

1 Własności $\mathbb{R}^N$

1.1 Odległości i normy w $\mathbb{R}^N$

Będziemy się teraz zajmować funkcjami od n zmiennych, tzn. określonymi na $\mathbb{R}^N \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (iloczyn kartezjański N egzemplarzy $\mathbb{R}$).

Punkt x należący do $\mathbb{R}^N$ będziemy oznaczać jako

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^N).$$

Przykł. Wysokość terenu n.p.m. jako funkcja długości i szerokości geograficznej.

Przykł. Temperatura w atmosferze (czy innym ośrodku) jako funkcja dł. i szer. geogr. oraz wysokości.

Początkiem do badania $\mathbb{R}^n$ i funkcji na niej jest zdefiniowanie *odległości*. Przypomnijmy sobie, jak definiowaliśmy odległość w $\mathbb{R}^2$. Jest ona wyznaczana z tw. Pitagorasa: **RYS.:** Dla dwóch punktów $a = (a^1, a^2)$ i $b = (b^1, b^2)$ odległość $D(a, b)$ pomiędzy nimi jest

$$D(a, b) = \sqrt{(a^1 - b^1)^2 + (a^2 - b^2)^2}.$$

Analogicznie postępujemy w przestrzeniach o większej liczbie wymiarów: Jeśli $x, y \in \mathbb{R}^N$, to odległość $d(x, y)$ między nimi definiujemy jako

Def.

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x^k - y^k)^2} \quad (1)$$

Inne oznaczenie $d(x, y)$ w $\mathbb{R}^N$ to $\|x - y\|$, tzn.

Def.

Jeśli mamy punkt $r = (r^1, r^2, \dots, r^N) \in \mathbb{R}^N$, to na $\|r\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (r^k)^2}$ możemy patrzeć jako na odległość punktu r od zera:

$$\|r\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (r^k)^2} = d(r, 0). \quad (2)$$

Tak zdefiniowana norma ma ważne własności, które teraz wypiszemy.

Własności normy.

1. $\| -r \| = \| r \|$ i ogólniej, $\| \alpha r \| = |\alpha| \cdot \| r \|$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad (3)$$

ta nierówność nazywana jest *nierównością trójkąta*.

Dow. p.2): Nierówność trójkąta wynika z *nierówności Schwarza*: Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^N$ zachodzi

$$\left| \sum_{k=1}^N x^k \cdot y^k \right| \leq \|x\| \cdot \|y\|. \quad (4)$$

Dow. Rozpatrzmy następującą funkcję zmiennej rzeczywistej λ :

$$f(\lambda) = \sum_{k=1}^N (x^k - \lambda y^k)^2 = \sum_{k=1}^N (x^k)^2 - 2\lambda \sum_{k=1}^N x^k y^k + \lambda^2 \sum_{k=1}^N (y^k)^2$$

$f(\lambda)$ jest trójmianem kwadratowym w λ . Ponadto $f(\lambda) \leq 0$, ponieważ $f(\lambda)$ jest pełnym kwadratem. Skoro trójmian $f(\lambda)$ jest nieujemny, to jego wyróżnik Δ musi być niedodatni. Policzmy ten wyróżnik:

$$\Delta = 4\left(\sum_{k=1}^N x^k y^k\right)^2 - 4\sum_{k=1}^N (x^k)^2 \sum_{k=1}^N (y^k)^2 \leq 0, \quad (5)$$

co możemy przepisać jako

$$\left(\sum_{k=1}^N x^k y^k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^N (x^k)^2 \sum_{k=1}^N (y^k)^2$$

Po wyciągnięciu pierwiastka kwadratowego z obu stron nierówności i skorzystaniu z definicji normy (2) otrzymujemy nierówność (4).

CBDO

Dow. nierówności trójkąta (3). Policzmy:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \sum_{k=1}^N (x^k - y^k)^2 = \sum_{k=1}^N (x^k)^2 - 2 \sum_{k=1}^N x^k y^k + \sum_{k=1}^N (y^k)^2 \\ &\leq \|x\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2. \end{aligned}$$

z czego trzeba jeszcze wyciągnąć pierwiastek, aby otrzymać (3).

