

1 Transformata Fouriera

1.1 Kilka przypomnień i nowych faktów dotyczących całek niewłaściwych

Całkę niewłaściwą

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx$$

definiowaliśmy jako

$$\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow -\infty}} \int_M^N f(x) \, dx$$

Def. Mówimy, że funkcja (ciągła, kawałkami ciągła) jest *całkowalna na $\mathbb{R}$* , jeżeli

$$\sup_{M, N \in \mathbb{R}} \int_M^N |f(x)| \, dx < \infty. \quad (1)$$

Stw. Jeżeli f – całkowalna, to istnieją granice

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) \, dx \quad \text{oraz} \quad \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 f(x) \, dx$$

Dow. Pokażemy, że

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \forall N, N' > N_0 \left| \int_0^N f(x) \, dx - \int_0^{N'} f(x) \, dx \right| < \epsilon$$

Uwaga: To co jest po kwantyfikatorach można równoważnie zapisać jako

$$\left| \int_N^{N'} f(x) \, dx \right| < \epsilon$$

Koniec uwagi.

Z założenia mamy, że $\sup_{N \in \mathbb{R}_+} \int_0^N |f(x)| \, dx < \infty$. Wobec tego funkcja

$$\phi(N) = \int_0^N |f(x)| \, dx$$

jest rosnąca i ograniczona. Istnieje więc granica

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N |f(x)| \, dx$$

Analogicznie jest dla drugiej całki (od $-N'$ do 0). Łącznie mamy:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \forall N, N' > N_0 \left| \int_{N'}^N |f(x)| \, dx \right| < \epsilon$$

co znaczy, że również

$$\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \forall N, N' > N_0 \left| \int_{N'}^N f(x) dx \right| < \epsilon$$

Tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej.

Niech $\{f_n\}$ – ciąg funkcji (ciągłych lub kawałkami ciągłych) na $\mathbb{R}$ oraz f_∞ – funkcja (ciągła lub kawałkami ciągła) na $\mathbb{R}$, przy czym

$$\forall x \in \mathbb{R} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_\infty(x).$$

Założmy, że istnieje funkcja całkowalna $\varphi \geq 0$ taka, że

$$\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

(tzn. wszystkie funkcje $f_n(x)$ są majoryzowane przez tę samą funkcję całkowalną φ , niezależnie od n).

Wtedy:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\infty(x) dx; \quad (2)$$

innymi słowy, można przechodzić do granicy pod znakiem całki.

Dow. nie będzie.

CNBO (Co Nie Będzie Okazane)

Przykł. Niech $g(x) = \max\{0, 1 - x^2\}$. Weźmy rodzinę funkcji: $f_n(x) = g(x - n)$. W tym przypadku nie mamy szans na znalezienie funkcji $\varphi(x)$ z powyższego twierdzenia.

Nie zdziwmy się więc, że nie zachodzi też teza. Mamy bowiem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x - n) dx = \int_{n-1}^{n+1} g(x - n) dx = \int_{-1}^{+1} g(x) dx > 0,$$

podczas gdy

$$f_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x - n) = 0.$$

1.2 Transformata Fouriera i jej podstawowe własności

1.2.1 Definicja, motywacja i garść przykładów

Def. Niech f – całkowalna na $\mathbb{R}$. *Transformatą Fouriera* funkcji f , oznaczaną jako $\hat{f}(x)$ lub $(\mathcal{F}f)(x)$ nazywamy funkcję

$$\hat{f}(x) \equiv (\mathcal{F}f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk. \quad (3)$$

Motywacja. W jakich problemach przydaje się transformata Fouriera? Jako prototyp rozpatrzmy *rozszerzenie światła w pryzmacie*. Puśćmy wiązkę światła białego na pryzmat. **RYS.** Po przejściu przez pryzmat, obserwujemy na ekranie za pryzmatem wszystkie kolory tęczy; każdy kolor jest wiązką światła monochromatycznego o danej częstotliwości i określonym natężeniu. Możemy zapytać: Ile w danej wiązce światła białego jest światła o

określonej długości fali? Odpowiedź uzyskujemy, poddając wyjściową wiązkę transformacie Fouriera.

