1 Funkcje holomorficzne

Są to funkcje jednej zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych, spełniające pewien warunek, o którym będzie dalej.

1.1 Miniaturowa powtórka z liczb zespolonych

Def. *Liczbą zespoloną* nazywamy parę liczb rzeczywistych (a, b) z odpowiednio zdefiniowanymi działaniami dodawania i mnożenia; lub, równoważnie, liczba zespolona to następujący obiekt:

$$z = a + bi, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \ \text{ oraz } \ i^2 = -1.$$

Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy jako $\mathbb{C}$; geometrycznie jest to iloczyn kartezjański $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, a więc *płaszczyzna.*

Def. *Liczbę sprzężoną* do $z = a + bi$ definiujemy jako:

$$\bar{z} = a - bi.$$

Def. *Część rzeczywista* i *urojona* liczb z to:

$$\Re z = a, \quad \Im z = b.$$

Def. *Modułem* liczby z (ozn. $|z|$) jest liczba rzeczywista nieujemna:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Uwaga. Moduł liczby zespolonej spełnia wszystkie własności *normy.*

Def. *Odległościa* dwóch liczb zespolonych z_1, z_2 nazywamy

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Dla odległości spełniony jest w szczególności *warunek trójkąta*:

$$\forall_{z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}} : d(z_1, z_2) \leqslant d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2)$$

1.2 Definicja holomorficzności

Pamiętamy, jak była zdefiniowana *pochodna* funkcji f w przypadku rzeczywistym:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}; \tag{1}$$

w zależności od tego, czy dążymy do x z lewa czy z prawa, mówimy o pochodnej lewo- bądź prawostronnej.

W przypadku funkcji *zespolonych* definicja jest bardzo podobna, ale konsekwencje są znacznie głębsze niż w przypadku rzeczywistym.

Def. Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \to \mathbb{C}$, gdzie $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym. Mówimy, że f jest *holomorficzna*, jeśli dla dowolnego $z \in \mathcal{O}$ istnieje granica

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} \tag{2}$$

która jest *niezależna od* h, i jeżeli $f'(z)$ jest ciągłą funkcją z.

Uwaga. Definicje różniczkowalności rzeczywistej (3) i zespolonej (2) wyglądają na pierwszy rzut oka tak samo. Definicja różniczkowalności zespolonej jest jednak warunkiem o wiele *mocniejszym.* Warunki (3) (2) mówią że granica ma być taka sama *niezależnie od* h. W przypadku rzeczywistym mamy do zbadania jedynie dwie granice (lewo-i prawostronną), podczas gdy w przypadku zespolonym h może dążyć do zera z *dowolnego* kierunku na płaszczyźnie – i wszystkie te granice muszą być równe.

Przykładem tego, jakim mocnym ograniczeniem jest warunek (2), jest fakt (którego dowód poznamy niedługo), iż *jeśli funkcja holomorficzna jest różniczkowalna jeden raz, to jest też różniczkowalna nieskończenie wiele razy.* Nie ma takiej sytuacji w przypadku rzeczywistym: Funkcja, która jest jeden raz rózniczkowalna, nie musi być różniczkowalna więcej razy.

1.3 Podstawowe własności funkcji holomorficznych

Niech $z = x + iy$. Dowolna funkcja $f(z)$ o wartościach zespolonych może być zapisana jako:

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y), \quad \text{gdzie } x,y \in \mathbb{R}, \quad P(x,y) \in \mathbb{R}, \quad Q(x,y) \in \mathbb{R}.$$

Załóżmy, że $f(z)$ jest funkcją holomorficzną. Skoro pochodna f ma być *niezależna od kierunku*, to policzmy pochodne w kierunku 'rzeczywistym' i 'urojonym'; muszą one być sobie równe:

$$f'(z) = \lim_{h\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \tag{3}$$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0,\ h\in i\mathbb{R}} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{k\to 0,\ h\in\mathbb{R}} \frac{f(z+ik)-f(z)}{ik} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}; \tag{4}$$

Jako się rzekło, pochodne f liczone na dwa sposoby, czyli prawe strony równości (3) i (4), muszą być sobie równe, tak więc mamy:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}, \tag{5}$$

(równość części rzeczywistych), oraz

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}; \tag{6}$$

(równość częściurojonych). Równości powyższe to **wzory Cauchy'ego–Riemanna**.

Stwierdziliśmy więc, że części: rzeczywista i urojona funkcji holomorficznej spełniają równania C-R. Okazuje się, że jest również na odwrót:

Tw. Funkcja zespolona $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje P i Q są klasy C^1 i ich pochodne spełniają warunki Cauchy'ego – Riemanna (5) i (6).

Dow.

$\Longrightarrow$ (tzn. że holomorficzność implikuje spełnienie warunków Cauchy'ego–Riemanna) właśnie powyżej był (wyprowadzenie wzorów C-R przy założeniu holomorficzności funkcji).

$\Longleftarrow$ Popatrzmy na funkcję f jako na odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 \supset \mathcal{O} \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Założyliśmy, że jest to odwzorowanie klasy C^1 (ponieważ funkcje P, Q są klasy C^1). Słuszny jest więc poniższy wzór:

$$\begin{pmatrix} P(x+h, y+k) \\ Q(x+h, y+k) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + r(x,y;h,k), \tag{7}$$

gdzie r jest małą wyższego rzędu, tzn. spełniony jest warunek:

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{r(x,y;h,k)}{||H||} = 0 \tag{8}$$

gdzie $H = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$; mamy więc: $||H|| = \sqrt{h^2 + k^2}$.

Korzystając z równań Cauchy'ego – Riemanna, mamy:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & -\frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{9}$$

gdzie oznaczyliśmy $a = \frac{\partial P}{\partial x}$, $b = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Występująca tu macierz $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ nazywana jest *macierzą Cauchy'ego–Riemanna*. Można więc (7) przepisać jako

$$\begin{pmatrix} P(x+h, y+k) - P(x,y) \\ Q(x+h, y+k) - Q(x,y) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \text{reszta},$$

czyli:

$$\begin{aligned} \Delta P &= ah - bk + r_1 \\ \Delta Q &= bh - ak + r_2 \end{aligned}$$

(r_1, r_2 to są reszty) lub, przechodząc z powrotem do języka zespolonego,

$$\Delta f = \Delta P + i\Delta Q = (a + bi)(h + ik) + \text{reszta}$$

i, dzieląc otrzymane wyrażenie przez $h + ik$, dostaniemy

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik} = a + bi + \frac{\text{reszta}}{h + ik},$$

a ostatni wyraz dąży do 0, gdy $h + ik$ dąży do zera (ze względu na (8)). Tak więc

$$\frac{f(z + h + ik) - f(z)}{h + ik} \to a + bi, \quad \text{gdy} \quad h, k \to 0,$$

czyli

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \tag{10}$$

CBDO

1.4 Część rzeczywista i urojona funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Załóżmy, że części: rzeczywista $P(x,y)$ i urojona $Q(x,y)$ funkcji holomorficznej f są funkcjami klasy C^2. (Tak naprawdę to założenie jest niepotrzebne, gdyż jeśli funkcja jest holomorficzna, to ma *wszystkie* pochodne. Pokażemy to niedługo, a na razie zostawimy jako założenie). Wtedy:

Tw. Część rzeczywista P i część urojona Q funkcji holomorficznej spełniają równanie Laplace'a.

Dow.

Zróżniczkujmy równanie (5) po x, a równanie (6) po y i dodajmy stronami. Wykorzystując fakt równości drugich pochodnych mieszanych funkcji Q otrzymamy:

$$\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{11}$$

a to jest równanie Laplace'a dla $P(x,y)$.

Teraz zróżniczkujmy (5) po y, a równanie (6) po x i znów dodajmy stronami. Wykorzystując tym razem fakt równości pochodnych mieszanych P otrzymamy, że

$$\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial y^2} = 0 \tag{12}$$

a to jest równanie Laplace'a dla $Q(x,y)$.

CBDO

Równania Cauchy'ego–Riemanna mają tę ważną konsekwencję, że *mając daną część rzeczywistą (urojoną) funkcji holomorficznej, można odtworzyć jednoznacznie z dokładnością do stałej jej część urojoną (rzeczywistą).* Załóżmy, że dana jest część rzeczywista $P(x,y)$ i chcemy odtworzyć część urojoną $Q(x,y)$. Z równań Cauchy'ego–Riemanna mamy: $Q_x = -P_y$, $Q_y = P_x$; mamy w ten sposób dane dwie pochodne cząstkowe funkcji Q, które 'odcałkowujemy' (tzn. liczymy funkcję pierwotną względem każdej zmiennej).

Przykł. Załóżmy, że część rzeczywista funkcji holomorficznej dana jest przez: $P(x,y) =$; znaleźć część urojoną.

Najsampierw sprawdzamy, czy nie zostaliśmy wpuszczeni w maliny i czy rzeczywiście P jest częścią rzeczywistą jakiejś funkcji holomorficznej. Kryterium na to jest spełnienie przez P równania Laplace'a. Sprawdzamy, że rzeczywiście P *spełnia* równanie (11).

To teraz przystępujemy do odcałkowywania: Mamy: $Q_x = P_y = ...$

1.5 Przykłady funkcji holomorficznych

1. Funkcja stała: $f = \text{const}$ jest holomorficzna i $f'(z) \equiv 0$, bo

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = 0.$$

2. Odwzorowanie tożsamościowe $f(z) = z$ jest funkcją holomorficzną: $f'(z) = 1$.

3. Suma i iloczyn funkcji holomorficznych jest funkcją holomorficzną. Ponadto:

$$(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z), \tag{13}$$

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z), \tag{14}$$

(dowody identyczne jak w przypadku rzeczywistym).

4. Jeżeli f jest holomorficzna oraz $f'(z) \neq 0$ dla $z \in \mathcal{O}$, to

$$\left(\frac{1}{f(z)} \right)' = -\frac{f'(z)}{f(z)^2} \tag{15}$$

5. Z tego wynika, że *funkcja wymierna*:

$$f(z) = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 z + b_0}$$

jest funkcją holomorficzną dla wszystkich z takich, że mianownik jest różny od zera.

6. $f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y$, tzn. $P = e^x \cos y$, $Q = e^x \sin y$. Policzmy macierz pochodnych:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}$$

Dla tej funkcji, zapisanej jako funkcja z, mamy więc

$$f'(z) = f(z); \tag{16}$$

kojarząc to definicją funkcji wykładniczej dla przypadku rzeczywistego, tzn. funkcją $f(x)$ taką, że $f'(x) = f(x)$, możemy zapisać, ę $f(z) = e^z$, tzn.

$$e^z = e^x \cos y + i e^x \sin y.$$

7. Teraz bohater negatywny, tzn. przykład funkcji, która *nie jest* holomorficzna: Niech $f(z) = \bar{z} = x - iy$. Mamy: $P = x$, $Q = -y$. Macierz pochodnych jest

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Inna funkcja nieholomorficzna: $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$. Mamy: $P = x^2$, $Q = y^2$ i macierz pochodnych jest

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

co *nie ma* tej postaci, co macierz Cauchy'ego–Riemanna.

9. Wiedząc, że funkcja *wykładnicza* $f(z) = e^z$ jest holomorficzna, definiujemy:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

i sinus argumentu zespolonego jest funkcją holomorficzną;

10. Biorąc:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

i również cosinus argumentu zespolonego jest funkcją holomorficzną.

11. Analogicznie, również *funkcje hiperboliczne* argumentu zespolonego:

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \qquad \cos z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

są holomorficzne.

12. *Superpozycja funkcji holomorficznych* f, g: Jeżeli:

$$\mathcal{O} \xrightarrow{f} \mathcal{U} \xrightarrow{g} \mathbb{C}$$

gdzie f – holomorficzna na $\mathcal{O}$ – otwartym podzbiorze $\mathbb{C}$, zaś g – holomorficzna na $\mathcal{U}$ – otwartym podzbiorze $\mathbb{C}$, to $g \circ f$ jest holomorficzna na $\mathcal{O}$.

