

Matematyka I, zadania domowe seria I

1. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
 - a) $p \vee \sim p$, b) $[\sim p \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow p$, c) $[(p \vee q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)]$
2. a) Zdefiniować alternatywę za pomocą koniunkcji i negacji.
 b) Zdefiniować alternatywę za pomocą implikacji i negacji.
3. Prawdziwe jest zdanie: „Nieprawda, że jeżeli Platon założył Akademię, to jeśli Arystoteles był uczniem Platona, to Arystoteles nie uczęszczał do Akademii”. Czy informacja ta wystarcza, by udzielić odpowiedzi na każde z podanych niżej pytań? Jeśli tak, to jakie są te odpowiedzi?
 - (a) Czy Platon był założycielem Akademii?
 - (b) Czy Arystoteles był uczniem Platona?
 - (c) Czy Arystoteles uczęszczał do Akademii?
4. (R. Smullyan) Zadanie to dzieje się na wyspie, której mieszkańcy w pewne dni tygodnia mówią tylko prawdę, a w pozostałe dni tygodnia - kłamią.
 - (a) Stefan kłamie tylko w poniedziałki, a w pozostałe dni mówi prawdę. Pewnego dnia Stefan powiedział: „Dziś jest poniedziałek, a ja jestem żonaty”. Czy był wtedy poniedziałek? Czy Stefan jest żonaty?
 - (b) Według innej wersji tej historii, Stefan nie powiedział: „Dziś jest poniedziałek, a ja jestem żonaty” ale „Dziś jest poniedziałek lub ja jestem żonaty”. Jeśli ta wersja jest prawdziwa, to czy Stefan jest żonaty i czy był wtedy poniedziałek?
 - (c) Istnieje jeszcze jedna wersja tej historii, nieco podobna do pierwszej, ale różniąca się w pewnym subtelnym szczególe. Według niej Stefan najpierw powiedział: "Dziś jest poniedziałek", a nieco później tego samego dnia powiedział: "Jestem żonaty". Czy powinniśmy wierzyć tej wersji?
 - (d) Stefan ma brata o imieniu Marcei, który kłamie tylko w czwartki. Pewnego dnia jeden z braci (nie wiadomo niestety który) powiedział: "Jutro będzie wtorek". Dokładnie tydzień później ten sam brat powiedział: "Jutro będę kłamał". Którego dnia tygodnia to się wydarzyło?
 - (e) Zgodnie z inną wersją tydzień po tym jak jeden z braci powiedział: "Jutro będzie wtorek", drugi brat stwierdził "Jutro będę kłamał". Jeśli ta wersja jest prawdziwa, to którego dnia tygodnia się to zdarzyło?
5. Niech A będzie zbiorem punktów (x, y) , dla których $x^2 + y^2 < 1$, B będzie zbiorem punktów, dla których $x^2 + y^2 < 4$, C będzie zbiorem punktów, dla których $(x-1)^2 + y^2 < 1$. Znaleźć i naszkicować zbiory $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cup B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $A \cap B \cap C$.
6. Wiedząc, że $f(x) := \frac{x}{x+2}$ oraz $g(x) := f\left(\frac{x-2}{3}\right)$, uprościć $g(x)$ i podać dziedzinę $g(x)$.
7. Znajdź zbiór wartości funkcji f . Czy funkcja f jest surjekcją? Czy jest injekcją? Czy jest bijekcją? W przypadku pozytywnej odpowiedzi na ostatnie pytanie znajdź $f^{-1}(x)$.
 - a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
 - b) $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow]-1, 1[, x \mapsto f(x) = \frac{x^2-2}{x^2+2}$
 - c) $f : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_-, x \mapsto f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

8. Niech $f(x) = x^3$. Znaleźć takie $g(x)$, że: a) $(f \circ g)(x) = x + 1$, b) $(g \circ f)(x) = x + 1$

9. Dane są funkcje

$$f(x) = x^2 + 3, \quad x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \sqrt{x-1}, \quad x \in [1, \infty)$$

Znaleźć wzór funkcji złożonej $f(g(x))$ i $g(f(x))$ oraz podać dziedzinę i zbiór wartości każdej z tych funkcji.

10. Rozwiąż równania

a) $|x+1| + |x+2| = 7$, b) $|||x+1| - 2| + 3| + 4| = 7$,

c) $|x^2 - 16| + |x^2 - 9| = 7$, d) $x^2 - |5x + 6| = 0$

11. Rozwiązać nierówność: a) $|x^3 - x| + 2x > 2$, b) $|\frac{1}{x+2}| < |\frac{2}{x-1}|$

12. Zaznacz na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ następujące zbiory a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+1| + |y+2| \leq 4\}$, b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x+1| + |x+2| + |x+3|\}$

13. Rozwiąż równania

a) $\cos x = 1$, b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\cos x = 0$, d) $\sin x = 0$, e) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
f) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, g) $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

14. Rozwiąż nierówności

a) $2 \sin x < -1$, b) $3 \operatorname{ctg}^2 x \geq 1$.