Wracając na grunt matematyczny, zapytajmy: Jakie funkcje $\hat{f}$ z (3) można zapisać w powyższej postaci? Jak dla danego $\hat{f}$ znaleźć f ?

Zanim odpowiemy na powyższe pytania, rozpatrzmy garść przykładów.

1. Transformata Fouriera funkcji charakterystycznej odcinka.
2. Transformata Fouriera gaussianu.

1.2.2 Własności transformaty Fouriera

1. f – całkowalna $\implies \mathcal{F}f$ – ograniczona. (Bo:

$$|(\mathcal{F}f)(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(k) e^{ikx}| dk = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(k)| dk;$$

a że f jest całkowalna, to całka po prawej stronie jest skończona i niezależna od x , czyli – jak było zapodawane – $\mathcal{F}f$ jest ograniczona).

2. Operacja $\mathcal{F}$ jest liniowa:

- $\mathcal{F}(f + g) = \mathcal{F}f + \mathcal{F}g$;
- $\mathcal{F}(\lambda f) = \lambda \mathcal{F}f$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Jeżeli f i $\hat{f}$ są funkcjami całkowalnymi, to

$$\mathcal{F}\left(\frac{df}{dx}\right)(x) = -ix(\mathcal{F}f)(x). \quad (4)$$

Dow.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f'(k) e^{ikx} dk = \lim_{M, N \rightarrow \infty} \int_{-M}^N f'(k) e^{ikx} dk \\ &= \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left[f(k) e^{ikx} \Big|_{-M}^N - \int_{-M}^N f(k) ix e^{ikx} dk \right] \end{aligned}$$

Pierwszy wyraz (granica) jest równy zeru (bo f – całkowalna). Drugi wyraz (całka) to $-ix(\mathcal{F}f)(x)$.

CBDO

4. Jeśli $f(k)$, $kf(k)$ są całkowalne, to

$$\mathcal{F}(kf)(x) = -i \frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x). \quad (5)$$

Dow.

$$\frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathcal{F}f)(x+h) - (\mathcal{F}f)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} i \int_{-\infty}^{+\infty} kf(k) \frac{e^{ik(x+h)} - e^{ikx}}{ikh} dk$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} i \int_{-\infty}^{+\infty} k f(k) e^{ikh} \frac{e^{ikh} - 1}{ikh} = (*);$$

ale iloraz $\frac{e^{it}-1}{it}$ jest ograniczoną funkcją t , i $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{it}-1}{it} = 1$, (co można zobaczyć np. z reguły de l'Hospitala), więc (z tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej) można wejść z granicą pod znak całki, tak więc

$$(*) = i \int_{-\infty}^{+\infty} k f(k) e^{ikx} dk,$$

tak więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k f(k) e^{ikx} dk = \mathcal{F}(kf)(x) = -i \frac{d}{dx} (\mathcal{F}f)(x).$$

CBDO

Wniosek. Jeżeli $f \in C^2(\mathbb{R})$ i f, f', f'' są całkowalne, to $\mathcal{F}f$ też jest całkowalna.

Dow. (wniosku). Z założenia, $\mathcal{F}f$ jest ciągła. Mamy też:

$$\mathcal{F}(f'')(x) = -x^2 (\mathcal{F}f)(x) \quad (6)$$

i, skoro $\mathcal{F}(f)$ jest ciągła, to $\mathcal{F}(f'')(x)$ jest ciągła, a więc ograniczona na zbiorze zwartym, np. na odcinku $[-a, a]$; na tym odcinku jest więc całkowalna.

