x^2 + 12x\,\frac{3}{2} = \mathbf{e}_0 + 18\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\
F(\mathbf{f}_1) \equiv \; F(x+x^2) &= 1 + 2x + 12x\,\frac{5}{6} = \mathbf{e}_0 + 12\,\mathbf{e}_1 \\
F(\mathbf{f}_2) \equiv F(x^2+x^3) &= 2x + 3x^2 + 12x\,\frac{7}{12} = 9\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 \\
F(\mathbf{f}_3) \equiv \quad F(x^3) &= 3x^3 + 12x\,\frac{1}{4} = 3\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,.
\end{aligned}$$

Stąd od razu, stawiając odpowiednie współczynniki na sztorc, dostajemy

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

W celach pedagogicznych otrzymamy teraz $F_{(e)(f)}$ innym sposobem. Będziemy potrzebować macierzy przejścia $R_{e\leftarrow f}$ z bazy $\mathbf{f}_k$ do bazy $\mathbf{e}_n$ odwrotnej do macierzy $R_{f\leftarrow e}$ przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{f}_k$. Tę pierwszą, tu właśnie potrzebną, $R_{e\leftarrow f}$, znajdziemy łatwo bo mamy

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_0 &= \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1\,, \\
\mathbf{f}_1 &= \qquad\; \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\,, \\
\mathbf{f}_2 &= \qquad\qquad\;\; \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,, \\
\mathbf{f}_3 &= \qquad\qquad\qquad\quad\; \mathbf{e}_3\,.
\end{aligned}$$

Stąd

$$(\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

czyli, w zapisie na wskaźniczkach, $\mathbf{f}_k = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow f}]^j{}_k$. Jeśli mamy teraz dany wektor (wielomian) $\mathbf{V}$ w postaci $\mathbf{V} = \mathbf{f}_j\,V^j_{(f)}$ (gdzie $V^j_{(f)}$ są składowymi $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$), to

$$\mathbf{V} = \mathbf{f}_k\,V^k_{(f)} = \mathbf{e}_j\,[R_{e\leftarrow f}]^j{}_k\,V^k_{(f)} \equiv \mathbf{e}_j\,V^j_{(e)}\,,$$

gdzie $V^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_k \, V^k_{(f)}$. Niech teraz $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$. Macierz odwzorowania F zapisana "z obu stron" w bazach kanonicznych $\mathbf{e}_n$, zarówno w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 jak i wielomianów stopnia ≤ 2, działa tak, że jeśli $\mathbf{X} = \mathbf{e}_i \, X^i_{(e)}$, to

$$\mathbf{e}_i \, X^i_{(e)} = F[\mathbf{V}] = F[\mathbf{e}_k] \, V^k_{(e)} = \mathbf{e}_i \, [F_{(e)(e)}]^i{}_k \, V^k_{(e)} \, .$$

Wyrażając tu $V^k_{(e)}$ przez $V^j_{(f)}$ za pomocą macierzy $[R_{e\leftarrow f}]^k{}_j$ dostajemy

$$\mathbf{e}_i \, X^i_{(e)} = \mathbf{e}_i \, [F_{(e)(e)}]^i{}_k \, [R_{e\leftarrow f}]^k{}_j \, V^j_{(f)} \, .$$

Tak więc współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$ wielomianu $\mathbf{X}$ (otrzymywanego jako obraz wielomianu $\mathbf{V}$ przy odwzorowania liniowym F) ze współrzędnych $\mathbf{V}$ w bazie $\mathbf{f}_j$ daje nam macierz

$$[F_{(e)(f)}]^i{}_j = [F_{(e)(e)}]^i{}_k \, [R_{e\leftarrow f}]^k{}_j \, .$$

Tak więc

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \equiv F_{(e)(e)} \, ,$$

i

$$[F_{(e)(e)}]^i{}_k [R_{e\leftarrow f}]^k{}_j = [F_{(e)(f)}]^i{}_j \, .$$

Jawnie macierzowo:

$$F_{(e)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} .$$

Oczywiście jest to ta sama macierz, którą już otrzymaliśmy na początku.

Sprawdźmy teraz to wszystko na wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który już nam służył za przykład w zadaniu 26. Zapiszmy go najpierw w bazie $\mathbf{f}_i$. W tym celu wyrażamy najpierw wektory $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{f}_j$. Idąc "od dołu" mamy: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_3$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3$, etc. Łatwo więc znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_0 &= \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 \, , \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \, , \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3 \, , \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_3 \, . \end{aligned}$$

Znaleźliśmy zatem macierz $R_{f\leftarrow e}$

$$R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ,$$

odwrotną do $R_{e\leftarrow f}$. Istotnie,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz rozłożyć wektor $\mathbf{W}$ w bazie $\mathbf{f}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} = 2\,\mathbf{e}_3 - 3\,\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_0 &= 2\,\mathbf{f}_3 - 3\,(\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) + 7\,(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3) \\ &= 7\,\mathbf{f}_0 - 7\,\mathbf{f}_1 + 4\,\mathbf{f}_2 - 2\,\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

W bazie $\mathbf{f}_i$ wielomian W ma więc składowe

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Jeśli na te składowe podziałamy macierzą $F_{(e)(f)}$ to dostaniemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 72 \\ 13 \end{pmatrix},$$

czyli to samo, co poprzednio (bo to co wychodzi to mają być składowe $F[\mathbf{W}]$ w tej samej bazie, co poprzednio, czyli w bazie $\mathbf{e}_i$).