Dow. Patrząc na funkcję $g \circ f$ jako na odwzorowanie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ widzimy, że jest to odwzorowanie klasy C^1 i jego macierz Jacobiego jest iloczynem macierzy Jacobiego odwzorowań f i g. Mamy więc:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 - bb_1 & -ab_1 - ba_1 \\ a_1 b + ab_1 & -bb_1 + aa_1 \end{pmatrix}; \tag{17}$$

macierz po prawej stronie jest macierzą Cauchy'ego – Riemanna, czyli iloczyn tych macierzy jest odpowiada macierzy Jacobiego pewnej funkcji holomorficznej. Wzór (17) w języku funkcji oznacza, że

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z). \tag{18}$$

CBDO

Dygresja z algebry: Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy liczbami zespolonymi a macierzami C–R:

$$\mathbb{C} \ni z = a + bi \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Ta odpowiedniość zachowuje działania arytmetyczne:

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = (aa_1 - bb_1) + i(ab_1 + ba_1),$$

co – jak widać – dokładnie odpowiada wzorowi (17) dla macierzy.

13. **Stw.** Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją holomorficzną; niech $\xi_0 = f(z_0)$, **RYS.** przy czym $f'(z_0) \neq 0$. Wtedy istnieją otoczenia $\mathcal{U}$ punktu z_0 oraz $\mathcal{V}$ punktu ξ_0 takie, że f jest bijekcją $\mathcal{U}$ na $\mathcal{V}$, a ponadto f^{-1} jest funkcją holomorficzną na $\mathcal{V}$.

Dow. Oznaczmy macierz Jacobiego $\mathcal{J}$ dla f w punkcie z_0 jako: $\mathcal{J} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, gdzie $f'(z_0) = a + bi$. Wyznacznik macierzy Jacobiego jest równy: $\det \mathcal{J} = a^2 +$

$b^2 = |f'(z_0)^2| \neq 0$; niezerowość wyznacznika z założenia. Możemy więc mówić o odwzorowaniu odwrotnym. Macierz odwrotna do $\mathcal{J}$ jest równa:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{b^2+a^2} \\ -\frac{b}{b^2+a^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix};$$

widać, że jest to macierz C–R, czyli odwzorowanie f^{-1} jest holomorficzne. Postać macierzy $\mathcal{J}^{-1}$ odpowiada wyrażeniu na pochodną funkcji odwrotnej:

$$(f^{-1})'(\xi_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi_0))}.$$

CBDO

1.6 Inne warunki holomorficzności otrzymywane przez rachunki na 1− formach na $\mathbb{C}$

Dotąd rozpatrywaliśmy $k-$formy na $\mathbb{R}^N$ o wartościach *rzeczywistych.* Teraz rozpatrzmy $k-$formy o wartościach *zespolonych.*

Każda taka forma (powiedzmy, $k-$forma) ω może zostać zapisana jako:

$$\omega = \omega_R + i\omega_I,$$

gdzie funkcje występujące jako współczynniki przy $k-$ formach bazowych w obu formach ω_R i ω_I są rzeczywiste.

Niech $z = x + iy$. Wtedy $\bar{z} = x - iy$. Wyraźmy x i y przez z i $\bar{z}$:

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Mamy:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = i, \qquad \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = -i,$$

skąd

$$\mathsf{d}z = \mathsf{d}x + i\mathsf{d}y, \qquad \mathsf{d}\bar{z} = \mathsf{d}x - i\mathsf{d}y$$

oraz

$$\mathsf{d}x = \frac{1}{2}(\mathsf{d}z + \mathsf{d}\bar{z}), \qquad \mathsf{d}y = \frac{1}{2i}(\mathsf{d}z - \mathsf{d}\bar{z}).$$

Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ (gdzie $\mathcal{O}$ – zb. otwarty) będzie funkcją klasy C^1. Zapiszmy różniczkę f:

$$\begin{aligned} \mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathsf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathsf{d}y &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(\mathsf{d}z + \mathsf{d}\bar{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(\mathsf{d}z - \mathsf{d}\bar{z}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathsf{d}z + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathsf{d}\bar{z} \end{aligned}$$

Zdefiniujmy teraz:

$$\frac{\partial f}{\partial z} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \stackrel{df}{=} \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{19}$$

Możemy więc różniczkę $\mathsf{d}f$ zapisać jako:

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathsf{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathsf{d}\bar{z}. \tag{20}$$

Uwaga. Powyższych symboli: $\frac{\partial f}{\partial z}$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ *nie można* traktować jako pochodnych cząstkowych. Bowiem liczby: z oraz $\bar{z}$ *nie zmieniają* się niezależnie (p.**RYS.**), więc nie można mówić tutaj o pochodnych cząstkowych – wymaga się bowiem przy nich, aby zmieniała się *tylko jedna zmienna rzeczywista*, a pozostałe były stałe; tu taka sytuacja nie ma miejsca.

Wzory Cauchy'ego – Riemanna (5) oraz (6) można zapisać w postaci zespolonej:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}, \tag{21}$$

Niech $f(z) = P(x,y) + iQ(x,y)$ oraz ułóżmy – jak poprzednio – pochodne cząstkowe P oraz Q w macierz Jacobiego, z wykorzystaniem warunków C–R:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

gdzie $a = P_x$, $b = Q_y$ (wzory (9)).

Pochodne cząstkowe f: $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ można, z wykorzystaniem warunków (21), zapisać:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (a+ib, -b+ia),$$

co zapiszmy w postaci:

$$(1,i)\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} = (1,i)\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Przypominając sobie, że był też wzór (10):

$$f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv a + ib$$

mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z),$$

oraz

$$\frac{\partial f}{\partial y} = b + ia = i(a+ib) = if'(z);$$

czyli:

$$i\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

lub

$$f'(z) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$

Przypominając sobie definicje (19) symboli $\frac{\partial f}{\partial z}$ i $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$, mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z). \tag{22}$$

Powyższe dywagacje podsumujmy w stwierdzeniu:

Stw. f jest holomorficzna wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Wtedy też $\frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$.

Uwagi.

1. Symbole: $\frac{\partial}{\partial z}$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, aczkolwiek *nie oznaczają* pochodnych cząstkowych, to są liniowe i spełniają regułę Leibniza:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial z} = \frac{\partial(f)}{\partial z}g + f\frac{\partial(g)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial(f)}{\partial \bar{z}}g + f\frac{\partial(g)}{\partial \bar{z}}.$$

2. Z wzorów (19) i bezpośrednich rachunków wynikają równości:

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1;, \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0;, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0;, \quad \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} = 1.$$

Stąd wynika, że:

$$\mathsf{d}z = 1\,\mathsf{d}z + 0\,\mathsf{d}\bar{z}; \qquad \mathsf{d}\bar{z} = 0\,\mathsf{d}z + 1\,\mathsf{d}\bar{z}.$$

3. Dla naprzykładu[1] policzmy:

- $\dfrac{\partial |z|^2}{\partial z} = \dfrac{\partial z\bar{z}}{\partial z} = \dfrac{\partial \bar{z}}{\partial z}z + \dfrac{\partial z}{\partial z}\bar{z} = \bar{z};$ analogicznie $\dfrac{\partial |z|^2}{\partial \bar{z}} = z.$
- Analogicznie: $\dfrac{\partial(z^k\bar{z}^l)}{\partial z} = l\,\bar{z}^k z^{l-1}$ oraz $\dfrac{\partial(z^k\bar{z}^l)}{\partial \bar{z}} = k\,\bar{z}^{k-1}z^l$

1.7 Formy na $\mathbb{C}$ i ich całkowanie

Jakie formy mogą występować na $\mathbb{C}$?

1. 0−formy tzn. funkcje
2. 1−formy: $\overset{1}{\omega} = \overset{1}{\omega}_R + i\,\overset{1}{\omega}_I$
3. 2−formy: $\overset{2}{\omega} = \eta\,\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}\bar{z}$ (η – funkcja).

Wszystkie wyższe formy są równe zeru. (Prof. Woronowicz mawia w tej sytuacji: "Życie form na przestrzeni $\mathbb{R}^2$ jest dość prymitywne".

Interesujące całki to całki postaci:

$$\int_l f(z)\mathsf{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))\mathsf{d}\varphi(t) = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathsf{d}t$$

gdzie l dana jako $\varphi(t)$ jest krzywą w $\mathbb{C}$: $\varphi : \mathbb{R} \supset [a,b] \ni t \to \mathcal{O} \subset \mathbb{C}$. **RYS.**.

Lemat:

$$\left|\int_l f(z)\mathsf{d}z\right| \leqslant \max_{z\in l}|f(z)| \cdot L,$$

gdzie L – długość krzywej l to – jak pamiętamy z rozdziału o całkach krzywoliniowych nieskierowanych:

$$L = \int_a^b |\phi'(t)|\mathsf{d}t = \int_a^b \sqrt{\varphi_x'(t)^2 + \varphi_y'(t)^2}\mathsf{d}t$$

[1] Zwrot Kol. Kierownika z pradawnych audycji J. Fedorowicza

Dow. Dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \dots, z_n$ mamy:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

więc też dla całek:

$$\left|\int_l f(z)\mathsf{d}z\right| \leqslant \int_a^b |f(z)||\mathsf{d}z| = \int_a^b |f(z)||\phi'(t)|\mathsf{d}t \leqslant \max_{z\in l}|f(z)| \int_a^b |\phi'(t)|\mathsf{d}t = \max_{z\in l}|f(z)| \cdot L.$$

CBDO

Przykł. Obliczmy całkę:

$$\int_l \frac{\mathsf{d}z}{z},$$

gdzie l – okrąg o promieniu R i środku w $(0,0)$, przebiegany przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Parametryzujemy okrąg jako:

$$\varphi(t) = R(\cos t + i \sin t),$$

skąd mamy:

$$\varphi'(t) = R(-\sin t + i\cos t) = i\varphi(t).$$

Tak więc

$$\int_l \frac{\mathsf{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\mathsf{d}t = i\int_0^{2\pi} \mathsf{d}t = 2\pi i.$$

Zapamiętajmy ten wynik – niedługo będzie potrzebny.

Zdefiniujmy funkcję zmiennej zespolonej $\phi(\xi)$ jako

$$\phi(\xi) = \int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^k}. \tag{23}$$

gdzie f – funkcja holomorficzna, zaś l – krzywa zamknięta otaczająca punkt ξ. Pokażemy

Stw. Określona powyżej funkcja $\phi(\xi)$ jest holomorficzna na $\mathbb{C} \setminus \xi$ i zachodzi

$$\phi'(\xi) = k\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^{k+1}}. \tag{24}$$

Dow. Trzeba pokazać, że

$$\lim_{h\to 0}\frac{\phi(\xi+h)-\phi(\xi)}{h} = k\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^{k+1}}.$$

Oszacujmy różnicę:

$$\left|\frac{\phi(\xi+h)-\phi(\xi)}{h} - k\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^{k+1}}\right| =$$

$$= \left|\int_l \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{(z-\xi-h)^k} - \frac{1}{(z-\xi)^k}\right) - k\frac{1}{(z-\xi)^{k+1}}\right] f(z)\mathsf{d}z\right|$$

$$\leqslant \max_{z\in l}|f(z)| \cdot \max_{z\in l}|[\dots]| \cdot L$$

gdzie L – długość krzywej l. Jedynie ostatni człon zależy od h, toteż nim tylko będziemy się zajmować.

Trzeba pokazać, że dąży on (ten człon) do zera przy $h \to 0$. Sprowadźmy go najsampierw do wspólnego mianownika:

$$|[\ldots]| = \frac{\left|\frac{1}{h}\left((z-\xi)^{k+1} - (z-\xi-h)^k(z-\xi)\right) - k(z-\xi-h)^k\right|}{|(x-\xi-h)^k(z-\xi)^{k+1}|}$$

tak więc

$$\max|[\ldots]| \leqslant \frac{\max\ \text{licznika}}{\min\ \text{mianownika}} \leqslant \frac{\max\ \text{licznika}}{(\delta-\epsilon)^{2k+1}},$$

gdzie: $\delta = \text{odległość}\ (\xi, l) = \inf_{z\in l}|\xi - z|$, ϵ zaś jest następującą liczbą:

Dążymy z h do zera, więc dla dostatecznie małych h istnieje takie ϵ, $0 < \epsilon < \delta$, że:

$$|z-\xi| \geqslant \delta - \epsilon, \qquad \text{oraz} \qquad |z-\xi-h| \geqslant \delta-\epsilon.$$

Zatem min mianownika jest większy lub równy $(\delta-\epsilon)^{2k+1}$.