CBDO

Uwaga: Czy w nierówności Schwarz'a może wystąpić równość? TAK – jeśli x jest proporcjonalne do y (tzn. $x = \gamma y$ dla pewnego $\gamma \in \mathbb{R}$; wtedy $\Delta = 0$, a to znaczy (p. równ (5)) że w nier. Schwarz'a ma miejsce równość.

Podsumujmy **własności odległości**, zdefiniowanej przez (1): Dla dowolnych punktów $x, y, z \in \mathbb{R}^N$ zachodzi:

1. $d(x, y) \geq 0$, przy czym $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (jest to tzw. *nierówność trójkąta*). **RYS.**

Okazuje się, że odległość euklidesowa nie jest jedyną funkcją od dwu argumentów, spełniającą powyższe warunki. Na przestrzeni $\mathbb{R}^N$ można wprowadzić wiele innych funkcji, zależnych od dwu argumentów, które spełniają powyższe warunki i które w związku z tym można też nazwać odległościami. Prowadzi to do pojęcia *przestrzeni metrycznej*:

Def. *Przestrzeń metryczną* nazywamy zbiór punktów z funkcją dwóch zmiennych $d(\cdot, \cdot)$ (zwaną *metryką* lub *odległością*), których odległość spełnia powyższe własności 1., 2. i 3.

Przykł. Wprowadźmy na $\mathbb{R}^N$ następującą metrykę:

$$d_\diamond(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad (6)$$

Łatwo sprawdzić, że $d_\diamond(x, y)$ spełnia powyższe własności 1., 2. i 3.; pierwsze dwie są oczywiste, a trzecia wynika z nierówności dla wartości bezwzględnej: $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

1.2 Ciągi punktów z $\mathbb{R}^N$

Oznaczmy przez $\{a_n\} = (a_1, a_2, \dots)$ ciąg punktów z $\mathbb{R}^N$: $a_n \in \mathbb{R}^N$, tzn. $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^N)$.

Def. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ punktów z $\mathbb{R}^N$ jest zbieżny do $g \in \mathbb{R}^N$, jeśli

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{n > M} : d(a_n, g) < \epsilon. \quad (7)$$

Uwaga. Warunek (7) oznacza, że ciąg (o wartościach rzeczywistych!): $d(a_n, g)$ dąży do zera dla n dążącego do ∞ :

$$d(a_n, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Jeśli warunek (7) jest spełniony, to piszemy też:

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g.$$

Podobnie jak w przypadku ciągów o wartościach rzeczywistych, mamy twierdzenie o jednoznaczności granicy.

Tw. Jeśli $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ i $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g'$, to $g = g'$.

Dow. Mamy:

$$0 \leq d(g, g') \leq d(g, a_n) + d(g', a_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

co znaczy, że $d(g, g') = 0$, a więc $g = g'$.

CBDO

Badanie zbieżności ciągów o wartościach w $\mathbb{R}^N$ jest równoważne badaniu zbieżności ciągów w $\mathbb{R}$. Mówi o tym następujące

Stw. Niech $\{a_n\}$ będzie ciągiem punktów przestrzeni $\mathbb{R}^N$; niech $g \in \mathbb{R}^N$. Wtedy

$$(a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g) \iff (\text{dla wszystkich } k = 1, 2, \dots, N : a_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^k). \quad (8)$$

Dow. $\Leftarrow$

$$d(a_n, g) = \sqrt{\sum_{k=1}^N (a_n^k - g^k)^2},$$

i ponieważ każde z wyrażeń pod pierwiastkiem dąży do zera: $|a_n^k - g^k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to ich suma też dąży do zera, a to znaczy, że $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

$\Rightarrow$

Mamy: $\|r\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (r^k)^2}$. Wybierzmy którąś k -tą składową i mamy z nierówności trójkąta:

$$\|r\| \geq \sqrt{(r^k)^2} = |r^k|,$$

co daje:

$$d(a_n, g) \geq |a_n^k - g^k| \geq 0,$$

i z tw. o 3 ciągach, jeżeli $d(a_n, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, to także $|a_n^k - g^k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, a to znaczy, że $a_n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g^k$ dla $k = 1, 2, \dots, N$.