Pozostaje oszacować wkład od 'ogonów', tzn. dla $|x| > a$. Z wł. 1(?), transformata funkcji całkowalnej jest ograniczona. Mamy więc dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 |(\mathcal{F}f)(x)| \leq M, \quad \text{gdzie } M = \text{const}$$

co daje

$$|(\mathcal{F}f)(x)| \leq \frac{M}{x^2}.$$

Tak więc transformata $\mathcal{F}(f'')$ jest całkowalna na $] -\infty, a]$ i $[a, \infty[$, bo $\frac{1}{x^2}$ jest tam całkowalna.

Czyli $\mathcal{F}(f'')$ jest całkowalna na całym $\mathbb{R}$.

CBDO

Tw. Niech $f \in C^2(\mathbb{R})$ oraz f, f', f'' będą całkowalne. Wtedy

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) dx = 2\pi f(0). \quad (7)$$

Dow. Mamy:

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) e^{-\epsilon|x|} dx; \quad (8)$$

(**RYS.** – przyjrzyjmy się wykresowi $e^{-\epsilon|x|}$), bowiem funkcja podcałkowa dla dowolnego $\epsilon > 0$ jest majoryzowana przez $|(\mathcal{F}f)(x)|$, która jest całkowalna – co wynika z Tw. udowodnionego dopiero co. Równość (8) wynika teraz z tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej.

Dowód oparty jest na manipulacji granicami, co jest dozwolone znowu przez tw. Lebesgue'a o zbieżności majoryzowanej.

Mamy dalej:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) e^{-\epsilon|x|} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} (\mathcal{F}f)(x) e^{-\epsilon|x|} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(k) e^{ikx} dk) e^{-\epsilon|x|} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} \left(\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{+M} f(k) e^{ikx} dk \right) e^{-\epsilon|x|} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} \left(\int_{-M}^{+M} f(k) e^{ikx} e^{-\epsilon|x|} dk \right) dx = (**) \end{aligned}$$

funkcja w wewnętrznej całce majoryzuje się przez pewną funkcję całkowalną od zmiennej x . [....] Mamy więc dalej, po zmianie kolejności całkowania:

$$(**) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^{+M} f(k) \left(\int_{-N}^{+N} e^{ikx - \epsilon|x|} dx \right) dk = (***)$$

Policzmy tę wewnętrzną całkę:

$$\begin{aligned} \int_{-N}^{+N} e^{ikx - \epsilon|x|} dx &= \int_{-N}^0 e^{(ik + \epsilon)x} dx + \int_0^{+N} e^{(ik - \epsilon)x} dx = \frac{e^{(ik + \epsilon)x}}{ik + \epsilon} \Big|_{-N}^0 + \frac{e^{(ik - \epsilon)x}}{ik - \epsilon} \Big|_0^N \\ &= \frac{1}{ik + \epsilon} - \frac{1}{ik - \epsilon} + \text{coś dążącego do 0 przy } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Wykorzystując to w (***), mamy:

$$\begin{aligned} (***) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{2\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} dk + \text{coś dążącego do 0 przy } N \rightarrow \infty \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) \frac{2\epsilon}{k^2 + \epsilon^2} dk = |\text{podstawiamy } k = \epsilon l| = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\epsilon l) \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 l^2 + \epsilon^2} \epsilon dl = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\epsilon l) \frac{2}{l^2 + 1} dl, \end{aligned}$$

czego granica, gdy $\epsilon \rightarrow 0$, jest równa

$$f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{l^2 + 1} dl = 2\pi f(0).$$

CBDO

1.2.3 Transformata odwrotna

Teraz poszukajmy transformaty odwrotnej. Mając daną funkcję f , zdefiniujmy

$$f_l(k) = f(k + l), \quad l \in \mathbb{R}$$

Mamy:

$$(\mathcal{F}f_l)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_l(k) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k + l) e^{ikx} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{i(k-l)x} dk$$

$$= e^{-ilx} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk = e^{-ilx} (\mathcal{F}f)(x); \quad (9)$$

a że, z wzoru udowodnionego w poprzedniej Subsection:

$$f_l(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f_l)(x) dx,$$

to

$$f(l) = f_l(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) e^{-ilx} dx \quad (10)$$

Podsumowanie – ważne wzorki:

- Transformata Fouriera:

$$(\mathcal{F}f)(x) \equiv \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{ikx} dk, \quad (11)$$

- Odwrotna transformata Fouriera:

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) e^{-ikx} dx. \quad (12)$$

1.2.4 Przestrzeń $\mathbb{C}^n$ z iloczynem skalarnym i $L^2(\mathbb{R})$

Przypomnijmy definicję wektorowej przestrzeni zespolonej z iloczynem skalarnym (przestrzeni unitarnej). Niech $x, y \in \mathbb{C}^N$, tzn.