Wektory należące do jądra odwzorowania F muszą mieć takie składowe $V^i_{(f)} \equiv a_i$, na których zeruje się macierz $F_{(e)(f)}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nietrudno ustalić, przyjmując np. składową $a_0 \equiv \lambda$ jako dowolną, że są to wektory o składowych $a_1 = -\lambda$, $a_2 = -\frac{5}{6}\lambda$, $a_3 = \frac{1}{2}\lambda$, czyli wektory-wielomiany postaci

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1 - \frac{5}{6}\,\mathbf{f}_2 + \frac{1}{2}\,\mathbf{f}_3) &= \lambda\,[1 + x - (x + x^2) - \frac{5}{6}(x^2 + x^3) + \frac{1}{2}x^3] \\ &\equiv \lambda\,[1 - \frac{11}{6}\,x^2 - \frac{1}{3}\,x^3]\,, \end{aligned}$$

takiej samej, jak ustaliliśmy to w Zadaniu 28. Oczywiście te same składowe $V^0_{(f)} = \lambda$, $V^1_{(f)} = -\lambda$, $V^2_{(f)} = -\frac{5}{6}\,\lambda$ $V^3_{(f)} = \frac{1}{2}\,\lambda$, można było też otrzymać działając macierzą $R_{f\leftarrow e}$ na składowe $V^0_{(e)} = \lambda$, $V^1_{(e)} = 0$, $V^2_{(e)} = -\frac{11}{6}\,\lambda$ $V^3_{(e)} = -\frac{1}{3}\,\lambda$ znalezione w Zadaniu 28.

Zadanie 30
Zapisać macierz odwzorowania F z zadań 26 i 29 w bazie $\mathbf{e}_n = x^n$, $n = 0,1,2,3$ przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia ≤ 3 oraz w bazie $\mathbf{g}_j$, $j = 0,1,2$ danej wzorami

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \mathbf{e}_0 + 2\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{g}_1 &= 3\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2\,, \\ \mathbf{g}_2 &= 2\,\mathbf{e}_2\,, \end{aligned}$$

(tj. w bazie tworzonej przez wielomiany $\mathbf{g}_0 = 1 + 2x + 3x^2$, $\mathbf{g}_1 = 3x + 4x^2$ i $\mathbf{g}_2 = 2x^2$) bedącej bazą przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2.
Rozwiązanie: Znów musimy znaleźć macierz przejścia z bazy $\mathbf{e}_n$ do bazy $\mathbf{g}_j$. Z trzeciego związku mamy $\mathbf{e}_2 = \frac{1}{2}\,\mathbf{g}_2$. Z drugiego wtedy $3\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{g}_1 - 2\,\mathbf{g}_2$. W końcu

$$\mathbf{e}_0 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}(\mathbf{g}_1 - 2\mathbf{g}_2) - \frac{3}{2}\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_0 - \frac{2}{3}\mathbf{g}_1 - \frac{1}{6}\mathbf{g}_2\,.$$

Ostatecznie więc mamy

$$(\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) = (\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

czyli $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i \,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j$ oraz

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = (\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

czyli $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j \,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k$. Musi oczywiście być $\mathbf{e}_k = \mathbf{g}_j \,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k = \mathbf{e}_i \,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j \,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k$, czyli $[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j \,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_k = \delta^i{}_k$. Można to jawnie sprawdzić:

$$R_{e\leftarrow g} \cdot R_{g\leftarrow e} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Podobnie powinno być $\mathbf{g}_j = \mathbf{e}_i \,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j = \mathbf{g}_k \,[R_{g\leftarrow e}]^k{}_i \,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j$, tj. $[R_{g\leftarrow e}]^k{}_i \,[R_{e\leftarrow g}]^i{}_j = \delta^k{}_j$:

$$R_{g\leftarrow e} \cdot R_{e\leftarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Możemy teraz zapisywać sobie związek $\mathbf{X} = F[\mathbf{V}]$ w dowolnych bazach:

$$\mathbf{e}_i \, X^i_{(e)} = \mathbf{e}_i \,[F_{(e)(e)}]^i{}_j \, V^j_{(e)}\,, \qquad \text{czyli} \qquad X^i_{(e)} = [F_{(e)(e)}]^i{}_j \, V^j_{(e)}\,,$$

lub, wyrażając $\mathbf{e}_i$ przez $\mathbf{g}_j$,

$$\mathbf{g}_j \,[R_{g\leftarrow e}]^j{}_i \,[F_{(e)(e)}]^i{}_j \, V^j_{(e)} \equiv \mathbf{g}_j \,[F_{(g)(e)}]^j{}_j \, V^j_{(e)}\,, \qquad \text{czyli} \qquad X^i_{(g)} = [F_{(g)(e)}]^i{}_j \, V^j_{(e)}\,,$$

gdzie $[F_{(g)(e)}]^i{}_j = [R_{g\leftarrow e}]^i{}_k\,[F_{(e)(e)}]^k{}_j$. Jawnie (macierz $F_{(e)(e)}$ jest podana w zadaniach 26 i 28):