CBDO

Def. Niech $X \subset \mathbb{R}^N$. Mówimy, że X jest *ograniczony*, jeśli istnieje taka liczba M , że

$$\forall_{x \in X} : \|x\| \leq M$$

(tzn. odległości wszystkich punktów zbioru X od zera są nie większe od liczby M).

Niech $s \in \mathbb{R}^N$ i $R \in \mathbb{R}_+$.

Def. Kulą (otwartą) $K(s, R)$ o środku w s i promieniu R nazywamy zbiór tych punktów $\mathbb{R}^N$, że ich odległość od s jest nie większa od R : **RYS.**

$$K(s, R) = \{x \in \mathbb{R}^N : d(x, s) < R\}. \quad (9)$$

Uwaga. Własność ograniczoności zbioru można równoważnie tak wypowiedzieć: Zbiór Z jest ograniczony, jeśli zawiera się w pewnej kuli (o pewnym środku i pewnym promieniu).

Tw. (Bolzano – Weierstrassa). Każdy ograniczony ciąg punktów $\mathbb{R}^N$ posiada podciąg zbieżny.

Dow. Niech $a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^N)$.

Jeśli ciąg $\{a_n\}$ – ograniczony, to wszystkie ciągi $\{a_n^k\}$ (k – numer składowej, tzn. $k = 1, 2, \dots, N$; n – numer elementu ciągu, tzn. $n = 1, 2, 3, \dots$) są ograniczone. Wynika to z nierówności pokazywanej wyżej: $\|r\| \geq r^k$ dla dowolnego $r \in \mathbb{R}^N$.

Po zastosowaniu tw. Bolzano-Weierstrassa do ciągu $\{a_{nn}^1\}$ otrzymamy podciąg $\{a_{n_k}^1\}$ ciągu $\{a_n\}$ taki, że ciąg pierwszych współrzędnych jest zbieżny. Stosujemy teraz tw. Bolzano-Weierstrassa do ciągu $\{a_{n_k}^2\}$ i otrzymujemy podciąg ciągu $\{a_{n_k}\}$, którego pierwsza i druga składowa są zbieżne. Itd., operację powtarzamy N razy, aż otrzymamy zbieżność we wszystkich składowych.

CBDO

Def. Niech $\{a_n\}$ – ciąg punktów z $\mathbb{R}^N$. Mówimy, że ciąg $\{a_n\}$ jest *ciągami Cauchy'ego*, jeśli

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > M : d(a_m, a_n) < \epsilon. \quad (10)$$

Tw. W przestrzeni $\mathbb{R}^N$ ciąg jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ciągami Cauchy'ego.

Dow. $\Rightarrow$: Załóżmy, że $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$. Z definicji ciągu zbieżnego (powtórzonej tu 2 razy):

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > M : d(a_m, g) < \frac{\epsilon}{2} \wedge d(a_n, g) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Z nierówności trójkąta mamy:

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, g) + d(a_m, g) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

czyli otrzymujemy (10), a więc $\{a_n\}$ jest ciągami Cauchy'ego.

$\Leftarrow$: Załóżmy teraz, że $\{a_n\}$ jest ciągami Cauchy'ego. Wtedy

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbb{N} \quad \forall m, n > M : d(a_m, a_n) < \epsilon;$$

a że

$$d(a_m, a_n) \geq |a_m^k - a_n^k| \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, N$$

to każdy z ciągów $\{a_n^k\}$ jest ciągami Cauchy'ego. A jak wiemy, jeżeli ciąg rzeczywisty jest ciągami Cauchy'ego, to jest zbieżny. Zatem każdy z ciągów $\{a_n^k\}$ jest zbieżny; a to znaczy, że też i ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

CBDO

1.3 Zbiory otwarte i domknięte

Przestrzeń $\mathbb{R}^N$, którą rozpatrujemy, ma naturalną strukturę *przestrzeni wektorowej*. Ich własności były/będą omawiane na części 'algebraicznej' wykładu; tu przypomnijmy najważniejsze fakty:

Przestrzeni $\mathbb{R}^N$ nadajemy strukturę *przestrzeni wektorowej nad ciałem liczb rzeczywistych* (i oznaczamy $(\mathbb{R}^N, +, \cdot)$), jeśli zdefiniujemy w niej działania *dodawania* wektorów i *mnożenia wektora przez liczbę*:

Dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}^N$, $\lambda \in \mathbb{R}$ zachodzi:

1. $+$: $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$: $(x + y)^k = x^k + y^k$;
2. $\cdot$: $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$: $(\lambda x)^k = \lambda x^k$

1.3.1 Zbiory domknięte

Def. Niech $A \subset \mathbb{R}^N$. Zbiór A nazywamy *domkniętym*, jeśli dla dowolnego zbieżnego ciągu elementów z A jego granica też należy do A ;

tzn.: A – domknięty $\iff$

$$\forall_{\{x_n\}} (x_n \in A, x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g) \implies (g \in A).$$

Przykł. zbiorów domkniętych.

1. $\mathbb{R}^N$.
2. Zbiór jednoelementowy.
3. Zbiór skończony.
4. W szczególności – zbiór pusty.
5. Niech $\{a_n\}$ – ciąg o wyrazach z $\mathbb{R}^N$, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g \in \mathbb{R}^N$. Wtedy zbiór $\{a_1, a_2, \dots\} \cup g$ jest zbiorem domkniętym.

Przykł. Odcinek $]0, 1]$ nie jest domknięty, bo wszystkie elementy ciągu $\frac{1}{n}$ należą do $]0, 1]$, a granica 0 *nie należy* do $]0, 1]$.

Def. Niech $A \subset \mathbb{R}^N$. *Domknięciem* zbioru A (ozn. $\overline{A}$) nazywamy zbiór:

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{Istnieje ciąg } \{x_n\} \text{ o wyrazach z } A \text{ t. że } x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x\}. \quad (11)$$

Przykł. Domykanie z lewej strony odcinka $]0, 1]$.

Stwierdzenia.

1. $A \subset \overline{A}$.
2. Jeśli A – domknięty to $A = \overline{A}$.
3. $\overline{A}$ jest zbiorem domkniętym oraz $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

4. Jeśli ciąg $\{x_n\}$ dąży do granicy g : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ i każdy jego wyraz x_n jest granicą ciągu elementów zbioru A , to g też jest granicą ciągu elementów ze zbioru A .

Dow. Punkt x_n jest granicą ciągu elementów ze zbioru A ; nazwijmy ten ciąg $\{y_m\}$. Mamy

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{M \in \mathbb{N}} \forall_{m > M} : d(y_m, x_n) < \epsilon,$$

a więc

$$\forall_{\epsilon > 0} \exists_{a \in A} d(a, x_n) < \epsilon$$

Weźmy teraz $\epsilon = \frac{1}{n}$ i odpowiednio do tego $a_n \in A$ tak, by zachodziło $d(a_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Zachodzi:

$$0 \leq d(a_n, g) \leq d(a_n, x_n) + d(x_n, g) < \frac{1}{n} + d(x_n, g);$$

prawa strona dąży do zera gdy $n \rightarrow \infty$ ($\frac{1}{n}$ wiadomo, zaś $d(x_n, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ z założenia). Zatem również $d(a_n, g) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, a to znaczy, że $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$.

CBDO

Mamy następującą charakteryzację domknięcia.

Stw.

$$\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^N : \forall_{\epsilon > 0} K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

(tzn. do domknięcia należą te punkty x , że przecięcie kuli o środku w x i dowolnie małym promieniu ze zbiorem A jest niepuste). (**RYS.**)

Dow. Oznaczmy prawą stronę równości przez B . Jeżeli $x \in B$, to biorąc $\epsilon = \frac{1}{n}$ znajdziemy $x_n \in K(x, \frac{1}{n}) \cap A$. To znaczy, że $x_n \in A$ oraz że $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$, czyli $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

Pokazaliśmy w ten sposób, że $B \subset \overline{A}$.

Z drugiej strony, jeśli $x \in \overline{A}$, to w dowolnie małej kuli $K(x, \epsilon)$ o środku w x zawarte są prawie wszystkie elementy ciągu $\{x_n\}$ o wyrazach z A i granicy x . Spełniony jest więc warunek, że przecięcie tej kuli z A jest zbiorem niepustym, czyli że $x \in B$. Tak więc $x \in \overline{A} \implies x \in B$, czyli $\overline{A} \subset B$.