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^N); \quad y = (y^1, y^2, \dots, y^N), \quad \text{gdzie } x^i \in \mathbb{C}, \quad y^i \in \mathbb{C}.$$

Definiowaliśmy *iloczyn skalarny*:

$$(x|y) = \sum_{i=1}^N \bar{x}^i y^i$$

co dawało też definicję *normy* (długości wektora):

$$||x|| = \sqrt{(x|x)}$$

Łatwo sprawdzić, że tak zdefiniowany iloczyn skalarny ma własności:

1. $||x|| \geq 0$, $||x|| = 0 \iff x = \mathbf{0}$;
2. $(x|\lambda y) = \lambda(x|y)$ oraz $(\lambda x|y) = \bar{\lambda}(x|y)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{C}$ (liniowość w drugim argumencie, antyliniowość w pierwszym);
3. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$ oraz $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$.

Zdefiniujmy teraz $L^2(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji o wartościach zespolonych, całkowalnych z kwadratem. Należą do niej funkcje kawałkami ciągłe, całkowalne z kwadratem, tzn.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Wprowadźmy w $L^2(\mathbb{R})$ iloczyn skalarny wzorem

$$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(k)} g(k) dk.$$

Łatwo się sprawdza, że spełnione są warunki 1. – 3. wyżej.

Iloczyn skalarny definiuje *normę* funkcji

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(k)|^2 dk.$$

Obliczmy teraz *kwadrat normy transformaty Fouriera* funkcji:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}f)(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(\mathcal{F}f)(x)} (\mathcal{F}f)(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(k)} e^{-ikx} dk \right) (\mathcal{F}f)(x) dx$$

Zmieniamy kolejność całkowania, i dostajemy

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(k)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}f)(x) e^{-ikx} dx \right) dk;$$

Wewnętrzna całka jest równa $2\pi f(k)$, więc ostatecznie dostajemy

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(k)|^2 dk.$$

Udowodniona dopiero co równość nosi nazwę *wzoru Plancherela*:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(\mathcal{F}f)(x)|^2 dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(k)|^2 dk \quad (13)$$

Interpretacja fizyczna.

1.3 Zasada nieoznaczoności

Zacniemy od przypomnienia/(a jeśli ktoś nie miał do czynienia to od podania na nowo) niektórych postulatów i środków operacyjnych z mechaniki kwantowej.

Będziemy mieli do czynienia z cząstką, poruszającą się po prostej (sytuacja jednowymiarowa).

W mechanice kwantowej nie można (z reguły) przypisać cząstce konkretnego położenia. Zamiast tego operuje się *prawdopodobieństwami*. Służy do tego *funkcja falowa* $\Psi(x)$.

Nie ma ona bezpośredniej interpretacji fizycznej. Ma ją natomiast kwadrat jej modułu: Wielkość:

$$|\Psi(x)|^2 dx$$

jest prawdopodobieństwem tego, że cząstka (np. elektron) znajduje się w przedziale $[x, x + dx]$.