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Można też mieć macierz odwzorowania F w bazie $\mathbf{f}_k$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3 i bazie $\mathbf{g}_j$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2. W tym celu trzeba $V^j_{(e)}$ zapisać jako $V^j_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^j{}_k V^k_{(f)}$, co da $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = [F_{(g)(e)}]^j{}_l\,[R_{e\leftarrow f}]^l{}_k$, czyli jawnie (biorąc macierz $[R_{e\leftarrow f}]^l{}_k$ z poprzedniego zadania)

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tę samą macierz $F_{(g)(f)}$ można także otrzymać z macierzy $F_{(e)(f)}$ znalezionej w poprzednim zadaniu: $[F_{(g)(f)}]^j{}_k = [R_{g\leftarrow e}]^j{}_l\,[F_{(e)(f)}]^l{}_k$ czyli

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{3} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy to wszystko na naszym wielomianie $W = 2x^3 - 3x^2 + 7$, który w bazie $\mathbf{e}_j$ miał składowe $(7, 0, -3, 2)$. Działając na te składowe macierzą $F_{(g)(e)}$ dostajemy

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & \frac{4}{3} & 2 & 1 \\ -\frac{15}{2} & -\frac{25}{6} & -4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

to jest składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$. Zatem

$$F[\mathbf{W}] = 0 \cdot \mathbf{g}_0 + 24 \cdot \mathbf{g}_1 - \frac{83}{2} \cdot \mathbf{g}_2 = 24 \cdot (3x + 4x^2) - \frac{83}{2} \cdot (2x^2) = 72x + 13x^2\,,$$

tak, jak być powinno ($F[\mathbf{W}]$ jest wektorem i nie może zależeć od wyboru baz, które są czymś pomocniczym jedynie). Podobnie, działając macierzą $F_{(g)(f)}$ na znalezione w poprzednim zadaniu składowe $(7, -7, 4, -2)$ naszego wielomianu W w bazie $\mathbf{f}_j$ otrzymujemy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{16}{3} & \frac{10}{3} & 3 & 1 \\ -\frac{35}{2} & -\frac{49}{6} & -\frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ -\frac{83}{2} \end{pmatrix},$$

czyli te same składowe $F[\mathbf{W}]$ w bazie $\mathbf{g}_j$.

Zadanie 31
Pewne odwzorowanie liniowe G z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ jest takie, że

$$G\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3\\2\\2\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\4\end{bmatrix},\qquad G\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}.$$

Znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazie kanonicznej

$$\mathbf{e}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{e}_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Znaleźć także wynik działania

$$G\left(\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}\right).$$

Rozwiązanie: Dla porządku trzeba najpierw sprawdzić, czy wektory

$$\mathbf{f}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{f}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},$$

na których zadane jest działanie G, są liniowo niezależne. Jeśli są, to rozpinają całą przestrzeń $\mathbb{R}^3$ i mogą być jej bazą. W takim przypadku zadanie odwzorowania G na tych trzech wektorach wyznacza już działanie G na każdy wektor z przestrzeni będącej dziedziną G, bo każdy wektor z tej dziedziny można zapisać jako kombinację liniową trzech wektorów, na których działanie G jest znane. Gdyby się okazało (ale się nie okaże), że trzy wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie G jest zadane, są liniowo zależne, to trzeba by sprawdzić, czy takie zdefiniowanie G jest niesprzeczne, tzn. czy spełniona jest liniowość; nie dałoby się jednak wtedy znaleźć całej macierzy odwzorowania G w żadnej bazie. Niemniej, nawet jeśli trzy wektory $\mathbf{f}_i$ nie rozpinałyby całej dziedziny G, nie przekreślałoby to z góry możliwości znalezienia wartości G na podanym w zadaniu wektorze: mogłoby się bowiem okazać, że akurat ten wektor jest liniową kombinacją tych, na których G jest zadane. Dopiero, gdyby ten wektor nie był liniowo zależny od tych, na których działanie G jest zadane, druga część zadania nie mogłaby być rozwiązana. Równanie $\lambda_1\mathbf{f}_1+\lambda_2\mathbf{f}_2+\lambda_3\mathbf{f}_3=\mathbf{0}$ daje układ równań

$$\begin{aligned}\lambda_1+\ \lambda_2-\lambda_3 &= 0\,,\\ \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 &= 0\,,\\ \lambda_1-\ \lambda_2 \qquad &= 0\,.\end{aligned}$$

Z trzeciego $\lambda_2 = \lambda_1$ do pierwszego i drugiego, co da układ dwu równań $2\lambda_1 - \lambda_3 = 0$ oraz $3\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, czyli $5\lambda_1 = 0$ etc. Widać, że jedynym rozwiązaniem jest $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, czyli wektory $\mathbf{f}_i$ są liniowo niezależne. To samo możemy sprawdzić gdy chodzi o wektory

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Równanie $\xi_1\mathbf{g}_1 + \xi_2\mathbf{g}_2 + \xi_3\mathbf{g}_3 = \mathbf{0}$ daje układ równań

$$\begin{aligned} 3\xi_1 + \ \xi_2 - \ \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 + \ \xi_2 + \ \xi_3 &= 0\,, \\ 2\xi_1 + 4\xi_2 - 3\xi_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

który też ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$, czyli - jak się tego kiedyś dowiemy - odwzorowanie G jest *nieosobliwe* bo przeprowadza $\mathbb{R}^3$ w całe $\mathbb{R}^3$ (ma więc trywialne jądro do którego należy tylko wektor zerowy). Zatem w bazach: $\mathbf{f}_i$ dla wektorów odwzorowywanych i $\mathbf{g}_j$ dla wektorów będących wynikiem odwzorowania, macierz G ma postać trywialną

$$G_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oznacza to, że jeśli $G[\mathbf{v}] = \mathbf{w}$ i $\mathbf{v} = \mathbf{f}_i\, v^i_{(f)}$, a $\mathbf{w} = \mathbf{g}_j\, w^j_{(g)}$, to macierz $G_{(g)(f)}$ robi składowe $w^i_{(g)}$ ze składowych $v^i_{(f)}$ według przepisu: $w^j_{(g)} = [G_{(g)(f)}]^j{}_i\, v^i_{(f)}$.