Oba te warunki znaczą, że $\overline{A} = B$.

CBDO

1.3.2 Zbiory otwarte

Def. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ oraz $x \in \mathcal{O}$. Mówimy, że x jest *punktem wewnętrznym* zbioru $\mathcal{O}$ (lub, że $\mathcal{O}$ jest *otoczeniem* punktu x) jeśli istnieje $\epsilon > 0$ takie, że $K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$.

Def. Zbiór A nazywamy *zbiorem otwartym*, jeśli każdy element tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.

Przykł. zbiorów otwartych:

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ są zbiorami otwartymi.
2. $K(x, r)$ ($r > 0$) jest zbiorem otwartym.

Dow. Chcemy pokazać, że (**RYS.**)

$$\forall_{y \in K(x, r)} \exists_{\epsilon > 0} K(y, \epsilon) \subset K(x, r).$$

Bierzemy $\epsilon = r - d(x, y) > 0$. Dla dowolnego $z \in K(y, \epsilon)$ mamy:

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \epsilon + d(y, x) = r$$

co znaczy, że $z \in K(x, r)$.

CBDO

Stw. Jeśli x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$ i x jest granicą ciągu $\{x_n\} : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, to prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}$ należą do $\mathcal{O}$.

I na odwrót:

Stw. Niech $x \in \mathbb{R}^N$ i $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$. Przypuśćmy, że dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ elementów $\mathbb{R}^N$ zachodzi:

$$(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x) \implies (\text{prawie wszystkie wyrazy } x_n \in \mathcal{O}).$$

Wtedy x jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$.

Dow. (nie wprost).

Założmy, że x nie jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$, tzn.

$$\forall_{\epsilon > 0} K(x, \epsilon) \not\subset \mathcal{O}.$$

Bierzemy $\epsilon = \frac{1}{n}$. Mamy: $K(x, \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{O}$. Zatem istnieje taki ciąg $\{x_n\}$, że $x_n \in K(x, \frac{1}{n})$ oraz $x_n \notin \mathcal{O}$. Skoro x_n należy do kuli $K(x, \frac{1}{n})$, to odległość między x a x_n jest mniejsza niż promień kuli:.

$$0 < d(x, x_n) < \frac{1}{n},$$

a to znaczy, że ciąg $\{x_n\}$ jest zbieżny do x : $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem (znaleźliśmy bowiem ciąg $\{x_n\}$ dążący do x , którego wyrazy nie należą do $\mathcal{O}$), więc nieprawdziwe jest zaprzeczenie tezy, czyli prawdziwa jest teza mówiąca, iż x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$.

CBDO

Uwaga. Otwartość i domkniętość *nie są* pojęciami przeciwstawnymi! Np. zbiór $\mathbb{R}^N$ jest zarówno otwarty jak i domknięty.

Uwaga. Otwartość/domkniętość zbioru zależy też od tego, podzbiorem jakiego zbioru on jest. Np. jeśli rozpatrujemy $A =]0, 1[$ jako podzbiór $\mathbb{R}$, to kulami otwartymi w $\mathbb{R}$ są odcinki (otwarte) i A jest otwarty. Jeśli natomiast rozpatrujemy A jako podzbiór $\mathbb{R}^2$, to kulami otwartymi w $\mathbb{R}^2$ są koła (bez brzegu) i A nie jest już otwarty, bo żadne koło o niezerowym promieniu nie mieści się w A .

Tw. Niech $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^N$ i $A = \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}$. Wtedy ma miejsce równoważność

$$(\mathcal{O} \text{ jest otwarty}) \iff (A \text{ jest domknięty}). \quad (12)$$

Dow. $\implies$ Weźmy zbieżny $\{x_n\}$ o wyrazach należących do A : $x_n \in A$, $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$. Chcemy pokazać, że $x \in A$.

Przypuśćmy, że przeciwnie: $x \notin A$. Wobec tego $x \in \mathcal{O}$ (bo A i $\mathcal{O}$ są rozłączne, a ich suma to całe $\mathbb{R}^N$). Z założenia $\mathcal{O}$ jest zbiorem otwartym, więc x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$ i (p. poprzednie Stw.) prawie wszystkie wyrazy ciągu $\{x_n\}$ należą do $\mathcal{O}$, więc nie należą do A . Otrzymaliśmy sprzeczność.