15. Zredukuj następujące wyrażenia

a) $\cos(\pi - x)$, b) $\cos(\frac{\pi}{2} + x)$, c) $\sin(x - \pi)$, d) $\sin(\frac{3}{2}\pi + x)$, e) $\operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2} + x)$, f) $\operatorname{tg}(\frac{3}{2}\pi - x)$.

16. Znajdź wartość $\cos \frac{\pi}{8}$ (wynik może zawierać jedynie operacje dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia i pierwiastkowania liczb).

17. Rozwiąż równanie

$$\sin(x + \pi) \cos(x + \frac{\pi}{2}) \operatorname{ctg}(x - \pi) = \frac{1}{2}.$$

18. Udowodnij, że

a) $\forall \alpha \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} : \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$, b) $\sin \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$.

19. Pokaż, że

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Wskazówka: skorzystaj z dobrze Ci znanych wzorów $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$,
 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$.

20. Wyprowadź wzory

a) $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, b) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, c) $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

21. Rozwiąż równania w zbiorze $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$

a) $4 \sin^3 \theta + 2 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta - 1 = 0$, b) $\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 + 3 \operatorname{ctg} x = 0$.

22. Niech $f(x) = 2^{\sin x} - 1$. Znaleźć dziedzinę i zbiór wartości $f(x)$. Zbadać injektywność i surjektywność $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, znaleźć maksymalny przedział, dla którego $f(x)$ jest injekcją, znaleźć $f^{-1}(x)$ i podać jej dziedzinę.

23. Dla jakich x zachodzi
 a) $\sin \arcsin x = x$, b) $\arcsin \sin x = x$.
24. Rozwiąż
 a) $-\frac{\pi}{17} < \arcsin(x^2) < \frac{\pi}{6}$, b) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$,
 c) $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}$, d) $\arccos x < \arccos x^2$.
25. Znajdź wszystkie rozwiązania całkowite równania $x^4 + 3x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - 2 = 0$.
26. Dla funkcji $f(x) = x^2 + (2-k)x + k^2$ znaleźć zbiór wartości k , dla którego $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) > 0$.
27. Rozwiąż nierówność
 a) $\frac{(x-1)^5(x^2-x+1)(x^2-2)(x+1)^6}{x^2-2x-1} \geq 0$, b) $x^6 + x^3 - 2 > 0$.
28. Znajdź wielomian będący wynikiem dzielenia oraz resztę z dzielenia wielomianu $x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$ przez wielomian $x^3 + 1$.
29. a) Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $x^{2008} + x^8 + x + 1$ przez wielomian $x^2 - 1$.
 b) Znajdź resztę z dzielenia wielomianu $x^{2008} + x^8 + x^2 + 1$ przez wielomian $x^2 + 1$.
30. Dla jakich wartości parametru a równanie kwadratowe (na x) $2x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 - a = 0$ ma dwa pierwiastki ujemne.
31. Wielomian $4x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 12x + 3$ ma cztery pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2, x_3 i x_4 . Znajdź wartości następujących wyrażeń:
 a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, b) $x_1x_2x_3x_4$, c) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$.
32. Czy następujące liczby są całkowite?
 a) $5^{\log_3 7} - 7^{\log_3 5}$, b) $\log_{\sqrt{3}} 729^{\log_{27} 81}$, c) $\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 7} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{9}} 7} + \frac{1}{\log_{27} 7}$.
33. Dla jakich wartości parametru a równanie $9^x - 3^{x+1} + a = 0$ ma dwa różne rozwiązania.
34. Rozwiąż
 a) $\log_2(9 - 2^x) = 3 + x$, b) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{4}} x) \geq 1$, c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2) > 5$,
 d) $\frac{1}{1 + \log_2 x} > \frac{1}{-2 + 2\log_2 x}$.
35. Jaka liczba jest współczynnikiem przy x^{97} w rozwinięciu $(1+x)^{100}$?
36. Pokaż, że dla dowolnego naturalnego n : $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
37. Pokaż, że dla dowolnego naturalnego n :
 a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$, Wskazówka: Skorzystaj z $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
 b) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n+1)^2 = \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}$.