Jeśli teraz $\mathbf{f}_i = \mathbf{e}_k\, [R_{e\leftarrow f}]^k{}_i$ to $v^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow f}]^k{}_i\, v^i_{(f)}$ i odwrotnie, $v^i_{(f)} = [R_{f\leftarrow e}]^i{}_k\, v^k_{(e)}$. W podobny sposób, jeśli $\mathbf{g}_i = \mathbf{e}_k\, [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i$, to $w^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, w^i_{(g)}$ i odwrotnie, $w^i_{(g)} = [R_{g\leftarrow e}]^i{}_k\, w^k_{(e)}$. Jeśli więc znajdziemy macierze $[R_{e\leftarrow g}]$ i $[R_{f\leftarrow e}]$, to będziemy mogli napisać

$$\begin{aligned} w^k_{(e)} = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, w^i_{(g)} &= [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j v^j_{(f)} \\ &= [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j\, [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l\, v^l_{(e)} \equiv [G_{(e)(e)}]^k{}_l\, v^l_{(e)}\,. \end{aligned}$$

Zatem $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i\, [G_{(g)(f)}]^i{}_j\, [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l$. Aby więc znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej trzeba znaleźć macierze $[R_{e\leftarrow g}]$ oraz $[R_{f\leftarrow e}]$. Pierwsza jest banalna, bo mamy dane wektorki $\mathbf{g}_i = F[\mathbf{f}_i]$: np. $\mathbf{g}_1 = 3\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3$, etc. Stąd

$$[R_{e\leftarrow g}] = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Podobnie banalnie jest dana macierz $[R_{e\leftarrow f}]$:

$$[R_{e\leftarrow f}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ale my potrzebujemy $[R_{f\leftarrow e}]$. Musimy więc rozwiązać układ równań wektorowych

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 \,, \\ \mathbf{f}_3 &= -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \,. \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1$. Do drugiego dodać trzecie: $3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$. Dalej już łatwo:

$$\begin{aligned} 3\,\mathbf{e}_2 - 6\,\mathbf{e}_3 &= 3\,\mathbf{f}_2 - 3\,\mathbf{f}_1 \,, & \mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1 \,, \\ 3\,\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 &= \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 \,, & 6\,\mathbf{e}_2 - 2\,\mathbf{e}_3 &= 2\,\mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3 \,. \end{aligned}$$

Stąd: $5\,\mathbf{e}_3 = 3\,\mathbf{f}_1 - 2\,\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3$ oraz $5\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3$ i teraz $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{5}(5\,\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 2\,\mathbf{f}_3 - 3\,\mathbf{f}_1 + 2\,\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_3)$. Ostatecznie mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{5}\,(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 - 3\mathbf{f}_3) \,, \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{5}\,(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\mathbf{f}_3) \,, \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{5}\,(3\mathbf{f}_1 - 2\mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3) \,, \end{aligned}$$

czyli macierz $R_{f\leftarrow e}$ ma postać

$$[R_{f\leftarrow e}] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aby sprawdzić, czy się nie pomyliliśmy w rachunkach i przećwiczyć mnożenie macierzy sprawdzamy

$$[R_{e\leftarrow f}] \cdot [R_{f\leftarrow e}] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W drugą stronę też można sprawdzić:

$$[R_{f\leftarrow e}] \cdot [R_{e\leftarrow f}] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

No to świetnie. Zatem możemy już znaleźć macierz $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_i$: $[G_{(e)(e)}]^k{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i [G_{(g)(f)}]^i{}_j [R_{f\leftarrow e}]^j{}_l = [R_{e\leftarrow g}]^k{}_i [R_{f\leftarrow e}]^i{}_l$ ponieważ $[G_{(g)(f)}]^i{}_j = \delta^i{}_j$. Czyli macierzowo

$$G_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Jeśli mamy już $[G_{(e)(e)}]$ w bazie kanonicznej $\mathbf{e}_1$, $i = 1, 2, 3$, to możemy łatwo znaleźć działanie G na wektor

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

W bazie kanonicznej ma on oczywiste składowe $(2, 0, -1)$ a zatem współrzędne (składowe) wektora $G(\mathbf{w})$ w bazie kanonicznej są dane przez

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Wspomniana wyżej nieosobliwość odwzorowania G odbija się w tym, że wyznacznik

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -7 ,$$

czyli jest różny od zera. W konsekwencji (jak się tego dowiemy) $\ker(G) = \{\mathbf{0}\}$ (jądro odwzorowania jest trywialne).