Tak więc oszacowaliśmy mianownik przez coś niezależnego od h. Teraz trzeba pokazać, że max licznika dąży do zera przy $h \to 0$.

Zauważmy, że licznik jest *wielomianem* w zmiennej h. Współczynniki tego wielomianu dostaniemy z wzoru dwumiennego Newtona, który stosujemy tu następująco:

$$(z-\xi-h)^k = (z-\xi)^k - \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}(z-\xi)^{k-1}h + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}(z-\xi)^{k-2}h^2 + \cdots \pm h^k$$

Mamy więc:

$$\text{licznik} =$$

$$\left|\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}(z-\xi)^k - \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}(z-\xi)^{k-1}h + \cdots - k(z-\xi)^k - k\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix}(z-\xi)^{k-1}h + \ldots\right|$$

$$= |h| \cdot |\text{wielomian od}\ (z-\xi, h)| \leqslant |h| \cdot M,$$

gdzie M – pewna stała. Ostatnia nierówność bierze się z faktu, że wielomian na zbiorze ograniczonym osiąga swój kres górny – tu oznaczany jako M właśnie.

CBDO

Ważne własności funkcji holomorficznych

1. Niech $f : \mathbb{C} \supset \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ – funkcja holomorficzna. Mamy, zgodnie z (20):

$$\mathsf{d}f = \frac{\partial f}{\partial z}\mathsf{d}z + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\mathsf{d}\bar{z} = f'(z)\mathsf{d}z$$

(bo $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ zgodnie z wzorami C–R) co daje

$$\mathsf{d}(f(z)\mathsf{d}z) = \mathsf{d}f(z) \wedge \mathsf{d}z = f'(z)\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z = 0.$$

2. Obliczmy teraz całkę po krzywej zamkniętej l ograniczającej obszar S z f – funkcji holomorficznej na S (tak więc $l = \partial S$). Mamy:

$$\int_l f(z)\mathsf{d}z = \int_S \mathsf{d}(f(z)\mathsf{d}z) = 0.$$

Fakt ten jest treścią ważnego twierdzenia.

Tw. (Cauchy'ego). Niech l będzie konturem zamkniętym, $\mathcal{O}$ – otwarty podzbiór $\mathbb{C}$ zawierający l i jej wnętrze (tzn. S), f – funkcja holomorficzna na $\mathcal{O}$. Wtedy:

$$\int_l f(z)\mathsf{d}z = 0.$$

Wniosek. Niech l – krzywa zamknięta w $\mathbb{C}$, nie przechodząca przez 0 i jednokrotnie obiegająca 0; obieg jest w kierunku antyzegarowym. Wtedy

$$\int_l \frac{\mathsf{d}z}{z} = 2\pi i. \tag{25}$$

Dow. Bowiem zmodyfikujmy kontur, dorysowując dostatecznie mały okrąg C w środku i łącząc go odcinkiem p z krzywą l **RYS.**; odcinek p przebiegamy raz w te, a drugi raz we wte. Dostając w ten sposób krzywą l' i mamy: $\int_{l'} \frac{\mathsf{d}z}{z} = 0$, bo w obszarze ograniczonym przez krzywą l' funkcja $\frac{1}{z}$ jest holomorficzna. W ten sposób, $\int_l \frac{\mathsf{d}z}{z} + \int_C \frac{\mathsf{d}z}{z} = 0$, bo całki po odcinku p znoszą się nawzajem. A że okrąg C obiegamy w kierunku zegarowym, to stąd wynika równość (25).

CBDO

Tw. (Cauchy'ego – mocniejsza wersja). Niech S będzie zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathbb{C}$, mającym kawałkami gładki brzeg l. Wtedy dla dowolnej funkcji holomorficznej na S i ciągłej na $S \cup l$ mamy:

$$\int_l f(z)\mathsf{d}z = 0.$$

Idea dowodu. Dla konturu $\tilde{l}$ bliskiego l i zawartego w S jest spełnione tw. Cauchy'ego. Następnie należy wziąć granicę $\tilde{l} \to l$.

Koniec idei dowodu

1.8 Wzór całkowy Cauchy'ego

Tw. (Wzór całkowy Cauchy'ego). Niech f – funkcja holomorficzna na zbiorze otwartym $\mathcal{O}$. Niech S będzie zbiorem otwartym ograniczonym w $\mathcal{O}$, mającym kawałkami gładki brzeg l. Wtedy dla dowolnego punktu $\xi \in S$ zachodzi

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} \tag{26}$$

Uwaga. Jeśli znamy wartości funkcji f na konturze l, to możemy obliczyć wartość funkcji w *dowolnym* punkcie w obszarze ograniczonym przez ten kontur. Jest to kolejnym przejawem 'sztywności' funkcji holomorficznych, tzn. że jeśli funkcja jest holomorficzna, to własności tej funkcji są w dużym stopniu zdeterminowane przez ten fakt. W przypadku rzeczywistym nie ma analogonu wzoru Cauchy'ego: Dla funkcji dwóch zmiennych rzeczywistych, nawet dowolnie gładkiej, zachowanie na brzegu konturu nie ma nic wspólnego z zachowaniem wewnątrz.

Dow. Mamy:

$$\int\limits_{l'} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} = 0,$$

gdy ξ nie jest otoczony przez l'. Weźmy jako l' kontur utworzony z l przez dodanie małego okręgu C_z (z tzn. obieganego zegarowo) oraz odcinka p łączącego l oraz C_z. Mamy:

$$0 = \int\limits_{l'} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} = \int\limits_{l} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} + \int\limits_{C_z} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi}$$

czyli

$$\int\limits_{l} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} = \int\limits_{C_a} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi}$$

(C_a – okrąg obiegany antyzegarowo). Policzymy teraz całkę po okręgu C_a, sparametryzujmy więc go:

$$z = \xi + r(\cos t + i\sin t) = \xi + re^{it} \quad \text{mamy :} \quad \mathsf{d}z = ire^{it} \quad \text{oraz}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi + re^{it})ire^{it}\mathsf{d}t}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} f(\xi + re^{it})\mathsf{d}t.$$

Bierzemy $\epsilon > 0$. Z ciągłości funkcji f wynika, że dla dostatecznie małego r

$$|f(\xi + re^{it}) - f(\xi)| < \epsilon$$

czyli

$$\int_0^{2\pi} f(\xi + re^{it})\mathsf{d}t = \int_0^{2\pi} f(\xi)\mathsf{d}t + \int_0^{2\pi} \Big(f(\xi + re^{it}) - f(\xi)\Big)\,\mathsf{d}t.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest równy $2\pi f(\xi)$, drugi zaś jest ograniczony od góry przez $2\pi\epsilon$. Tak więc

$$I = 2\pi i f(\xi) + \text{coś}, \quad \text{gdzie } |\text{coś}| \leqslant 2\pi\epsilon.$$

Biorąc granicę $\epsilon \to 0$, mamy

$$\int\limits_{l} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi} = 2\pi i f(\xi),$$

czyli

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l} \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z-\xi}$$

co jest wzorem (26).

CBDO

Teraz przypomnijmy sobie definicję funkcji $\phi(\xi)$ daną przez wzór (23), zapisując go ździebko inaczej (ze wskaźnikiem k) niż uprzednio i z dodatkowym czynnikiem:

$$\phi_k(\xi) = \int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^k} \tag{27}$$

Uprzednio też pokazaliśmy, że $\phi_k(\xi)$ spełnia zależność:

$$\phi_k'(\xi) = k\phi_{k+1}(\xi).$$

Biorąc pod uwagę wzór Cauchy'ego, mamy w ten sposób:

$$\phi_1(\xi) = f(\xi) \Longrightarrow f(\xi) = 1 \cdot \phi_1(\xi);$$

i dalej:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\phi_1'(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^2};$$

$$f''(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\phi_2'(\xi) = \frac{1}{2\pi i}2\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^3};;\dots$$

$$f^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i}(k-1)!\phi_k'(\xi) = \frac{1}{2\pi i}(k-1)!k\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^{k+1}}\dots$$

Wniosek: Funkcja holomorficzna jest różniczkowalna w sensie zespolonym dowolną ilość razy i na $k-$tą pochodną f mamy wzór

$$f^{(k)}(\xi) = k!\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^{k+1}} \tag{28}$$

1.9 Funkcje całkowite

Def. *Funkcja całkowita* to funkcja holomorficzna na całej płaszczyźnie zespolonej $\mathbb{C}$.

Przykł. Wielomiany oraz funkcja wykładnicza są funkcjami całkowitymi.

Tw. (Liouville'a). Każda funkcja całkowita i ograniczona jest stała.

Dow. Niech $f(z)$ będzie ograniczona, tzn. dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ niech zachodzi: $|f(z)| \leqslant M$. Pochodna funkcji f wynosi:

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)^2}.$$

Za l weźmy tu okrąg o środku w ξ i promieniu R, obiegany antyzegarowo.

Oszacujmy teraz pochodną f: Dla dowolnego $\xi \in \mathbb{C}$ mamy

$$|f'(\xi)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\max_{z\in l}\left|\frac{f(z)}{(z-\xi)^2}\right| \cdot \text{długość konturu } l$$

$$\leqslant 2\pi R \cdot \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{M}{R^2} = \frac{M}{R};$$

tak więc moduł z pochodnej (w dowolnym punkcie) jest mniejszy od *dowolnie zadanej* liczby dodatniej, a to znaczy, że

$$f'(\xi) = 0$$

w *dowolnym punkcie* ξ płaszczyzny zespolonej.

Z założenia, f jest holomorficzna, tzn. $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. Zgodnie z warunkiem... znaczy to, że również $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$, a to z kolei znaczy, że $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Łącznie znaczy to, że $f(\xi) =$const.

CBDO

Przykł. Nie jest zaskoczeniem, że wielomiany oraz funkcja wykładnicza w płaszczyźnie zespolonej są nieograniczone (jako że są nieograniczone na osi rzeczywistej). Być może zaskoczeniem dla Czytelnika będzie fakt, że również funkcje trygonometryczne $\sin z$ oraz $\cos z$ są nieograniczone na $\mathbb{C}$, skoro są ograniczone dla argumentu rzeczywistego. Ale ten fakt (nieograniczoności na $\mathbb{C}$) stanie się jasny, gdy wziąć wyrażenia na część rzeczywistą i urojoną tych funkcji (wzory ...); ponieważ są tam obecne funkcje hiperboliczne $\sinh(\cdot)$ czy $\cosh(\cdot)$, to jest jasne, że $\sin z$ i $\cos z$ są nieograniczone na $\mathbb{C}$.

Twierdzenie Liouville'a ma różnorodne zastosowania w analizie zespolonej; na razie pokażemy jeden przykład, aby Czytelnik zobaczył, 'jak to działa'.

Tw. (zasadnicze twierdzenie algebry). Każdy wielomian zespolony ma przynajmniej jeden pierwiastek.

Dow. Niech $w(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$. Przypuśćmy, że dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, $w(z) \neq 0$. Wobec tego funkcja

$$f(z) = \frac{1}{w(z)}$$

jest całkowita (wiemy, że jeśli $f(z)$ jest holomorficzna oraz nigdzie się nie zeruje, to $\frac{1}{f(z}$) też jest holomorficzna).

Zapiszmy wzór na $f(z)$ nieco inaczej:

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \frac{1}{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \frac{a_{n-2}}{z^2} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}}$$

Gdy $|z| \to \infty$, to pierwszy ułamek dąży do 0, a drugi – do $\frac{1}{a_n}$. Wobec tego, funkcja f jest *ograniczona*, a więc – z tw. Liouville'a – jest *stała*. Otrzymaliśmy sprzeczonść, tzn. nieprawdą jest, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $w(z) \neq 0$, a to znaczy, że istnieje takie $z_0 \in \mathbb{C}$, że $w(z_0) = 0$. A to jest właśnie treścią zasadniczego twierdzenia algebry.