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki na całej prostej musi być równe 1, skąd otrzymujemy warunek *normalizacji* funkcji falowej:

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 dx = 1.$$

Mając funkcję falową, możemy otrzymać dowolne obserwable – w sensie statystycznym, tzn. otrzymać *wartości średnie* wielkości obserwowalnych. Weźmy np. położenie cząstki. Wartość średnia położenia jest

$$x_{\text{sr}} \equiv \langle x \rangle = \int_{\mathbb{R}} x |\Psi(x)|^2 dx$$

Otrzymana z powyższego rachunku wartość średnia *nie znaczy*, że podczas pojedynczego pomiaru dostaniemy dokładnie x_{sr} ; wartość tę dostaniemy jako *wartość średnią z wielu pomiarów*. Skoro tak, możemy mówić o *średnim odchyleniu kwadratowym*, obrazującym "rozrzut" wyników pomiarów wokół wartości średniej. Definiujemy je podobnie jak w statystyce. Tam, jeżeli mierzyliśmy jakąś wielkość, np. x , i w wyniku N pomiarów uzyskaliśmy wartość x_{sr} :

$$x_{\text{sr}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i,$$

to średnie odchylenie kwadratowe $(\Delta x)^2$ jest:

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{\text{sr}})^2.$$

W naszym przypadku (mechanika kwantowa) mamy

$$(\Delta x)^2 = \int_{\mathbb{R}} (x - x_{\text{sr}})^2 |\Psi(x)|^2 dx \quad (14)$$

Jedną z podstaw mechaniki kwantowej jest *dualizm korpuskularno-falowy*. Jednym z jego aspektów jest to, iż zamiast rozpatrywać funkcję falową jako funkcję *położenia*, można równoważnie rozpatrywać ją jako funkcję *pędu* cząstki. (Czasem jest to bardziej wygodne, czasem mniej, ale obie te przedstawienia są równoważne).

Zamiast *pędu* cząstki p , będziemy tutaj mieli do czynienia z *wektorem falowym* k , powiązany z p prosto przez równość

$$p = \hbar k.$$

i będziemy rozpatrywać funkcję falową jako funkcję k .

Obie te postaci: Funkcja falowa jako funkcja położenia $\Psi(x)$, oraz jako funkcja wektora falowego $\hat{\Psi}(k)$, są powiązane przez *transformację Fouriera*:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ikx} \hat{\Psi}(k) dk. \quad (15)$$

Funkcja falowa $\hat{\Psi}(k)$ ma analogiczną interpretację probabilistyczną, jak $\Psi(x)$: Wielkość

$$|\hat{\Psi}(k)|^2 dk$$

jest prawdopodobieństwem tego, że wektor falowy cząstki jest zawarty między k a $k + dk$; funkcja $\hat{\Psi}(k)$ jest *unormowana*, tzn. zachodzi

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\Psi}(k)|^2 dk = 1$$

co jest stwierdzeniem faktu, że suma prawdopodobieństw przyjmowania przez cząstkę wartości pędu w przedziale $] -\infty, \infty[$ jest 1;

Wartością średnią wektora falowego cząstki w stanie opisywanym przez $\hat{\Psi}(k)$ jest liczba

$$k_{\text{sr}} \equiv \langle k \rangle = \int_{\mathbb{R}} k |\hat{\Psi}(k)|^2 dk,$$

zaś średnie odchylenie kwadratowe dla wektora falowego cząstki w tym stanie jest równe

$$(\Delta k)^2 = \int_{\mathbb{R}} (k - k_{\text{sr}})^2 |\hat{\Psi}(k)|^2 dk. \quad (16)$$

Mamy fundamentalnej ważności

Tw. (Zasada nieoznaczoności).

$$\Delta x \cdot \Delta k \geq \frac{1}{2}, \quad (17)$$

lub, co się częściej spotyka w fizyce – w wersji pędowej,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (18)$$

Dow. Całka z kwadratu modułu dowolnej funkcji jest nieujemna, więc dla dowolnej $\lambda \in \mathbb{R}$ mamy

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi'(x) - x\lambda\Psi(x)|^2 dx \geq 0,$$

(tu prim oznacza pochodną). Rozpiszmy wyrażenie podcałkowe:

$$\int_{\mathbb{R}} |\Psi'(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} x \bar{\Psi}(x) \Psi'(x) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} x \bar{\Psi}'(x) \Psi(x) dx \geq 0. \quad (19)$$