Innym (szybszym) sposobem znalezienia $G(\mathbf{w})$ jest rozłożenie $\mathbf{w}$ w bazie wektorów $\mathbf{f}_i$, $i = 1, 2, 3$, na których działanie G zostało zadane, tzn. znalezienie współczynników y_i, $i = 1, 2, 3$ we wzorze

$$y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Łatwy rachunek daje $y_1 = -\frac{1}{5}$, $y_2 = \frac{4}{5}$, $y_3 = -\frac{7}{5}$. Zatem korzystając z liniowości odwzorowania G możemy napisać:

$$\begin{aligned} G\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) &= -\frac{1}{5} G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{4}{5} G\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) - \frac{7}{5} G\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{7}{5} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} , \end{aligned}$$

tak jak poprzednio.

To co zrobiliśmy w ostatnim punkcie podpowiada pewien szybki sposób znajdowania macierzy odwzorowania $G_{(e)(e)}$ (podobny do podanego na końcu Zadania 17 sposobu znajdowania macierzy przejścia z bazy do bazy). Rozłóżmy ogólny wektor z $\mathbb{R}^3$ na trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{f}_i$, na których działanie odwzorowania G jest znane. Łatwo znajdujemy, że

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{5}(a+b+3c)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(a+b-2c)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(-3a+2b+c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Działając zatem na ten ogólny wektor odwzorowaniem G możemy tak jak wyżej napisać:

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}(a+b+3c)\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(a+b-2c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{5}(-3a+2b+c)\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Zbierając to do kupy mamy

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5a+0b+10c \\ 0a+5b+5c \\ 15a+0b-5c \end{bmatrix}.$$

Ekstrahując zurück ogólny wektor możemy prawą stronę przedstawić w postaci

$$G\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 15 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Wciągając $1/5$ widzimy, że otrzymaliśmy macierz $G_{(e)(e)}$. Jest tu jednak pewna pojęciowa trudność polegająca na tym, że (zgodnie z przyjętym przez nas sposobem zapisu) liczby w kwadratowych nawiasach oznaczają "żywe" wektory z $\mathbb{R}^n$ (a nie nie ich składowe), a macierz odwzorowania powinna być macierzą w jakiejś bazie. Tu oczywiście, ponieważ "żywy" wektor z $\mathbb{R}^n$ wygląda dokładnie tak, jak jego składowe w kanonicznej zero-jedynkowej bazie, należałoby najpierw zapisać przedostatnią równość w postaci

$$G\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5a+0b+10c \\ 0a+5b+5c \\ 15a+0b-5c \end{pmatrix}$$

i czytać ją: "działając na wektor, którego składowymi w kanonicznej zero-jedynkowej bazie $\mathbb{R}^3$ są (a, b, c) odwzorowanie G daje taki wektor z $\mathbb{R}^3$, którego składowymi są równe $(5a + 0b + 10c, 0a + 5b + 5c, 15a + 0b - 5c)$." Po czym zrobić to co zrobiliśmy wyżej i uzyskać macierz, która wobec tego jest macierzą $G_{(e)(e)}$ odwzorowania G w kanonicznych zero-jedynkowych bazach (z "obu stron").

Zadanie 32
O odwzorowaniu liniowym H z $\mathbb{R}^3$ w $\mathbb{R}^3$ wiadomo, że

$$H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix},\qquad H\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-1\\3\\-8\end{bmatrix}.$$

Znaleźć wynik działania odwzorowania H na wektor

$$\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}.$$

Czy da sie znaleźć macierz $H_{(e)(e)}$ tego odwzorowania np. w bazie kanonicznej (zero-jedynkowej)?
Rozwiązanie: Zadanie to ma zilustrować uwagi poczynione na początku rozwiązania poprzedniego zadania. Nietrudno sprawdzić, że trzeci z wektorów, na których znane jest działanie odwzorowania H, jest liniowo zależny od dwu pierwszych:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Trzeba wiec najpierw sprawdzić, czy rzeczywiście jest to odwzorowanie liniowe. Na szczęście jest:

$$H\left(\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\right)=H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)+3H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-8\end{bmatrix}.$$

Ponieważ znamy działanie H tylko na dwa liniowo niezależne wektory, a przestrzeń jest trójwymiarowa, więc zadanie mogłoby nie dać się rozwiązać. Ale się daje, bo akurat

$$\mathbf{v}\equiv\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

Zatem

$$H\left(\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}\right)=-H\left(\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}\right)+2H\left(\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}\right)=-\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1\\1\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\2\\-7\end{bmatrix}.$$

Oczywiście wektor $\mathbf{v}$ można by rozłożyć inaczej na trzy wektory, na których działanie H jest zadane. Najogólniej:

$$\mathbf{v}\equiv\begin{bmatrix}-1\\-5\\2\end{bmatrix}=(\alpha-1)\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}+(3\alpha+2)\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}-\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}.$$

Można sprawdzić, że niezależnie od wartości α, która jest tu dowlna, otrzyma się to samo $G(\mathbf{v})$, co wyżej.