CBDO

1.10 Wzór Taylora

Niech f – funkcja holomorficzna we wnętrzu $K(z_0, R)$ (koło o środku w punkcie z_0 i promieniu R) oraz ciągła na jego domknięciu $\overline{K(z_0, R)}$ **RYS.** Mamy wtedy, dla dowolnego $\xi \in K(z_0, R)$ wzór Cauchy'ego (26), który dla wygody tu przytaczamy:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{z - \xi} \tag{29}$$

gdzie l jest brzegiem koła $K(z_0, R)$ obieganym antyzegarowo.

Zapiszmy:

$$z - \xi = z - z_0 + z_0 - \xi$$

skąd

$$\frac{1}{z - \xi} = \frac{1}{(z - z_0) - (\xi - z_0)} = \frac{1}{(z - z_0)\left[1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right]} \tag{30}$$

Zauważmy, że mamy:

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| < 1,$$

tak więc wyrażenie: $1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}$ można rozwinąć w *szereg geometryczny* w potęgach $\frac{\xi - z_0}{z - z_0}$. Dokładniej, zapiszmy *skończoną* wersję rozwinięcia. Weźmy jakąś liczbę naturalną N i mamy:

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1 - x} = \sum_{k=0}^{N} x^k + \frac{x^{N+1}}{1 - x} \tag{31}$$

więc wyrażenie (30) możemy zapisać

$$\frac{1}{z-\xi} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}} + \frac{1}{z-\xi}\frac{(\xi - z_0)^{N+1}}{(z-z_0)^{N+1}}$$

i wstawiając to do(29), dostaniemy:

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=0}^{N}\int_l \frac{f(z)(\xi - z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\mathsf{d}z + \frac{1}{2\pi i}\int_l f(z)\frac{1}{z-\xi}\frac{(\xi-z_0)^{N+1}}{(z-z_0)^{N+1}}\mathsf{d}z$$

co zapiszmy w postaci

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\mathsf{d}z\right)(\xi - z_0)^k + \left(\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)(z-z_0)^{N+1}}\right)(\xi - z_0)^{N+1} \tag{32}$$

Teraz! W $k-$tym wyrazie powyższej sumy rozpoznajemy $k-$*tą pochodną* funkcji $f(z)$ w punkcie z_0, możemy więc zapisać:

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)(\xi - z_0)^k + R_N(z_0, \xi), \tag{33}$$

co jest zespoloną wersją *wzoru Taylora*. We wzorze (33) oznaczyliśmy:

$$R_N(z_0,\xi) = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)\mathsf{d}z}{(z-\xi)(z-z_0)^{N+1}}\right)(\xi - z_0)^{N+1} \tag{34}$$

tak więc R_N jest *resztą* szeregu Taylora, wyrażoną w postaci całki konturowej.

Co można zrobić z resztą? Oszacujmy ją:

$$|R_N| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sup_{z\in l}\frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{N+1}|z-\xi|}\cdot|\xi - z_0|^{N+1}\cdot 2\pi R$$

$$= \frac{R|\xi - z_0|^{N+1}}{R^{N+1}}\sup_{z\in l}\frac{|f(z)|}{|z-\xi|} \equiv RM\left(\frac{|\xi - z_0|}{R}\right)^{N+1} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

(w ostatniej z powyższych równości nazwaliśmy:

$$M \equiv \sup_{z\in l}\frac{|f(z)|}{|z-\xi|};$$

jest to liczba skończona, gdyż f jest ciągła, więc na krzywej l, będącej zbiorem zwartym, jest ograniczona).

Na powyższe oszacowanie można patrzeć jako na dowód faktu, iż reszta szeregu potęgowego (w potęgach $(z - z_0)$) dąży do 0, gdy $N \to \infty$. Tak więc szereg ten jest zbieżny. Można więc zapisać wzór (33) jako sumę *szeregu zbieżnego*:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k \tag{35}$$

Uwaga. Gdy więc mamy dany punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, oraz funkcję, która jest holomorficzna w kole $K(z_0, R)$, to mamy gwarancję, że wszędzie w kole funkcja ta posiada rozwinięcie w szereg potęgowy (35).

W ten sposób, np. funkcje: e^z, $\sin z$, $\cos z$, które są holomorficzne wszędzie na płaszczyźnie, posiadają rozwinięcie w szereg Taylora w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$.

Można też zadać pytanie w pewnym sensie odwrotne:

Mamy dane $z_0 \in \mathbb{C}$ oraz zadany pewien ciąg $\{a_k\}$, z którego tworzymy szereg potęgowy

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k. \tag{36}$$

Zadajmy naturalne pytania:

1. Dla jakich $z \in \mathbb{C}$ szereg ten jest zbieżny?
2. Czy jeżeli szereg jest zbieżny, to jego suma jest funkcją holomorficzną?

Okazuje się, że sytuacja jest analogiczna, jak w przypadku szeregu Taylora. Bez dowodu podamy odpowiedzi na powyższe pytania:

1. Szereg potęgowy (36) jest zbieżny wewnątrz koła $K(z_0, R)$, gdzie R dane jest przez któreś z wyrażeń
$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| \quad \text{lub} \quad R = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \tag{37}$$
(jeśli obie granice istnieją, to są równe; a pierwsza istnieje, jeśli istnieje druga. Pamiętliwy Czytelnik niechybnie rozpozna w powyższych wzorach zespolony analogon wzorów na promień zbieżności dla szeregów rzeczywistych).
2. Wewnątrz koła zbieżności, suma szeregu (36) jest funkcją holomorficzną.

1.11 O zerach funkcji holomorficznych, jeśli jest ich ∞ wiele w ograniczonym obszarze

Wnioski. Dla funkcji holomorficznej nie równej tożsamościowo zeru, zera tej funkcji (tzn. rozwiązania równania $f(z) = 0$) są izolowane.

Dokładniej, ma miejsce

Stw. Niech f – holomorficzna na $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ – otwarty. Wtedy, jeśli dla pewnego ciągu $\{z_n\}$ zbieżnego do $z_0 \in \mathcal{O}$, $z_n \neq z_0$ dla każdego n, zachodzi: $f(z_n) = 0$, to dla pewnej kuli $K(z_0, R) \subset \mathcal{O}$ zachodzi:

$$f(z) = 0 \quad \text{dla} \quad z \in K(z_0, R).$$

Dow. Skoro $f(z_n) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, a f – ciągła, to zachodzi: $f(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = 0$. Rozwińmy f w szereg Taylora wokół z_0. Z założenia, f nie znika wszędzie, zatem

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k \not\equiv 0 \quad \text{dla} \quad z \in K(z_0, R).$$

Zatem istnieje k takie, że $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Weźmy takie najmniejsze k i oznaczmy je przez k_0.. Jest to liczba większa lub równa 1 taka, że:

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \quad \text{dla} \quad k = 0, 1, 2, \ldots k_0 - 1.$$

$$f^{(k_0)}z \neq 0.$$

Zapiszmy więc jeszcze raz rozwinięcie f w szereg Taylora z wykorzystaniem faktu, iż pierwszych k_0 pochodnych się zeruje:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^k = (z-z_0)^{k_0} \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^{k-k_0} \equiv (z-z_0)^{k-k_0} g(z) \tag{38}$$

gdzie oznaczyliśmy:

$$g(z) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z-z_0)^{k-k_0}$$

Mamy:

$$0 = f(z_n) = (z_n - z_0)^{k_0} g(z_n)$$

i, ponieważ z założenia $z_n \neq z_0$, to mamy

$$g(z_n) = 0 \quad \text{dla dowolnego } n.$$

Przechodząc do granicy $n \to \infty$, mamy:

$$g(z_0) = 0.$$

Ale to znaczy, że

$$g(z_0) = \frac{1}{k_0!} f^{(k_0)}(z_0) = 0.$$

Dostaliśmy sprzeczność, bo na początku pokazaliśmy, że $f^{(k_0)}(z_0) \neq 0$.

CBDO

Def. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – zbiór otwarty. Mówimy, że $\mathcal{O}$ jest *niespójny*, jeśli

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2,$$

gdzie $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ są otwarte i niepuste, oraz rozłączne: $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. **RYS.**

Def. Zbiór $\mathcal{O}$ jest spójny, jeżeli nie jest niespójny.

Powyższe stwierdzenie można jeszcze tak wypowiedzieć, że jeśli funkcja zeruje się na nieskończonym ograniczonym zbiorze punktów $\mathcal{P}$, to zeruje się na dysku (dwuwymiarowej kuli) zawierającej z_0 (granicę podciągu zbieżnego ciągu punktów z $\mathcal{P}$). Można to stwierdzenie wzmocnić wskazując większy zbiór, na którym f się zeruje.

Tw. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ – zbiór otwarty i spójny; niech f – funkcja holomorficzna na $\mathcal{O}$. Niech $f(z_n) = 0$ dla pewnego ciągu $\{z_n\}$, $z_n \in \mathcal{O}$, gdzie $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in \mathcal{O}$. Wtedy $f(z) = 0$ dla wszystkich $z \in \mathcal{O}$.

Dow. Zdefiniujmy zbiór $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathcal{O} : f^{(k)}(z) = 0 \ \text{ dla } \ k = 0, 1, 2, \dots\}$$

Pokażemy, że :

- $\mathcal{U}$ jest otwarty

•• $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest otwarty.

Ad $\bullet$: Jeśli $z^* \in \mathcal{U}$, to szereg Taylora wokół z^* jest złożony z samych zer. Wobec tego, $f(z) = 0$ dla $z \in K(z^*, \rho)$, $\rho > 0$. Wtedy także $f^{(k)}(z) = 0$ dla $z \in K(z^*, \rho)$ i dowolnego $k \geqslant 0$. Wobec tego $K(z^*, \rho) \subset \mathcal{U}$, czyli $\mathcal{U}$ jest otwarty.

Ad $\bullet\bullet$: Jeżeli $z^* \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, to $\exists k \in \mathbb{N} \cup 0 : f^{(k)}(z^*) \neq 0$. Wtedy (ponieważ wszystkie pochodne są funkcjami ciągłymi) $f^{(k)}(z) \neq 0$ również dla $z \in K(z^*, \rho) \subset \mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, $\rho > 0$. Zatem $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest *otwarty.*

Teraz: Jeśli A, B – zb. otwarte, to $A \setminus B$ nie może być zb. otwartym, chyba że $A \subset B$ (inaczej $A \subset B$ zawiera punkty graniczne). W tym ostatnim przypadku $A \setminus B$ jest zbiorem pustym. Tak więc albo $\mathcal{U}$, albo $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$ jest zbiorem pustym. Tu zbiór $\mathcal{U}$ nie jest pusty, bo zawiera z_0. Skoro tak, to pusty jest $\mathcal{O} \setminus \mathcal{U}$, zatem $\mathcal{O} = \mathcal{U}$.

CBDO

1.12 Przedłużenie holomorficzne

Niech $\mathcal{O}, \mathcal{U}$ – zbiory otwarte i spójne.

Def. Niech f – holomorficzna na $\mathcal{O}$, zaś g – holomorficzna na $\mathcal{U}$. Ponadto, niech $f(z) = g(z)$ dla $z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$. W takiej sytuacji mówimy, że g jest przedłużeniem holomorficznym funkcji f.

Okazuje się, że jeśli przedłużenie holomorficzne istnieje, to może być tylko jedno:

Stw. Przedłużenie holomorficzne jest jednoznaczne.

Dow. Załóżmy, że g_1, g_2 – holomorficzne na $\mathcal{U}$ – dwa przedłużenia holomorficzne funkcji f określonej na $\mathcal{O}$. Niech

$$g_1(z) = f(z) = g_2(z) \quad \text{dla} \quad z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$$

Wtedy różnica $g_1(z) - g_2(z) = 0$ dla $z \in \mathcal{O} \cap \mathcal{U}$. Na mocy tw. udowodnionego dopiero co, oznacza to, że również na całym $\mathcal{U}$ zachodzi $g_1(z) - g_2(z) = 0$, tzn. $g_1(z) = g_2(z)$ na całym $\mathcal{U}$.

CBDO

RYS. – przedłużanie funkcji holomorficznej

Uwaga. Może się zdarzyć niespodzianka: Po powrocie do punktu pierwotnego, *funkcja przedłużona może nie być równa funkcji sprzed przedłużenia*!

RYS.