38. Wykazać, że dla dowolnego naturalnego n :

- a) liczba $4^n + 15n - 1$ jest podzielna przez 9,
- b) liczba $10^n + 4^n - 2$ jest podzielna przez 3,
- c) liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,
- d) liczba $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ jest podzielna przez 8,
- e) liczba $n^7 - n$ jest podzielna przez 7.
- f) wielomian $(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} + 1$, jest podzielny przez trójmian $x^2 - 2x + 1$.

39. Wyprowadź wzór na sumę $S_n = \sum_{k=0}^n q^k$. Wskazówka pokaż najpierw, że $S_{n+1} = S_n + q^{n+1}$
i $S_{n+1} = 1 + qS_n$.

Podpowiedzi i odpowiedzi

- 1. Są.
- 2. a) $\sim (\sim p \wedge \sim q)$ b) $\sim p \Rightarrow q$
- 3. 3 x tak
- 4. a) Kawaler Stefan powiedział to w poniedziałek, b) Stefan jest żonaty, to nie był poniedziałek, c) nie, d) czwartek, e) poniedziałek
- 6. $g(x) = \frac{x-2}{x+4}$, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- 7. a) $f(\mathbb{R}) = [-1, 1[$, nie jest surjekcją bo $[-1, 1[\neq \mathbb{R}$, nie jest injekcją bo $f(1) = f(-1)$,
b) $f^{-1}(x) = \sqrt{2\frac{1+x}{1-x}}$, c) $f^{-1}(x) = \sqrt{\sqrt{x} + 1}$
- 8. a) $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$, b) $g(x) = \sqrt[3]{x} + 1$
- 9. $f(g(x)) = x + 2$, $x \in [1, \infty[$, $f(x) \in [3, \infty[$; $g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [\sqrt{2}, \infty[$.
- 10. a) $x \in \{-5, 2\}$, b) $x \in \{1, -3\}$, c) $x \in \{-4, -3, 3, 4\}$, d) $x \in \{-3, -2, -1, 6\}$
- 11. a) kwadrat o wierzchołkach $(1, 2)$, $(3, -2)$, $(1, -6)$, $(5, -2)$,
b) Rozważ przypadki $x \in]-\infty, -3]$, $x \in]-3, -2]$, $x \in]-2, -1]$, $x \in]-1, \infty[$
- 12. a) $x \in]-\infty, -2[\cup]1, \infty[$, b) $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, \infty[$
- 13. a) $\{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, b) $\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, c) $\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, d) $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,
e) $\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, f) $\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, g) $\{\frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
- 14. a) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \right[$, b) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi \right] \cup \left[\frac{2\pi}{3} + k\pi, \pi + k\pi \right[$
- 15. a) $-\cos x$, b) $-\sin x$, c) $-\sin x$, d) $-\cos x$, e) $-\operatorname{tg} x$, f) $\operatorname{ctg} x$.
- 16. $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
- 17. $\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
- 18. Użyj znanych Ci wzorów $\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ i $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

19. Dodaj stronami wzory podane we wskazówce.
20. Spróbuj sam(a).
21. a) Podstaw $t = \sin \theta$ (uprzednio używając jedynki trygonometrycznej) a następnie poszukaj pierwiastków wymiernych równania na t . Odpowiedź: $\theta \in \{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\}$,
b) $x \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\}$.
23. a) $x \in [-1, 1]$, b) $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
24. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$, b) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$, c) $\frac{2}{3}$, d) $0 < x < 1$.
25. $x = 1 \vee x = -4$
26. $k \in]-\infty, -2[\cup]\frac{2}{3}, \infty[$
27. a) $x \in [-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}[\cup[1, \sqrt{2}]\cup]1 + \sqrt{2}, \infty[$, b) $x \in [-\infty, -\sqrt[3]{2}[\cup]1, \infty[$
28. wynik $x^2 + 1$, reszta $x^2 + 1$
29. a) $x + 3$, b) Podstaw $t = x^2$. Reszta to 2.
30. $a \in]4, 8]$
31. Jak wyprowadzić wzory Viete'a nie zaglądając do wikipedii? Odpowiedzi: a) 1, b) $\frac{3}{4}$, c) $\frac{-13}{4}$
32. a) tak 0, b) tak 16, c) tak 0.
33. $a \in]0, \frac{9}{4}[$
34. a) $x = 0$, b) $x \in [\frac{1}{2}, 1[$, c) $x \in]2, \sqrt{\frac{129}{32}}[$, d) $x \in]\frac{1}{2}, 2[\cup]8, \infty[$
35. 161700
36. Przyjrzyj się uważnie wzorowi na dwumian Newtona.
37. Porozmawiaj z prowadzącym ćwiczenia.
38. Jak wyżej