Jako że nie znamy działania H na wystarczajacej liczbie liniowo niezależnych wektorów, powinno być jasne, że nie uda się podać całej macierzy tego odwzorowania (w żadnej bazie). Jeśli do dwu pierwszych (liniowo niezależnych) wektorów $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$, na których zadane jest działanie H dokooptować jakiś trzeci $\mathbf{f}_3$ - dowolny, byle liniowo niezależny, a do dwu wektorów $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ będących H-obrazami $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ też dokooptować jakiś trzeci $\mathbf{g}_3$ liniowo niezależny od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$, to można powiedzieć tyle, że w tak utworzonych bazach $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ oraz $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)$ macierz odwzorowania H ma postać:

$$H_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}.$$

O jej elementach oznaczonych znakami zapytania nic nie możemy powiedzieć. Jeśli przejść do innych baz, np. do kanonicznych, to po pomnożeniu $H_{(g)(f)}$ z lewej i z prawej strony przez odpowiednie macierze przejścia, nieznane elementy $H_{(g)(f)}$ “rozpropagują” się po całej macierzy i naogół nie będziemy znać żadnego z jej elementów.

Zadanie 33
Odwzorowanie liniowe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ działając na trzy wektory

$$\mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

daje

$$F(\mathbf{f}_1) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_1\,, \qquad F(\mathbf{f}_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_2\,, \qquad F(\mathbf{f}_3) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{g}_3\,.$$

Znaleźć, jeśli to możliwe postać macierzy $F_{(e)(e)}$ tego odwzorowania w bazach kanonicznych (zero-jedynkowych).

Rozwiązanie: Po pierwsze sprawdzamy, czy trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne. Są. Mogą więc stanowić bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Następnie sprawdzamy, czy trzy wektory $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ oraz $\mathbf{g}_3$ są liniowo niezależne. Oczywiście nie są: $\mathbf{g}_3 = 3\,\mathbf{g}_1$. Czy tak może być? tzn. czy odwzorowanie F jest naprawdę liniowe? Z liniowości wynika, że gdyby trzy wektory $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$ były liniowo zależne, to ich obrazy, tj. trzy wektory $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$ oraz $\mathbf{g}_3$ też musiałyby być liniowo zależne (zob. uwagi w rozwiązaniu zadania 31). Na szczęście w drugą stronę stwierdzenie nie zachodzi: z liniowej zależności wektorów $\mathbf{g}_1$, $\mathbf{g}_2$, $\mathbf{g}_3$ *nie wynika* liniowa zależność wektorów $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ i $\mathbf{f}_3$. Jeśli jądro odwzorowania F, ker$F$, jest nietrywialne (tj. nie składa się wyłącznie z wektora zerowego), to istnieją jakieś wektory $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, takie że $F(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. Wówczas

$$F(\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_z\mathbf{z}) = \lambda_1 F(\mathbf{f}_1) + \lambda_z F(\mathbf{z}) = \lambda_1 F(\mathbf{f}_1)\,,$$

ale same wektory $\mathbf{f}_1$ i $\lambda_1\mathbf{f}_1 + \lambda_z\mathbf{z}$ są liniowo niezależne (muszą być, bo gdyby były liniowo zależne, to $\mathbf{f}_1$ by musiał należeć do jądra) i tak też musi być w rozpatrywanym tu przypadku.[9]

Możemy teraz dokooptować jakiś wektor $\mathbf{g}_3'$, który jest liniowo niezależny od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ i razem z tymi dwoma będzie tworzyć drugą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Może to być dowolny wektor

$$\mathbf{g}_3' = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

pod warunkiem, że $a + b + c \neq 0$ (jest to warunek liniowej niezależności $\mathbf{g}_3'$ od $\mathbf{g}_1$ i $\mathbf{g}_2$ znaleziony najprostszą metodą tj. wyznacznikową - będzie dalej). W bazach $(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3')$ i $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3)$ macierz odwzorowania F ma postać

$$F_{(g)(f)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z kolei macierz $F_{(e)(e)}$ otrzymamy obliczając iloczyn macierzy:

$$F_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow g} \cdot F_{(g)(f)} \cdot R_{f\leftarrow e}\,.$$

Musimy więc znaleźć macierze przejścia $R_{e\leftarrow g}$ oraz $R_{f\leftarrow e}$. Tę pierwszą mamy "za darmo", bo

$$(\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3') = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 1 & -3 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Występująca tu macierz jest właśnie macierzą $R_{e\leftarrow g}$. Aby zaś znaleźć macierz $R_{f\leftarrow e}$ musimy odwrócić oczywiste związki

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_2 &= 2\,\mathbf{e}_1 \qquad + 3\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\,. \end{aligned}$$

Odejmując od trzeciego pierwsze mamy natychmiast $\mathbf{e}_2$. Wstawiając tak wyznaczone $\mathbf{e}_2$ do pierwszego i drugiego otrzymujemy rwńania na $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_3$, które już łatwo rozwiązać. W ten sposób znajdujemy, że

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 6\,\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2 - 3\,\mathbf{f}_3 \\ \mathbf{e}_2 &= -\frac{1}{2}\,\mathbf{f}_1 \qquad + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 &= -4\,\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + 2\,\mathbf{f}_3\,. \end{aligned}$$

[9] Zauważmy, że jest to typowa sytuacja, gdy F odwzorowuje wektory z p.w. V w wektory z p.w. W o wymiarze mniejszym niż wymiar V (tj., gdy dim$W<$dim$V$).