2 Wykłady w 2011

2.1 Funkcje wieloznaczne i powierzchnie Riemanna

Powyższe zjawisko (że po dokonaniu obiegu po krzywej zamkniętej powracamy do tego samego punktu, ale funkcja tam ma inną wartość) może zdarzyć się dla *funkcji wieloznacznej.*

2.1.1 $\sqrt{z}$ – funkcja dwuznaczna

Zobaczmy to bardziej szczegółowo dla funkcji $f(z) = \sqrt{z}$.

Zapisując z w postaci wykładniczej, mamy: $z = re^{i\phi}$, skąd $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\phi/2+k\pi}$ $(k = 0, 1)$. Weźmy $k = 0$; biorąc tę wartość pierwiastka, połóżmy teraz $z = 1$, tzn. $r = 1, \phi = 0$. Mamy: $\sqrt{1} = 1$. Teraz obiegnijmy punkt 0 po okręgu $C(0, 1)$. **RYS.** Gdy obiegniemy okrąg, zobaczymy, że wartość funkcji $\sqrt{1} = 1 \cdot e^{i\pi} = -1$, czyli w sposób ciągły przeszliśmy do *drugiej możliwej* wartości pierwiastka. Widzimy więc, że *nie wróciliśmy* do tej samej wartości funkcji, mimo że poruszaliśmy się po krzywej ciągłej. Obiegnijmy teraz znów po okręgu jednostkowym punkt $0 \in \mathbb{C}$; po tym obiegu, powrócimy znów do wartości funkcji na samym początku, tzn.1.

Widzimy więc, że mamy tu do czynienia z funkcją *dwuznaczną*, tzn. każdej (prócz 0) wartości argumentu odpowiadają *dwie* wartości funkcji. (Sam ten fakt nie powinien być niespodzianką, bo wiemy, że dla dowolnej liczby zespolonej mamy dwie wartości pierwiastka kwadratowego).

Gdybyśmy chcieli zilustrować tę sytuację, to na pierwszy rzut oka zbiorem wartości funkcji powinny być *dwie* płaszczyzny zespolone $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$.

Ten obraz nie oddaje jednak wszystkich aspektów sytuacji. Gdy bowiem weźmiemy punkt na $\mathbb{C}_1$ i obiegamy punkt 0 po okręgu jednostkowym, to po jednym obiegu 'przeskakujemy' na drugą płaszczyznę $\mathbb{C}_2$. A po drugim obiegu z powrotem 'przeskakujemy' na C_1. Możemy to zilustrować 'sklejając' obie płaszczyzny wzdłuż rozcięcia branego np. wzdłuż dodatniej półosi rzeczywistej **RYS.** (Rozcięcie wzdłuż takiej akurat półprostej jest jedynie ilustracją; mogłoby to być rozcięcie wzdłuż dowolnej innej półprostej zaczynającej się w zerze. Istotny jest tu jedynie fakt przeskoku na inną płaszczyznę po dokonaniu pełnego obiegu wokół punktu 0).

A co by było, gdybyśmy wystartowali z punktu $z_0 = 1$ i wrócili do niego, nie obiegając zera? Wtedy powrócilibyśmy znów do wartości 1 – nie byłoby przeskoku na drugą płaszczyznę wartości pierwiastka.

2.1.2 $\sqrt[3]{z}$ – funkcja trójznaczna

Rozważmy teraz $f(z) = \sqrt[3]{z}$.

Postąpmy teraz tak jak poprzednio: Zapisując z w postaci wykładniczej, mamy: $z = re^{i\phi}$, skąd $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}e^{i\phi/3 + \frac{2ki\pi}{3}}$. Weźmy znów $k = 0$. Biorąc tę wartość pierwiastka, połóżmy teraz $z = 1$, tzn. $r = 1, \phi = 0$. Mamy: $\sqrt{1} = 1$. Teraz obiegnijmy punkt 0 po okręgu $C(0, 1)$. **RYS.** Gdy obiegniemy okrąg, zobaczymy, że wartość funkcji $\sqrt{1} = 1 \cdot e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Obiegnijmy 0 jeszcze raz; dostaniemy wartość $\sqrt{1} = 1 \cdot e^{\frac{4i\pi}{3}}$. Po trzecim obiegu wrócimy do wartości początkowej $\sqrt{1} = 1$.

Sytuację tę ilustrujemy biorąc *trzy* egzemplarze płaszczyzny zespolonej, porozcinane wzdłuż półprostej (np. rzeczywistej dodatniej) i sklejone w odpowiedni sposób górne rozcięcie $\mathbb{C}_1$ z dolnym rozcięciem $\mathbb{C}_2$; górne rozcięcie $\mathbb{C}_2$ z dolnym rozcięciem $\mathbb{C}_3$; i wreszcie górne rozcięcie $\mathbb{C}_3$ z dolnym rozcięciem $\mathbb{C}_1$.

2.1.3 Log z – funkcja o nieskończonej ilości płatów

Przyjmijmy definicję logarytmu jako funkcji odwrotnej do exp, czyli: $(\exp(\log z) = z$. Równanie to możemy spełnić, biorąc: $\log z = \log r + i\phi$. Ale możemy je spełnić równie dobrze, biorąc: $\log z = \log r + i\phi + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Widać więc, że logarytm w dziedzinie zespolonej ma *nieskończoną* liczbę wartości! Ilustrujemy to, biorąc nieskończoną liczbę płaszczyzn zespolonych, rozcinając je wzdłuż (np.) osi $\mathbb{R}_+$ i sklejając dolne rozcięcie $n-$tej płaszczyzny z górnym rozcięciem $n + 1-$wszej płaszczyzny.

Poniższa historia pochodzi z książki B. W. Szabata, "Wstęp do analizy zespolonej".

" Przypomnimy spór, jaki rozgorzał w latach 1712-1713 w korespondencji między dwoma najwybitniejszymi matematykami tamtych czasów, Janem Bernoullim i G. Leibnizem, o logarytmy liczb ujemnych. Bernoulli twierdził, że są one rzeczywiste oraz $\ln(-x) = \ln x$. A oto jeden z jego dowodów na korzyść tego twierdzenia: Z równości $(-x)^2 = x^2$ wynika, że $2\ln(-x) = 2\ln x$. Leibniz twierdził natomiast, że logarytmy liczb ujemnych są urojone, a tożsamość $\ln(-x) = \ln x$ nie zachodzi, w szczególności $\ln(-1) \neq 0$. A oto jeden z dowodów Leibniza na korzyść ostatniego twierdzenia: Jeśli podstawić $x = -2$ w rozkładzie $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$, to powstanie równość $\ln(-1) = -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$, w której wszystkie składniki prawej strony są ujemne i stąd $\ln(-1) \neq 0$.

W roku 1749 do sporu włączył się L. Euler. Opublikował on artykuł, w którym twierdził, że żaden ze spierających się nie ma racji. W szczególności, przytoczony wyżej argument Bernoulliego odpiera tak: W podobny sposób z równości $(x\sqrt{-1})^4 = x^4$ można wnioskować, że $\ln x + \ln\sqrt{-1} = \ln x$, co oznacza, że $\ln\sqrt{-1} = 0$. Jednak sam Bernoulli odkrył, że $\frac{\ln\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2}$, a o ostatniej równości wątpić nie można, gdyż, jak pisał Euler, "odkrycie to jest uzasadnione najbardziej pewnymi środkami analizy". Przytoczony wyżej dowód Leibniza Euler także uważał za nieprzekonywający. Przytoczył on następujący przykład: Jeśli w rozkładzie $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$ podstawić raz $x = -3$, a raz $x = 1$ i dodać wyniki, to powstanie równość: $0 = 2 + 2 + 10 + 26 + \ldots$, w której lewa strona jest równa zeru, mimo że, jak pisze Euler, "prawa strona wydaje się być różna od zera".

We wspomnianym artykule Euler zaproponował prawidłowe rozwiązanie sporu: logarytmy liczb ujemnych (jak i innych liczb zespolonych) mają nieskończone zbiory wartości. Interesująca jest jego argumentacja. Wartość $y = \ln x$ wyznacza się z równania $x = \exp y = (1 + \frac{y}{i})^i$, gdzie i jest "nieskończenie wielką liczbą" (termin i oznaczenie Eulera). Otrzymujemy stąd, że $y = i(x^{\frac{1}{i}} - 1)$, a liczba $x^{\frac{1}{i}}$ – "pierwiastek o nieskończenie wielkim wykładniku" – ma nieskończenie wiele wartości, ogólnie mówiąc, zespolonych.

Interesujące jest również, że w roku 1761 J. d'Alembert w sporze tym stanął po stronie Bernoulliego, przeciwko Leibnizowi i Eulerowi. "

2.2 Szereg Laurenta

Widzieliśmy rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Do dokonania takiego rozwinięcia konieczne jest, abyśmy byli w obszarze, w którym funkcja jest holomorficzna. Dokładniej, punkt z_0, względem którego rozwijamy, jest środkiem koła, i wewnątrz tego koła funkcja musi być holomorficzna. **RYS.**

Okazuje się, że można uwolnić się od założenia, iż funkcja ma być holomorficzna w kole i wtedy mamy do czynienia z ogólniejszym typem rozwinięcia, zawierającym *ujemne* potęgi $z - z_0$. Rozwinięcie takie nazywamy *rozwinięciem Laurenta.* Dokładniej, zachodzi:

Tw. Jeżeli $f(z)$ jest holomorficzna w pierścieniu między okręgami współśrodkowymi $C \equiv C(z_0, r)$ oraz $C' \equiv C(z_0, r')$ (tu $r > r'$; **RYS.**) oraz ciągła na okręgach, to w każdym punkcie pierścienia $f(z)$ ma rozwinięcie postaci

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_1}{(z - z_0)^2} + \ldots \qquad (39)$$

gdzie

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)\mathsf{d}\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} f(\xi)(\xi - z_0)^n \mathsf{d}\xi \qquad (40)$$

Uwaga. W powyższym wyrażeniu na a_n rozpoznajemy współczynnik rozwinięcia w szereg Taylora (porównajmy z wzorem (32); tak więc rozwinięcie Laurenta można uważać za uogólnienie tego ostatniego.

Dow. Weźmy jakiś punkt należący do pierścienia; oznaczmy go $z_0 + h$, gdzie $r' < |h| < r$. Z założenia, w pierścieniu funkcja $f(z)$ jest holomorficzna, więc możemy napisać:

$$f(z_0 + h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0 - h}\mathsf{d}z = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0 - h}\mathsf{d}z - \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0 - h}\mathsf{d}z \qquad (41)$$

gdzie kontur Γ składa się ze współśrodkowych okręgów C, C' wraz z łącznikiem p. Zewnętrzny okrąg C jest obiegany antyzegarowo, zaś wewnętrzny C' zegarowo, stąd znak minus przy całce $\int_{C'}$.