Przedostatni człon scałkujemy przez części:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} x \bar{\Psi}(x) \Psi'(x) dx &= x \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} (x \bar{\Psi}(x))' \Psi(x) dx \\ &= 0 - \int_{\mathbb{R}} \bar{\Psi}(x) \Psi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} x \bar{\Psi}'(x) \Psi(x) dx \end{aligned}$$

(skorzystaliśmy tu z faktu, iż $x \bar{\Psi}(x) \Psi(x)$ dąży w nieskończoności do zera). Wstawiając otrzymaną równość do (19) otrzymamy:

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} |\Psi'(x)|^2 dx + \lambda^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx + \lambda \int_{\mathbb{R}} |\Psi(x)|^2 dx.$$

Popatrzmy na powyższą nierówność jako na warunek nieujemności trójmianu kwadratowego w zmiennej λ . Trójmian jest *nieujemny*, co oznacza, że jego wyróżnik jest *niedodatni*; otrzymujemy więc:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |\Psi'(x)|^2 dx\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}$$

Skorzystamy teraz z *wzoru Plancherela*; ostatnia nierówność jest równoważna:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} k^2 |\Psi(k)|^2 dk\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}$$

I to już jest prawie to co chcemy, bo wyrazy po lewej stronie to odpowiednio $(\Delta x)^2$ i $(\Delta k)^2$ – tyle że obliczane dla $x_{\text{sr}} = 0$ i $k_{\text{sr}} = 0$ (por. wzory (14) i (16)). Na razie więc mamy

$$(\Delta x)^2 \cdot (\Delta k)^2 \geq \frac{1}{4} \quad \text{dla } x_{\text{sr}} = 0 \text{ i } k_{\text{sr}} = 0.$$

Ale łatwo stąd otrzymać ogólny przypadek. Zmodyfikujmy funkcję $\Psi(x)$ następująco:

$$\Psi(x) \rightarrow e^{-ik_0 x} \Psi(x). \quad (20)$$

Przy takiej transformacji, kwadrat modułu funkcji falowej się nie zmienia:

$$|\Psi(x)|^2 \rightarrow |\Psi(x)|^2.$$

Teraz, ze względu na wzór (15) i wyrażenie na odwrotną transformatę Fouriera, mamy:

$$\hat{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \Psi(x) dx,$$

skąd widzimy, że po modyfikacji (21), transformata $\hat{\Psi}(k)$ zmienia się na

$$\hat{\Psi}(k) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} e^{-ik_0 x} \Psi(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k+k_0)x} \Psi(x) dx = \hat{\Psi}(k + k_0).$$

Mamy zatem

$$\left(\int_{\mathbb{R}} k^2 |\Psi(k + k_0)|^2 dk\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}$$

co równoważnie można zapisać

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (k - k_0)^2 |\Psi(k)|^2 dk\right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x)|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

Zróbmy teraz inną modyfikację:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi(x + x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}; \quad (21)$$

przy tej modyfikacji $|\hat{\Psi}(k)|^2$ *nie zmienia się*, bo

$$|\hat{\Psi}(k)|^2 \rightarrow \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \Psi(x + x_0) dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-x_0)} \Psi(x) dx \right|$$

$$= \left| e^{ikx_0} \hat{\Psi}(k) \right|^2 = \left| \hat{\Psi}(k) \right|^2$$

tak więc mamy

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (k - k_0)^2 |\Psi(k)|^2 dk \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |\Psi(x + x_0)|^2 dx \right) \geq \frac{1}{4},$$

co ostatecznie daje

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (k - k_0)^2 |\Psi(k)|^2 dk \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\Psi(x)|^2 dx \right) \geq \frac{1}{4}.$$

Tak więc dla dowolnych $x_0 = x_{\text{sr}}$, $k_0 = k_{\text{sr}}$ mamy

$$(\Delta k)^2 \cdot (\Delta x)^2 \geq \frac{1}{4}.$$

CBDO

2 Szeregi Fouriera

Niech f będzie funkcją na $\mathbb{R}$.