Mamy więc juże wszystkie potrzebne elementy:

$$F_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow g}\cdot F_{(g)(f)}\cdot R_{f\leftarrow e} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & a\\ 1 & -3 & b\\ 0 & 1 & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -4\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3\\ 1 & -3 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & -\frac{1}{2} & -4\\ -1 & 0 & 1\\ -3 & \frac{1}{2} & 2\end{pmatrix}.$$

Jak widać i jak się należało spodziewać, dowolne elementy wektora $\mathbf{g}_3'$ nie wejdą do końcowej postaci macierzy $F_{(e)(e)}$. Wykonując ostatnie mnożenie macierzy, znajdujemy, że

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Mając $F_{(e)(e)}$ nietrudno znaleźć składowe $z^i_{(e)}$ wektora $\mathbf{z}$ należącego do jądra (in fatti, rozpinającego w tym przypadku całe ker$F$), a tym samym jego jawną postać $\mathbf{z} = \mathbf{e}_i z^i_{(e)}$:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} \in \mathrm{ker}F\,.$$

Oczywiście $\mathbf{f}_3 = 3\,\mathbf{f}_1 - 2\,\mathbf{z}$.

Zadanie 34

Odwzorowanie liniowe $F\,: V \to W$ odwzorowuje wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 7\\ 2\end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2$ przestrzeni V odpowiednio w wektory o składowych

$$\begin{pmatrix} 4\\ 5\\ -1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 5\end{pmatrix},$$

w bazie $\mathbf{g}_i$, $i = 1, 2, 3$ przestrzeni W. Podać macierz tego odwzorowania. Wyznaczyć jego jądro i obraz.

Rozwiązanie: Sprawa jest banalna. Niech $[F_{(g)(e)}]^i{}_j \equiv a_{ij}$ (żeby mniej pisać). Mamy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\\ 5\\ -1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 5\end{pmatrix}.$$

Mamy więc trzy niezależne układy równań, każdy na dwa elementy odpowiedniego wiersza macierzy $F_{(g)(e)}$. Np. na elementy a_{11} i a_{12} mamy

$$\begin{aligned} 3\,a_{11} + a_{12} &= 4\,, \\ 7\,a_{11} + 2\,a_{12} &= -3\,, \end{aligned}$$

itp. Rozwiązując je znajdujemy, że

$$F_{(g)(e)} = \begin{pmatrix} -11 & 37 \\ -10 & 35 \\ 7 & -22 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ na dwu liniowo niezależnych wektorach z V, $\mathbf{v}_1 = 3\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{v}_2 = 7\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2$ odwzorowanie daje niezerowe wektory (z W), a $\dim V = 2$, więc jądro F jest trywialne (składa się tylko z wektora zerowego). Jeśli zaś chodzi o obraz, to oczywiste jest, że skoro przestrzeń W jest trójwymiarowa, a odwzorowywane są tylko dwa liniowo niezależne wektory, to $\dim(\mathrm{im}F) = 2$ (to samo bardziej formalnie: $\dim(\mathrm{im}F) = \dim V - \dim(\ker F) = 2 - 0 = 2$). Tymi dwoma liniowo niezależnymi wektorami rozpinającymi obraz są np. wektory $\mathbf{o}_1 = 4\,\mathbf{g}_1 + 5\,\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3$ i $\mathbf{o}_2 = -3\,\mathbf{g}_1 + 5\,\mathbf{g}_3$. Mogłyby to też być wektory $\mathbf{o}'_1 = -11\,\mathbf{g}_1 - 10\,\mathbf{g}_2 + 7\,\mathbf{g}_3$, $\mathbf{o}'_2 = 37\,\mathbf{g}_1 + 35\,\mathbf{g}_2 - 22\,\mathbf{g}_3$ czyli kombinacje liniowe wektorów bazy $\mathbf{g}_i$ ze współczynnikami będącymi elementami kolumn macierzy $F_{(g)(e)}$ (zobacz zadania 27 i 27′). Oczywiście $\mathbf{o}_1 = 3\mathbf{o}'_1 + \mathbf{o}'_2$, a $\mathbf{o}_2 = 7\mathbf{o}'_1 + 2\mathbf{o}'_2$.

Zadanie 35

Znaleźć w zero-jedynkowych kanonicznych bazach przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ macierz odwzorowania liniowego F zadanego poprzez jego działanie na trzy wektory z $\mathbb{R}^3$:

$$F\left(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad F\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie: Najprostszym sposobem rozwiązania jest oczywiście rozłożenie ogólnego wektora z $\mathbb{R}^3$ na wektory, na których działanie F jest zadane:

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = (-a+b)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + (3a-3b+c)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + (-a+2b-c)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},$$

(ponieważ się to daje zrobić, wektory te są liniowo niezależne) i skorzystanie z liniowości F:

$$F\left(\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\right) = (-a+b)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + (3a-3b+c)\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (-a+2b-c)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\-3a+4b-c\end{bmatrix}.$$

Utożsamiając następnie wektory z ich składowymi w bazach kanonicznych możemy stąd natychmiast (tak, jak w zadaniu 17) odczytać szukaną macierz

$$F_{(e)(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Innym (wyjątkowo często praktykowanym przez studentów na kolokwium) sposobem jest po prostu rozwiązanie (po mniej lub bardziej świadomym utożsamieniu "żywych" wektorów w $\mathbb{R}^n$ z ich składowymi - litościwie nie należy wnikać w stopień tej świadmości...) układów równań:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Trochę to żmudne, ale wychodzi.