Przytoczmy tu teraz jeszcze raz wzór (31) na skończony urywek szeregu geometrycznego:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^N + \frac{x^{N+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^{N} x^k + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

Napiszmy teraz rozwinięcie $\frac{1}{z-z_0-h}$ w dwóch wersjach, z których jedna jest zaadoptowana do pierwszej całki po prawej stronie równości (41), a druga do drugiej:

- Ułamek $\frac{1}{z-z_0-h}$ w pierwszej całce zapiszmy w postaci:

$$\frac{1}{z-z_0-h} = \frac{1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{h}{z-z_0}} = \ldots$$

... tu mamy: $\left|\frac{h}{z-z_0}\right| = \left|\frac{h}{r}\right| < 1$ i rozwijamy drugi czynnik w potęgach $\frac{h}{z-z_0}$ ...

$$\cdots = \frac{1}{z-z_0}\left[1 + \frac{h}{z-z_0} + \frac{h^2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{h^N}{(z-z_0)^N} + \frac{h^{N+1}}{1-\frac{h}{z-z_0}}\right]$$

$$= \frac{1}{z-z_0} + \frac{h}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{h^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \frac{h^{N+1}}{(z-z_0-h)(z-z_0)^{N+1}} \qquad (42)$$

- Ułamek $\frac{1}{z-z_0-h}$ w pierwszej całce zapiszmy w postaci:

$$\frac{1}{z-z_0-h} = \frac{1}{h}\frac{1}{\frac{z-z_0}{h}-1} = -\frac{1}{h}\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{h}} = \ldots$$

... tu z kolei mamy: $\left|\frac{z-z_0}{h}\right| = \left|\frac{r'}{h}\right| < 1$ i rozwijamy w potęgach $\frac{z-z_0}{h}$...

$$\cdots = -\frac{1}{h}\left[1 + \frac{z-z_0}{h} + \frac{(z-z_0)^2}{h^2} + \cdots + \frac{(z-z_0)^N}{h^N} + \frac{\frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}}}{1-\frac{z-z_0}{h}}\right]$$

$$= -\left[\frac{1}{h} + \frac{z-z_0}{h^2} + \frac{(z-z_0)^2}{h^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^N}{h^{N+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}(z-z_0-h)}\right] \qquad (43)$$

UMPAPA Wstawiając powyższe rozwinięcia do odpowiednio pierwszej i drugiej całki w (41), dostaniemy

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \mathsf{d}z f(z)\left[\frac{1}{z-z_0} + \frac{h}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{h^N}{(z-z_0)^{N+1}} + \frac{h^{N+1}}{(z-z_0-h)(z-z_0)^{N+1}}\right]$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_C \mathsf{d}z f(z)\left[\frac{1}{h} + \frac{z-z_0}{h^2} + \frac{(z-z_0)^2}{h^3} + \cdots + \frac{(z-z_0)^N}{h^{N+1}} + \frac{(z-z_0)^{N+1}}{h^{N+1}(z-z_0-h)}\right]$$

$$= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_N h^N + R_+^{(N)} + \frac{b_1}{h} + \frac{b_2}{h^2} + \cdots + \frac{b_N}{h^N} + R_-^{(N)} \qquad (44)$$

gdzie:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \mathsf{d}z \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \mathsf{d}z f(z)(z-z_0)^{n-1}$$

oraz

$$R_+^{(N)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \mathsf{d}z \frac{h^{N+1}f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^{N+1}}, \qquad R_-^{(N)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \mathsf{d}z \frac{(z-z_0)^{N+1}f(z)}{(z-z_0-h)(h)^{N+1}} \quad (45)$$

Oszacowanie reszt $R_+^{(N)}$, $R_-^{(N)}$.

Jak pamiętamy, mieliśmy oszacowanie:

$$|\int_\gamma f(z)\mathsf{d}z| \leqslant Ml, \quad \text{gdzie } M = \sup_{z\in\gamma}|f(z)|, \quad l - \text{długość konturu } \gamma.$$

W naszym przypadku mamy:

$$|R_+^{(N)}| \leqslant \frac{1}{2\pi} M \frac{|h|^{N+1}}{r^{N+1}} 2\pi r, \quad \text{gdzie } M = \sup_{z\in C} \frac{|f(z)|}{|z-z_0-h|}.$$

Widać, że dla $\frac{|h|}{|r|} < 1$, zachodzi: $\lim_{N\to\infty} R_+^{(N)} = 0$.

Analogicznie szacując, mamy

$$|R_-^{(N)}| \leqslant \frac{1}{2\pi} M' \frac{r^{N+1}}{|h|^{N+1}} 2\pi r, \quad \text{gdzie } M' = \sup_{z\in C'} \frac{|f(z)|}{|z-z_0-h|}.$$

skąd wynika, że dla $\frac{r}{h} < 1$, zachodzi: $\lim_{N\to\infty} R_-^{(N)} = 0$.

CBDO

Przypadek szczególny: Gdy f jest holomorficzna w $K(z_0, r)$ z wyjątkiem środka, to rozwinięcie Laurenta jest poprawne dla całego koła $K(z_0, r)$ z wyjątkiem środka.

2.3 Osobliwości funkcji jednowartościowych

Niech $f(z)$ będzie funkcją holomorficzną w obszarze S poza pojedynczym punktem a wewnątrz S. Załóżmy, że istnieje taka funkcja holomorficzna $\varphi(z)$, która:

1. jest holomorficzna na S,
2. jeżeli $z \neq a$, to $f(z) = \phi(z) + \frac{b_1}{z-a} + \cdots + \frac{b_n}{(z-a)^n}$.

Def. Jeżeli istnieje powyższe przedstawienie funkcji $f(z)$, to mówimy, że funkcja $f(z)$ ma w punkcie $z = a$ biegun rzędu n.

Def. Jeżeli $n = 1$, to mówimy, że biegun jest *prosty*.

Def. Każdą osobliwość, która nie jest biegunem, nazywamy *osobliwością istotną*.

Def. Mówimy, że osobliwość w punkcie a jest *izolowana*, jeśli istnieje takie $\delta > 0$, że $K(a, \delta)$ zawiera tylko osobliwość w punkcie a.

Dla osobliwości istotnej izolowanej rozwinięcie Laurenta jest szeregiem nieskończonym w ujemnych potęgach $(z-a)$.

Wzmianki o: Punktach pozornie osobliwych; oraz Punktach skupienia biegunów; i punkcie w nieskończoności.

Przykłady.

1. $f(z) = \frac{1}{z}$: Biegun prosty w $z = 0$.
2. $f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}$: Biegun rzędu k w $z = a$.
3. $f(z) = \frac{e^z}{z}$: biegun prosty w $z = 0$.
4. $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$: osobliwość istotna w $z = 0$. Bo: Rozwinięcie w szereg Laurenta ma postać:
$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!\, z^2} + \frac{1}{3!\, z^3} + \dots$$
5. $f(z) = \frac{1}{\sin z}$: Bieguny proste w $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Bo: Wiemy, że dla $z \in \mathbb{R}$, funkcja $\sin z$ ma zera pojedyncze w $z = k\pi$. Przekonamy się niedługo, że w dziedzinie zespolonej nie ma innych zer. Tak więc jedynymi biegunami funkcji $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ są punkty $z = k\pi$.

2.4 Residuum funkcji i twierdzenie o residuach.

Niech funkcja $f(z)$ posiada biegun krotności m w punkcie $z = a$.

Def. *Residuum* funkcji $f(z)$ w punkcie $z = a$ nazywamy współczynnik a_{-1} rozwinięcia w szereg Laurenta wokół punktu $z = a$:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z)$ jest funkcją holomorficzną.

Ozn. Residuum funkcji $f(z)$ w punkcie $z = a$ oznaczamy $\mathrm{Res}(f, a)$.

Pojęcie residuum ma duże znaczenie, bo – jak zaraz zobaczymy – gdy liczymy całkę z funkcji po obszarze, zawierającym bieguny funkcji, to jedyny wkład do całki bierze się z residuów funkcji.

Ale najsampierw zobaczmy, ile wynosi całka po konturze otaczającym *jeden* biegun.

Weźmy więc funkcję tę co powyżej i weźmy $C(a, \epsilon)$, gdzie $\epsilon > 0$ jest takie, że wewnątrz $C(a, \epsilon)$ jedyną osobliwością jest osobliwość w $z = a$.

Obliczmy:

$$\int\limits_{C(a,\epsilon)} f(z)\mathsf{d}z = \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{C(a,\epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}\mathsf{d}z + \int\limits_{C(a,\epsilon)} \varphi(z)\mathsf{d}z;$$

ta ostatnia całka jest równa zeru (jako całka z funkcji holomorficznej). Policzmy teraz każdą z całek w sumie po prawej stronie powyższej równości, tzn. $\int_{C(a,\epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}\mathsf{d}z$ dla $k > 0$. Parametryzując standardowo okrąg $C(a, \epsilon)$ jako: $z = a + \epsilon e^{i\phi}$, co daje: $\mathsf{d}z = i\epsilon e^{i\phi}\mathsf{d}\phi$, i dalej mamy:

$$\int\limits_{C(a,\epsilon)} \frac{a_{-k}}{(z-a)^k}\mathsf{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \epsilon^{-k} e^{-ki\phi} i\epsilon e^{i\phi}\mathsf{d}\phi = i\epsilon^{1-k} \int\limits_0^{2\pi} \epsilon^{-k} e^{i\phi(1-k)}\mathsf{d}\phi = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad k > 1 \\ 2\pi i & \text{dla} \quad k = 1 \end{cases}$$

Ostatecznie

$$\int\limits_{C(a,\epsilon)} f(z)\mathsf{d}z = 2\pi i a_{-1} \equiv 2\pi i \mathrm{Res}(f, a).$$

Rozpatrzmy teraz kontur funkcję $f(z)$, zawierającą w pewnym obszarze S otoczonym konturem γ punkty osobliwe, będące biegunami; niech ich położenia będą $a^1, a^2, \ldots, a^n$ **RYS**. Obliczmy znów całkę $\int_\gamma f(z)\mathsf{d}z$. W tym celu zauważmy, że całka ta jest równa całce po konturze $\tilde{\gamma}$, gdzie $\tilde{\gamma}$ powstał z γ przez dorysowanie okręgów $C(a^k, \epsilon)$ razem z łącznikami, łączącymi je z konturem γ. **RYS.**. Tu $\epsilon > 0$ jest na tyle małe, że wewnątrz każdego okręgu $C(a^k, \epsilon)$ jedynym punktem osobliwym jest biegun w punkcie a^k. Posługując się argumentacją występującą już przynajmniej raz, mamy:

$$\int_\gamma f(z)\mathsf{d}z. = \int_{\tilde{\gamma}} f(z)\mathsf{d}z. = \int_{C(a^1,\epsilon)} f(z)\mathsf{d}z. + \int_{C(a^2,\epsilon)} f(z)\mathsf{d}z. + \cdots + \int_{C(a^n,\epsilon)} f(z)\mathsf{d}z.$$
$$= 2\pi i(a^1_{-1} + a^2_{-1} + \cdots + a^n_{-1}).$$

Powyższą obserwację możemy zebrać w twierdzeniu, znamym jako

Tw. (o residuach). Niech $f(z)$ – funkcja holomorficzna wewnątrz konturu γ, z wyjątkiem punktów $a^1, a^2, \ldots, a^n$, w których są bieguny skończonego rzędu, oraz ciągła na γ. Wtedy

$$\int_\gamma f(z)\mathsf{d}z. = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, a^k). \tag{46}$$

2.4.1 Użyteczne wzorki na liczenie residuów

1. **Stw.** Niech $f(z)$ ma biegun prosty w $z = a$. Wtedy

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} f(z)(z-a). \tag{47}$$

Dow. Mamy bowiem rozwinięcie funkcji $f(z)$ w szereg Laurenta:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-a} + \phi(z),$$

gdzie $\phi(z)$ jest holomorficzna, więc $\phi(z)$ istnieje w punkcie a i jego otoczeniu. Stąd

$$\lim_{z\to a} f(z)(z-a) = \lim_{z\to a} a_{-1} + (z-a)\phi(z) = a_{-1}.$$

CBDO

2. **Stw.** Niech $f(z)$ ma biegun rzędu n w $z = a$. Wtedy

$$\mathrm{Res}(f, a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{\mathsf{d}^{n-1}}{\mathsf{d}z^{n-1}} \left(f(z)(z-a)^n\right). \tag{48}$$

Dow. Rozwinięcie $f(z)$ w szereg Laurenta ma postać:

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \phi(z),$$

gdzie $\phi(z)$ – holomorficzna. Stąd

$$\frac{\mathsf{d}^{n-1}}{\mathsf{d}z^{n-1}} \left(f(z)(z-a)^n\right) = \frac{\mathsf{d}^{n-1}}{\mathsf{d}z^{n-1}} \left[a_{-n} + a_{-n+1}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{n-1} + \phi(z)(z-a)^n\right]$$
$$= (n-1)! a_{-1} + \left(\phi(z)(z-a)^n\right)^{(n-1)}$$
$$= (n-1)! a_{-1} + (z-a) \cdot \text{pewna funkcja holomorficzna}.$$

Biorąc granicę $\lim_{z\to a}$ powyższego wyrażenia, otrzymujemy (48).

CBDO

2.4.2 Przykłady

1. $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$
2. $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$
3. $f(z) = \frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$

2.5 Zastosowanie rachunku residuów do liczenia całek rzeczywistych: funkcje jednoznaczne

Za pomocą rachunku residuów można liczyć wiele typów całek rzeczywistych. Należą do nich zarówno całki 'policzalne' przy użyciu technik i sztuczek, które poznaliśmy już przy okazji szukania funkcji pierwotnych, takich jak całkowanie przez podstawienie i przez części; metoda residuów pozwala zazwyczaj takie całki policzyć znacznie szybciej. Są też jednak całki 'niepoliczalne', nie dające się znaleźć standardowymi metodami liczenia funkcji pierwotnych.