$\Leftarrow$ Niech $x \in \mathcal{O}$. Skoro tak to $x \notin A = \overline{A}$, a więc istnieje kula $K(x, \epsilon)$ taka, że $K(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$, a to znaczy, że $K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$, więc x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$, czyli $\mathcal{O}$ jest otwarty.

CBDO

Wniosek. Niech $x \in \mathbb{R}^N$, $A \subset \mathbb{R}^N$ i $\mathcal{O} = \mathbb{R}^N \setminus A$. Wtedy zachodzi jeden i tylko jeden z wykluczających się warunków:

1. x jest punktem wewnętrznym zbioru $\mathcal{O}$.
2. $x \in \overline{A}$.

Dow. Trzeba pokazać, że nieprawdą jest równoważność obydwu powyższych warunków, tzn: Nieprawda, że $1. \iff 2.$

Pokażemy najspierw że z zaprzeczenia 1. wynika 2.

Zaprzeczenie zdania: " x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$ " to jest to samo, co zaprzeczenie zdania: " $\exists_{\epsilon > 0} : K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$ ", czyli: " $\forall_{\epsilon > 0} : K(x, \epsilon) \not\subset \mathcal{O}$ ". To zaś jest równoważne zdaniu:

" $\forall_{\epsilon > 0} : K(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$ ", a to znaczy, że x jest punktem domknięcia zbioru A , tzn. $x \in \overline{A}$

To teraz (??? tego nie ma u SLW ???) że z zaprzeczenia 2. wynika 1.

Skoro x *nie* należy do domknięcia A , to $x \in \mathcal{O}$ oraz że $\exists_{\epsilon > 0} : K(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$, a to znaczy, że $K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}$, tzn. x jest punktem wewnętrznym $\mathcal{O}$.

Teraz dalej SLW

Tw. (?? Z notatek wynika że to poprzednie tw. tyle że z innym nieco dowodem ??) (będzie później)
Tw.

1. $\mathbb{R}^N$ i $\emptyset$ są zbiorami otwartymi.
2. Jeśli $(\mathcal{O}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ($\mathcal{A}$ – dowolny zbiór wskaźników) jest rodziną zbiorów otwartych, to $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$ też jest zbiorem otwartym.
3. Jeżeli $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ są otwarte, to $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ jest otwarty.

Dow.

1. Było
2. Niech $x \in \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$. Istnieje więc $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ takie, że $x \in \mathcal{O}_{\alpha_0}$. Ponieważ $\mathcal{O}_{\alpha_0}$ – otwarty, więc istnieje kula o niezerowym promieniu, zawarta w $\mathcal{O}_{\alpha_0}$:

$$\exists_{\epsilon > 0} : K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha,$$

czyli $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{O}_\alpha$ jest zbiorem otwartym.

3. Niech $x \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, tzn. $x \in \mathcal{O}_1$ i $x \in \mathcal{O}_2$. Tak więc

$$\exists_{\epsilon_1 > 0} : K(x, \epsilon_1) \subset \mathcal{O}_1 \quad \text{ i } \quad \exists_{\epsilon_2 > 0} : K(x, \epsilon_2) \subset \mathcal{O}_2.$$

Bierzemy $\epsilon = \min(\epsilon_1, \epsilon_2) > 0$ i wtedy mamy

$$K(x, \epsilon) \subset K(x, \epsilon_1) \subset \mathcal{O}_1 \quad \text{ i } \quad K(x, \epsilon) \subset K(x, \epsilon_2) \subset \mathcal{O}_2,$$

zatem $K(x, \epsilon) \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, czyli $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ jest zbiorem otwartym. *Uwaga.* Przez indukcję dowodzi się, że powyższa własność zachodzi dla dowolnej *skończonej* ilości zbiorów: Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, jeśli $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_n$ są otwarte, to również $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \dots \cap \mathcal{O}_n$ jest otwarty. Własność ta *nie jest* prawdziwa dla rodzin nieskończonych: Weźmy np. rodzinę zbiorów otwartych $A_n =] - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}[$; mamy: $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1]$, co nie jest zbiorem otwartym.