Rozpatrzmy jeszcze metodę wykorzystywaną w zadaniach ... tj. przyjmijmy trzy liniowo niezależne wektory $\mathbf{v}_i$, na których działanie F jest zadane za bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Mamy wtedy

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Macierz ta jest macierzą $R_{e\leftarrow v}$ zmiany bazy. Trzeba ją odwrócić, by znaleźć macierz $R_{v\leftarrow e}$. Postępując standardowo, tj. rozwiązując układ równań na $\mathbf{v}_i$ znajdujemy, że

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Stojąca tu macierz to właśnie $R_{v\leftarrow e}$.

Ponieważ F odwzorowuje w przestrzeń o wymiarze równym 2, przeto jest oczywiste (powinno być!), że trzy wektory będące obrazami wektorów $\mathbf{v}_i$ nie mogą być razem bazą. Musimy sobie wybrać dowolne dwa z nich (bo dowolne dwa już są liniowo niezależne). Weźmy zatem za bazę

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad R_{e\leftarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

i wtedy

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2 \,.$$

W związku z tym, że $F(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{g}_1 + 2\mathbf{g}_2$, $F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{g}_1$, a $F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{g}_2$, mamy macierz odwzorowania F w bazach $\mathbf{v}_i$ i $\mathbf{g}_j$

$$F_{(g)(v)} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Macierz $F_{(e)(e)}$ otrzymamy obkładając powyższą macierzami zmiany baz:

$$\begin{aligned} F_{(e)(e)} = R_{e\leftarrow g} \cdot F_{(g)(v)} \cdot R_{v\leftarrow e} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Oczywiście za bazę $\mathbb{R}^2$ możnaby przyjąć inne dwa z trzech wektorów będących obrazami $\mathbf{v}_i$. Wtedy inną postać by miały macierze $F_{(g)(v)}$ oraz $R_{e\leftarrow g}$ ale końcowa macierz $F_{(e)(e)}$ wyszłaby taka sama.

Zadanie 36

Dane są dwie macierze

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{i} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} .$$

Znaleźć iloczyny $F \cdot G$ i $G \cdot F$.

Rozwiązanie: Macierz F jest (może być traktowana jak) macierzą jakiegoś odwzorowania F p.w. V o wymiarze 3 w jakąś p.w. W o wymiarze 1, macierz zaś G - macierzą odwzorowania $G : W \to V$; obie one są dane w jakichś bazach. Aby mnożenia miały sens trzeba przyjąć, że odpowiednie bazy są zgodne. W notacji wprowadzonej w poprzednich zadaniach powinno być tak

$$\begin{aligned} F \cdot G \equiv F_{(g')(f)} \cdot G_{(f)(g)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (14) \,, \\ G \cdot F \equiv G_{(f')(g)} \cdot G_{(g)(f)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Macierz $F \cdot G$ jest macierzą odwzorowania z przestrzeni wektorowej W w przestrzeń wektorową W i wtedy możemy przyjąć, że bazami tej przestrzeni (“po prawej i po lewej stronie") są jakieś bazy $\mathbf{g}_i$, gdzie $i = 1$ i $\mathbf{g}'_i$ z $i = 1$; mogą one (ale nie muszą) być tożsame; a baza $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ przestrzeni V w której dana jest macierz $G_{(f)(g)}$ musi być (żeby mnożenie macierzy miało sens) tą samą bazą w przestrzeni V, w której jest dana macierz $F_{((g')f)}$.

Z kolei macierz $G \cdot F$ jest macierzą odwzorowania z V w V i żeby mnożenie miało sens nie musimy zakładać, że bazy $\mathbf{f}_i$ z $i = 1, 2, 3$ i $\mathbf{f}'_i$ z $i = 1, 2, 3$ są tą samą bazą, ale musimy założyć, że baza w przestrzeni W w której dane są macierze F i G jest ta sama.

Oczywiście macierze jako takie można sobie mnożyć (jako sztuka dla sztuki) bez przejmowania się bazami.

Zadanie 37
Jeśli jest to możliwe, znaleźć iloczyny $A \cdot B$ oraz $B \cdot A$ macierzy:

i) $$A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ii) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Rozwiązanie: *i)* Ponieważ obie macierze są kwadratowe oba mnożenia są wykonalne

$$A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tu akurat $A \cdot B = B \cdot A$, choć naogół tak nie jest.
Odp. *ii)* Można tylko obliczyć $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}.$$

Przypomnienie.
Odwzorowanie liniowe $F: V \to \mathbb{K}$, gdzie $\mathbb{K}$ jest jakimś ciałem liczbowym, naogół $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$, zwie się *kowektorem* albo *(jedno)-formą liniową.*[10] Przy ustalonej przestrzeni wektorowej V można rozpatrywać przestrzeń *wszystkich* odwzorowań liniowych V w $\mathbb{K}$. Ma ona także strukturę przestrzeni wektorowej. Jest ona zwana *przestrzenią dualną* do V i oznaczana V^*. Tak jak w każdej przestrzeni wektorowej, można w niej wprowadzać różne bazy, np. $\hat{\mathbf{f}}^i$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, \dim V^*$. (W przypadku skończeniewymiarowej przestrzeni V - a tylko takie tu będziemy rozpatrywać - $\dim V^* = \dim V$). W tym skrypcie elementy przestrzeni

[10] Oczywiście, skoro istnieją jedno-formy, to należy domniemywać, że są też i dwu- i więcej-formy; istotnie, są, i to prowadzi do teorii form różniczkowych, twierdzenia Stokesa, kohomologii i innych cudów matematyki z nimi związanych.