2.5.1 Całki postaci $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi)\mathsf{d}\phi$, gdzie $R(\cdot,\cdot)$ jest funkcją wymierną

Mamy bowiem:

$$\cos\phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}, \quad \sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}$$

Wprowadźmy teraz zamianę zmiennych $\phi \leftrightarrow z$:

$$z = e^{i\phi} \quad \text{tzn.} \;\; z \in C(0,1)$$

a całkowanie po ϕ w przedziale $[0, 2\phi]$ odpowiada całkowaniu po z w płaszczyźnie zespolonej po okręgu $C(0,1)$. Mamy dalej:

$$\mathsf{d}z = ie^{i\phi}\mathsf{d}\phi \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{d}\phi = \frac{1}{iz}\mathsf{d}z, \quad \cos\phi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin\phi = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

i można wyrazić całkę po ϕ przez całkę po z:

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos\phi, \sin\phi)\mathsf{d}\phi = \int\limits_{C(0,1)} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{1}{iz}\mathsf{d}z$$

a ta ostatnia całka jest równa $2\pi i$ razy suma residuów funkcji podcałkowej wewnątrz okręgu $C(0,1)$.

Ograniczeniami tej metody są warunki jej stosowalności: Funkcja podcałkowa nie może mieć osobliwości na okręgu $C(0,1)$ oraz całka po ϕ musi być w przedziale $[0, 2\pi]$.

Przykł. 1 Obliczmy, dla $0 < p < 1$:

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2p\cos\phi + p^2}\mathsf{d}\phi \tag{49}$$

$$= \int\limits_{C(0,1)} \frac{1}{1 - pz - \frac{p}{z} + p^2} \frac{1}{iz} \mathsf{d}z$$

$$= \int\limits_{C(0,1)} \frac{i}{pz^2 - (p^2+1)z + p} \mathsf{d}z = \int\limits_{C(0,1)} \frac{i}{p(z-p)(z-\frac{1}{p})} \mathsf{d}z \equiv \int\limits_{C(0,1)} f(z) \mathsf{d}z;$$

widać, że funkcja podcałkowa ma bieguny w $z_1 = p$ oraz $z_2 = \frac{1}{p}$, z czego wewnątrz okręgu $C(0,1)$ leży tylko $z_1 = p$. Residuum funkcji podcałkowej w tym punkcie wynosi:

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{i}{p(z-p)(z-\frac{1}{p})} = \frac{i}{p(p-\frac{1}{p})}$$

oraz

$$I_1 = 2\pi i \,\mathrm{Res}(f, z_1) = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$

Uwaga. Całkę (49) można też obliczyć za pomocą podstawienia uniwersalnego $t = \mathrm{tg}(\frac{x}{2})$, ale jest to znacznie bardziej pracochłonne.

2.5.2 Całki postaci

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x) \mathsf{d}x \tag{50}$$

Powyższą całkę będziemy obliczać przez całkowanie odpowiedno dobranej funkcji $Q(z)$ po konturze, zawierającym oś rzeczywistą. Funkcja $Q(z)$ w związku z tym musi spełniać: $Q(x) = q(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. (Funkcja $Q(z)$ może być równa $q(z)$, tzn. rozszerzenia zespolonego funkcji $q(x)$, ale nie musi – zależy to od problemu). Odnośnie funkcji $Q(z)$ czynimy następujące założenia:

1. $Q(z)$ jest holomorficzna w górnej półpłaszczyźnie zespolonej, z wyjątkiem skończonej ilości biegunów w punktach $z_1, z_2, \ldots, z_m$.

2. $Q(z)$ nie ma biegunów na osi rzeczywistej.

3. Dla $|z| \to \infty$, $|zQ(z)| \to 0$ niemal jednostajnie dla $0 < \arg z < \pi$. (*Uwaga – przypomnienie*: Mówimy, że $f(x)$ dąży do zera niemal jednostajnie na przedziale $]a, b[$, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$, $f(x)$ dąży do zera jednostajnie na każdym przedziale $[a + \epsilon, b - \epsilon]$.) Zakładamy też, że zachodzi: $|zQ(z)| < C$ dla $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$.

4. Dla $z = x \in \mathbb{R}$, zachodzi: $xQ(x) \to 0$ dla $x \to \pm\infty$ oraz całki: $\int\limits_{-\infty}^{0} Q(x)\mathsf{d}x$ i $\int\limits_{0}^{\infty} Q(x)\mathsf{d}x$ są zbieżne.

Jeśli powyższe założenia są spełnione, to mamy

Tw. Całka (50) jest równa $2\pi i \times$ (suma residuów w górnej półpłaszczyźnie).

Dow. Obliczymy całkę po konturze Γ, złożonym z odcinka $\Gamma_1 = [-R, R]$ oraz półokręgu $\Gamma_2 = Re^{i\phi}$, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$. **RYS.** Biorąc dostatecznie duże R, kontur Γ zawiera w swoim wnętrzu wszystkie bieguny funkcji $Q(z)$, zatem $\int\limits_{\Gamma} Q(z)\mathsf{d}z = 2\pi i \sum\limits_{k=1}^{m} \mathrm{Res}(Q, z_k)$.

Z drugiej strony, mamy: $\int_G a = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$. Gdy $R \to \infty$, to pierwsza całka dąży do $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x)\mathsf{d}x$ z założeń dotyczących zachowania $Q(z)$ na osi rzeczywistej. Pozostaje więc oszacować całkę $\int_{\Gamma_2}$, a dokładniej, pokazać, że $\int_{\Gamma_2} \to 0$ dla $R \to \infty$.

Podzielmy półokrąg Γ_2 na trzy części: $\Gamma_{2,+}$, gdzie $0 \leqslant \phi \leqslant \delta$; $\Gamma_{2,-}$, gdzie $\pi - \delta \leqslant \phi \leqslant \pi$; oraz $\Gamma_{2,i}$, gdzie $\delta \leqslant \phi \leqslant \pi - \delta$. Tu $\delta > 0$ jest liczbą, którą można wybrać dowolnie małą.

Weźmy teraz jakieś δ, które może być dowolnie małe. Wtedy $|\int_{\Gamma_{2,i}}|$ można również uczynić dowolnie małym, powiedzmy równym δ (przez dobór dostatecznie dużego R). Całki zaś $|\int_{\Gamma_{2,+}}|$ i $|\int_{\Gamma_{2,-}}|$ szacują się z góry przez $C\delta$. Tak więc $|\int_{\Gamma_2}| \leqslant (2C+1)\delta$, i ponieważ δ możemy uczynić tak małym, jak chcemy, to ostatecznie $\int_{\Gamma_2} \to 0$.

CBDO

Przykł. 2. Jednym z zastosowań powyższego twierdzenia jest liczenie całek z funkcji wymiernych. Dla ilustracji weźmy całkę:

$$I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9}\mathsf{d}x \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x)\mathsf{d}x.$$

Przy liczeniu takich całek, całkujemy po brzegu półkola funkcję podcałkową, tyle że od argumentu zespolonego.

Bieguny $q(z)$ są tam, gdzie są zera mianownika; a że mamy

$$z^4 + 10z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i)(z - i)(z + i)$$

to w górnej półpłaszczyźnie znajdują się dwa bieguny w punktach $z_1 = i$, $z_2 = 3i$. Policzmy residua w tych punktach:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(q, i) &= \lim_{z \to i} \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i)}(z - i) \\
&= \left.\frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)}\right|_{z=i} = \frac{1 - i}{16i} \\
\mathrm{Res}(q, 3i) &= \lim_{z \to 3i} \frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i)}(z - 3i) \\
&= \left.\frac{z^2 - z + 2}{(z + 3i)(z - i)(z + i)}\right|_{z=3i} = \frac{7 + 3i}{48i}
\end{aligned}$$

i, zgodnie z tezą powyższego Twierdzenia, mamy

$$I_2 = 2\pi i(\mathrm{Res}(q, i) + \mathrm{Res}(q, 3i)) = \frac{5\pi}{12}.$$

Pozostaje jeszcze sprawdzić założenia Twierdzenia. 1. sprawdziliśmy, 2. jest oczywiste (bo mianownik jest dodatni dla $x \in \mathbb{R}$), 4. też, zostaje jeszcze sprawdzić 3. Na okręgu $Re^{i\phi}$ mamy:

$$|zq(z)| = |Re^{i\phi}q(Re^{i\phi})| = \left|\frac{(R^2e^{2i\phi} - Re^{i\phi} + 2)Re^{i\phi}}{R^4e^{4i\phi} + 10R^2e^{2i\phi} + 9}\right| \leqslant R\frac{R^2 + R + 2}{R^4 - 10R^2 + 9} = \frac{1}{R}\cdot\frac{1 + \frac{1}{R} + \frac{2}{R^2}}{1 - \frac{10}{R^2} - \frac{9}{R^4}}$$

(nierówność powyżej jest z sensem dla dostatecznie dużych R – wystarczy wziąć np. $R > 100$). Widać, że gdy $R \to \infty$, to $zq(z) \to 0$ dla *dowolnego* $\phi \in [0, \pi]$, tak więc jest spełnione żądane oszacowanie jednostajne.

Przykł. 3. Kolejnym zastosowaniem powyższego twierdzenia jest liczenie całek z funkcji postaci: (wielomian trygonometryczny) $\times$ (funkcja wymierna). (Całki tego typu często występują przy liczeniu *transformat Fouriera*). Dla ilustracji obliczmy całkę:

$$I_3 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2} \mathsf{d}x \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} q(x) \mathsf{d}x.$$

gdzie $m, a > 0$.

Tu po półkolu Γ będziemy całkować funkcję $Q(z) = \frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$. Widać, że gdy $z \in Rdb$, to $\operatorname{Re} Q(z) = q(x)$.

Funkcja $Q(z)$ ma w górnej półpłaszczyźnie jeden biegun drugiego rzędu w punkcie $z^* = ai$. Tak więc:

$$\int_\Gamma Q(z) \mathsf{d}z = 2\pi i \operatorname{Res}(Q, ai) = 2\pi i \lim_{z \to ai} \frac{1}{1!} \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}z} \left[\frac{e^{imz}}{(z+ai)^2 (z-ai)^2} (z-ai)^2 \right]$$

$$= 2\pi i \left[im \frac{e^{imz}}{(z+ai)^2} - 2 \frac{e^{imz}}{(z+ai)^3} \right] \Bigg|_{z=ai} = \frac{\pi(ma+1)}{2a^3} e^{-ma}.$$

(do liczenia residuum w biegunie drugiego rzędu wykorzystaliśmy wzór (48)).

Pozostaje jeszcze sprawdzić, czy spełnione są założenia Tw. z którego korzystaliśmy. 1. sprawdziliśmy, 2. jest oczywiste (bo mianownik jest dodatni dla $x \in \mathbb{R}$), 4. też, zostaje jeszcze sprawdzić 3. Na okręgu $Re^{i\phi}$ mamy:

$$|zQ(z)| = |Re^{i\phi} Q(Re^{i\phi})| = \left| \frac{Re^{i\phi}}{(R^2 e^{2i\phi} + a^2)^2} e^{iRe^{i\phi}} \right| = \left| \frac{Re^{i\phi} e^{iR\cos\phi} e^{-R\sin\phi}}{(R^2 e^{2i\phi} + a^2)^2} \right|$$

$$\leqslant \frac{Re^{-R\sin\phi}}{(R^2-a^2)^2} \leqslant \frac{R}{(R^2-a^2)^2}.$$

(pierwsza nierówność powyżej zachodzi dla $R > a$). Widać, że gdy $R \to \infty$, to $zQ(z) \to 0$ dla *dowolnego* $\phi \in [0, \pi]$, tak więc jest spełnione żądane oszacowanie jednostajne.

2.6 Zastosowanie rachunku residuów do liczenia całek rzeczywistych: funkcje wieloznaczne

Kolejne klasy całek z funkcji rzeczywistych można obliczyć przez całki po płaszczyźnie zespolonej z funkcji *wieloznacznych*.