Def. Mówimy, że f jest *okresowa* o okresie T , jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f(x + T) = f(x).$$

Def. *Rozwinięciem funkcji okresowej f w szereg Fouriera* nazywamy przedstawienie jej jako kombinacji liniowej (w ogólności, nieskończenie wielu) prostych funkcji okresowych $\{\phi_k(x)\}$:

$$f(x) = \sum_k c_k \phi_k(x) \quad (22)$$

Poniżej wybierzemy okres równy $T = 2\pi$, co żadną stratą ogólności nie jest.

Jako "prostych funkcji okresowych" najczęściej używamy (w zależności od sytuacji):

1. $\{\sin(kx)\}$, $k \in \mathbb{N}$;
2. $\{\cos(kx)\}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
3. $\{e^{ikx}\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pojawiają się naturalne pytania: • Czy każdą funkcję okresową można rozwinąć w szereg Fouriera? • • Jak otrzymać współczynniki szeregu? • • • Czy otrzymany szereg jest zbieżny?

W pełnej ogólności na te pytania nie odpowiemy¹ Zaczniemy od sytuacji, która jest stosunkowo łatwa, a jednocześnie dostatecznie ogólna.

Oznaczmy przez $C^\infty(T)$ zbiór (przestrzeń wektorową) funkcji okresowych (o okresie 2π) na prostej, nieskończenie wiele razy różniczkowanych, tzn.

$$C^\infty(T) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(x + 2\pi)\}.$$

¹Historycznie, rozwój teorii szeregów Fouriera doprowadził na przełomie XIX i XX w. do wielu nowych pojęć, z których wyrosła spora część dwudziestowiecznej matematyki.

Uwaga. Dla funkcji okresowej, gdy całkujemy po pełnym okresie, możemy wziąć *dowolny* przedział o długości okresu i całka od tego nie zależy: **RYS.**

$$\int_a^{2\pi+a} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

Dow. Rachujemy:

$$\begin{aligned} \int_a^{2\pi+a} f(x)dx &= \int_a^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{2\pi+a} f(x)dx = \int_a^{2\pi} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x)dx. \end{aligned}$$

CBDO

Za zbiór funkcji $\{\phi_k(x)\}$, w które będziemy rozwijać funkcje okresowe, weźmy teraz zbiór exponensów: $\{\phi_k(x) = e^{ikx}\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Mamy następującą prostą własność exponensów:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} \frac{1}{ik} e^{ikx} \Big|_0^{2\pi} = 0 & \text{dla } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{dla } k = 0 \end{cases}$$

Wykorzystując tę własność, łatwo dostaniemy wzór na współczynniki rozwinięcia w szereg (22). Mamy:

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_k e^{i(k-n)x} dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \delta_{k,n} = 2\pi c_n,$$

czyli

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

I TO JUŻ BĘDZIE KONIEC WYKŁADU...

3 Zadania

1. Znaleźć transformaty Fouriera następujących funkcji:
 - (a) Funkcja charakterystyczna odcinka $[-a, a]$ (tzn. równa 1 dla $x \in [-a, a]$ oraz 0 poza nim)
 - (b) Funkcja charakterystyczna odcinka $[0, 2a]$.
 - (c) Funkcja równa $1 - x^2$ dla $x \in [-1, 1]$ oraz 0 poza tym odcinkiem.
 - (d) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$, $a > 0$.
 - (e) Funkcja $f(x) = \frac{\cos mx}{x^2+a^2}$.
 - (f) Funkcja $f(x) = \frac{1}{x^4+a^4}$.
 - (g) Funkcja Gaussa $f(x) = e^{-ax^2}$.
2. Policzyc prawą stronę zasady nieoznaczoności dla funkcji z zadania 1 a, c, d, g. Dla której funkcji niepewność $\Delta x \cdot \Delta k$ jest najmniejsza? *Uwaga.* Przy porównywaniach trzeba pamiętać o *unormowaniu* funkcji!