2.7 Całki postaci $\int\limits_0^\infty x^{a-1} Q(x) \mathsf{d}x$, $Q(x)$ – funkcja wymierna

Rozważymy tu całkę

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} \mathsf{d}x; \tag{51}$$

ogólny przypadek rozpatruje się analogicznie do tego, co pokażemy niżej.

Aby całka (51) była zbieżna, trzeba nałożyć warunki na parametr a. Zbieżność w zerze wymaga, aby $a - 1 > -1$, tzn. $a > 0$, zaś zbieżność w nieskończoności wymaga, aby $a - 1 - 1 < -1$, tzn. $a < 1$.

Rozważmy całkę $\int\limits_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z$ po konturze Γ, składającym się z łuków okręgów Γ_r i Γ_R oraz odcinków Γ_1 i Γ_2 łączących punkty końcowe tych łuków. **RYS.** Liczbę z^{a-1} interpretujemy jako

$$z^{a-1} = \exp[(a-1)\mathrm{Log}\, z],$$

tzn. bierzemy główną gałąź logarytmu: $\mathrm{Log}\, z = \log|z| + i\arg(z)$, $\arg(z) \in [0, 2\pi]$. Przy tych założeniach, funkcja podcałkowa jest jednoznaczna i holomorficzna na konturze i wewnątrz niego, z wyjątkiem $z = -1$. Wobec tego mamy:

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z = 2\pi i \mathrm{Res}(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1)$$

Teraz policzymy bądź oszacujemy całki po wszystkich częściach konturu Γ. Nie sprawia kłopotu całka:

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z = \int\limits_r^R \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathsf{d}x.$$

Ile wynosi całka $\int\limits_{\Gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z$? Zobaczmy najsampierw, ile wynosi wartość funkcji podcałkowej na *dolnym brzegu* rozcięcia. W tym celu, wystartujmy od jakiejś wartości $z = x$ na górnym brzegu rozcięcia, i obiegnijmy punkt 0 po okręgu o promieniu x. Na dolnym brzegu rozcięcia będziemy mieli $z = xe^{2\pi i}$, zaź wartość funkcji $\frac{z^{a-1}}{1+z}$ wyniesie $\frac{x^{a-1}e^{(a-1)2\pi i}}{1+x} = \frac{x^{a-1}e^{2\pi i a}}{1+x}$. Mamy więc

$$\int\limits_{\Gamma_2} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z = e^{2i\pi a}\int\limits_R^r \frac{x^{a-1}}{1+x}\mathsf{d}x.$$

Oszacujmy teraz całki $\int\limits_{\Gamma_r}$ i $\int\limits_{\Gamma_R}$. Dla pierwszej całki standardowo parametryzujemy okrąg przez $z = re^{i\phi}$ i mamy:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_r} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z\right| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{r^a}{1-r}\mathsf{d}\phi = 2\pi\frac{r^a}{1-r},$$

co dąży do 0, gdy $r \to 0$ (pamiętajmy, że mamy $a > 0$). Dla drugiej całki również standardowo parametryzujemy okrąg przez $z = Re^{i\phi}$ i mamy:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_R} \frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z\right| \leqslant \int\limits_0^{2\pi} \frac{R^a}{R-1}\mathsf{d}\phi = 2\pi\frac{R^a}{R-1},$$

co również dąży do 0, gdy $R \to \infty$; tu pamiętajmy, że mamy $a < 1$.

Teraz policzmy residuum funkcji podcałkowej w $z = -1$. Zauważmy najsampierw, że $z^{a-1}\mid_{z=1} = e^{i\pi(a-1)} = -e^{i\pi a}$. Tak więc

$$\mathrm{Res}(\frac{z^{a-1}}{1+z}, -1) = \lim_{z\to -1}\frac{z^{a-1}}{1+z}(1+z) = z^{a-1}\mid_{z=1} = -e^{i\pi a}.$$

Ostatecznie:

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\Gamma}\frac{z^{a-1}}{1+z}\mathsf{d}z = (1-e^{2i\pi a})I = 2\pi i(-)e^{i\pi a},$$

skąd ostatecznie

$$I = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

3 Zadania

3.1 Warunki Cauchy'ego-Riemanna itd.

1. Dla następujących funkcji wypisać ich części rzeczywiste i urojone. Sprawdzić, czy następujące funkcje spełniają w całej płaszczyźnie równania Cauchy'ego–Riemanna. Sprawdzić też, czy części rzeczywiste i urojone spełniają równanie Laplace'a.

   (a) $f = z^3$;

   (b) $f = (\text{Re}z)z^2$;

   (c) $f = e^{iz^2}$;

   (d) $f = \bar{z}\text{Re}z$;

   (e) $f = \frac{1}{z}$;

   (f) $f = \frac{1}{z^2+1}$.

2. Sprawdzić, czy następujące funkcje są harmoniczne. Jeśli tak, to znaleźć funkcję harmonicznie sprzężoną do danej, oraz wynik zapisać jako funkcję samego z.

   (a) $x^2 - y^2 + 4xy$;

   (b) $\frac{x}{x^2+y^2}$;

   (c) $x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$;

   (d) $\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

   (e) $e^x(x\cos y - y\sin y)$.

3. Obliczyć całkę $\int_\gamma \text{Re}z\mathsf{d}z$ dla:

   (a) $\gamma = [0, 2+2i]$;

   (b) γ jest okręgiem o środku w 0 i promieniu 1.

4. Obliczyć całkę: $\int_\gamma |z-1||\mathsf{d}z|$, gdzie γ – okrąg o środku w 0 i promieniu 1.

5. Obliczyć całkę $\int_\gamma |z|\mathsf{d}z$, jeżeli:

   (a) $\gamma = [-i, i]$;

   (b) γ jest lewym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i,

   (c) γ jest prawym półokręgiem łączącym punkt $-i$ z punktem i

6. Okrąg o środku w punkcie p i promieniu r będziemy oznaczać $C(p, r)$.
   Obliczyć całkę $\int_\gamma \frac{1}{1+z^2}\mathsf{d}z$, jeżeli:

   (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$;

   (b) $\gamma = C(0, 2)$;

   (c) $\gamma = C(i, 1)$;

   (d) $\gamma = C(-i, 1)$.

Wsk. Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste.

7. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z \cos z}{(1+z^2)\sin z}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(2+i, \sqrt{2})$. *Wsk.* Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

8. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{z}{z^4-1}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(a,a)$, $a > 1$. *Wsk.* Rozłożyć funkcję podcałkową na ułamki proste i korzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego.

9. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^2+a^2}\mathsf{d}z$$
gdzie $\gamma = C(0, 2a)$, $a > 0$. *Wsk.* jw.

10. Obliczyć całkę
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\mathsf{d}z$$
gdzie:
   (a) $\gamma = C(0, \frac{1}{2})$,
   (b) $\gamma = C(1, \frac{1}{2})$.

   Wsk. Skorzystać z wzoru całkowego Cauchy'ego dla drugiej pochodnej funkcji holomorficznej.

11. Dla podanych niżej funkcji znaleźć cztery początkowe różne od zera współczynniki rozwinięcia w szereg Taylora wokół $z = 0$, oraz podać promień zbieżności R odpowiedniego szeregu Taylora:
   (a) $\exp \frac{z}{1-z}$;
   (b) $\sin \frac{z}{1-z}$;
   (c) $\cos^2 z$;
   (d) $\frac{1}{\cos z}$.

12. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:
   (a) $|z| < 1$;
   (b) $1 < |z| < 2$;
   (c) $|z| > 2$.

13. Rozwinąć funkcję $\frac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$ w szereg Laurenta wokół $z_0 = 0$ dla:
   (a) $|z| < 1$;
   (b) $1 < |z| < 2$;

(c) $|z| > 2$.

14. Znaleźć residua funkcji:

(a) $\frac{z^3+z^2+2}{z(z^2-1)}$ w punktach $0, 1, -1$;

(b) $\frac{e^{z^2}}{z^2(z-1)}$ w punktach $0, 1$;

(c) $\frac{e^{ez}}{1-z^4}$ w punktach $1, -1, i, -i$;

(d) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^2}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$; **Odp.** $\frac{-ie^{-am}}{4a^3}(am+1)$ w punkcie ai

(e) $\frac{e^{miz}}{(z^2+a^2)^3}$ $(a \neq 0)$ w punktach $ai, -ai$;

(f) $(z^3 - z^5)^{-1}$ w punktach osobliwych;

(g) $\mathrm{ctg}^3 z$ w punktach osobliwych;

(h) $\sin \frac{z}{z+1}$ w punktach osobliwych;

(i) $\frac{1}{(1+z^2)^4}$ z punkcie i;

(j) $\frac{z^6}{(1+z)^3}$ w punkcie -1.

3.2 Całki trygonometryczne

15. Wykazać, że przy $0 < b < a$ zachodzi:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 \theta \mathrm{d}\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{b^2}(a - \sqrt{a^2 - b^2}).$$

16. Wykazać, że przy $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta \mathrm{d}\theta}{1 + a^2 - 2a\cos 2\theta} = \pi\frac{1 - a + a^2}{1 - a}$$

17. Wykazać, że dla $|a| < 1$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1 + a\cos\theta)^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}^3}$$

3.3 Całki z funkcji wymiernych

18. Wykazać, że

(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2 \mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{\pi}{16a^3} \quad (a > 0)$;

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}, \quad a, b > 0$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^6 \mathrm{d}x}{(a^4 + x^4)^2} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{16a}, \quad a > 0$.

3.4 Całki z funkcji wymiernych razy f. trygonometryczne

19. Wykazać, że

(a) $\int_0^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi e^{-a}}{2a} \quad (a > 0);$

(b) $\int_0^\infty \frac{x \sin x \mathsf{d}x}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi e^{-a}}{4a} \quad (a > 0);$

(c) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{b^2-a^2}\left(\frac{e^{-a}}{a} - \frac{e^{-b}}{b}\right) \quad (a \neq b, a, b > 0);$

(d) $\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x \mathsf{d}x}{(x^2+a^2)^3} = \frac{\pi e^{-a}(a^2+3a+3)}{2^3 a^5} \quad (a > 0);$ *Uwaga.* wynik sprawdzony dla $a = 1$ only

3.5 Całki z funkcji wieloznacznych

Terminologia: *Konturem ODS*[2] będziemy nazywać figurę, złożoną z dwóch półokręgów o promieniach r oraz R ($R > r$), o środkach w 0 i leżących w górnej półpłaszczyźnie, oraz odcinków $[-R, -r]$ i $[r, R]$, leżących na osi rzeczywistej.

20. Całkując funkcję $f(z) = (\mathrm{Log} z)^2(z^2+a^2)^{-1}$ po konturze ODS wykazać, że przy $a > 0$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{x^2+a^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{8a}(\pi^2 + 4(\log a)^2), \quad \int_0^\infty \frac{\log x}{x^2+a^2}\mathsf{d}x = \frac{\pi}{2a}\log a.$$

21. Wykazać w podobny sposób, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x^2)^2}\mathsf{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

22. Całkując po "dziurce od klucza" funkcję: $\exp(a\mathrm{Log} z(z^2+1)^{-2}$ wykazać, że dla $-1 < a < 3$

$$\int_0^\infty \frac{x^a \mathsf{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi(1-a)}{4\cos\frac{\pi a}{2}}.$$

Skąd się bierze powyższy warunek na a?

23. Całkując funkcję $\frac{\mathrm{Log} z}{1+z^2}$ wzdłuż brzegu obszaru $\{z : r < |z| < R\} \cap \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}\}$ wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^4}\mathsf{d}x = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2 \log x}{1+x^4}\mathsf{d}x = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}.$$

24. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}(x^2+a^2)^2}\mathsf{d}x = 2^{-3/2}\pi a^{-5/2}\left(\frac{3}{2}\log a - 1 - \frac{3\pi}{4}\right), \quad a > 0.$$

[2] Geneza nazwy ODS była na wykładzie

25. Wykazać, że

$$\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\mathsf{d}x = \pi\log 2.$$

Wsk. Całkować funkcję $\frac{\mathrm{Log}(z+i)}{1+z^2}$ po brzegu górnego półkola $K(0,R)$.