CBDO

Uwaga – stw. Każdy zbiór otwarty $\mathcal{O}$ jest sumą pewnej rodziny zbiorów otwartych.

Dow. Niech $x \in \mathcal{O}$; wobec tego $x \in \mathcal{O}_x$, gdzie $\mathcal{O}_x$ jest pewną kulą o środku w punkcie x , taką, że $\mathcal{O}_x \subset \mathcal{O}$. Mamy następujące zawierania:

$$\mathcal{O} \subset \bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x \subset \mathcal{O},$$

skąd wynika, że $\bigcup_{x \in \mathcal{O}} \mathcal{O}_x = \mathcal{O}$.

CBDO

1.3.3 Niektóre dalsze własności zbiorów domkniętych.

Dopełnienie zbioru, przypomnienie własności dopełnienia.

Zbiory domknięte mają własności, powiązane z powyższymi własnościami zbiorów otwartych:

1. $\mathbb{R}^N, \emptyset$ są zbiorami domkniętymi.
2. Jeśli A_1, A_2 – zbiory domknięte, to $A_1 \cup A_2$ też jest zbiorem domkniętym. Z indukcji, zachodzi to też dla dowolnej *skończonej* sumy mnogościowej: Jeśli $A_1, A_2, \dots, A_n$ są zbiorami domkniętymi, to $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ też jest zbiorem domkniętym dla dowolnego n .
3. Natomiast przecięcie *dowolnej rodziny* (skończonej czy nieskończonej) zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym: Jeśli $\{A_\alpha\}, \alpha \in \mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów domkniętych, to również $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ też jest zbiorem domkniętym.

Dow.

1. $\mathbb{R}^N$ jest domknięty, bo $\mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^N = \emptyset$ jest otwarty.
 $\emptyset$ jest domknięty, bo $\mathbb{R}^N \setminus \emptyset = \mathbb{R}^N$ jest otwarty.
2. Jeśli A_1, A_2 – domknięte, to A'_1, A'_2 – otwarte; zatem (było) $A'_1 \cap A'_2$ – otwarty, a że $A'_1 \cap A'_2 = (A_1 \cup A_2)'$, więc $(A_1 \cup A_2)'$ – otwarty, a to znaczy że $A_1 \cup A_2$ – domknięty.
Uwaga: Własność ta *nie jest* słuszna dla sum nieskończonych: Jako przykład weźmy $A_n = [\frac{1}{n}, 1]$. Każdy zbiór A_n jest domknięty, a ich suma $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =]0, 1]$ *nie jest* zbiorem domkniętym.

3. Jeśli A_α jest domknięty to $\mathbb{R}^N \setminus A_\alpha$ jest otwarty. Suma dowolnej ilości zbiorów otwartych jest otwarta (własność 3. zb. otwartych), wobec tego: $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} (\mathbb{R}^N \setminus A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A'_\alpha$ jest otwarty. Ale mamy: $A' \cup B' = (A \cap B)'$ dla dowolnych zbiorów A i B , (A' – dopełnienie A , tzn. $\mathbb{R}^N \setminus A$) i również: $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} A'_\alpha = \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)'$. A mamy jeszcze dla dowolnych zbiorów X, Y : $X \setminus Y = X \cap Y'$, zatem $\left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)' = \mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)$.
Tak więc $\mathbb{R}^N \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha \right)$ jest otwarty, zatem $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} A_\alpha$ jest *domknięty*.

CBDO

1.3.4 Zbiory zwarte

Def. Niech $K \subset \mathbb{R}^N$. Mówimy, że K jest *zwarty*, jeśli z dowolnego ciągu elementów zbioru K można wybrać podciąg zbieżny do elementu zbioru K .

Tw. Niech $K \subset \mathbb{R}^N$. Wtedy:

$$(K \text{ jest zwarty}) \iff (K \text{ jest domknięty i ograniczony}).$$

Dow. $\Leftarrow$ Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, z dowolnego ciągu ograniczonego można wybrać podciąg zbieżny. Granica tego ciągu musi być w K , bo K – domknięty.

$\Rightarrow$ Załóżmy, że K jest zwarty. Bierzemy ciąg elementów z K zbieżny do $x \in \mathbb{R}^N$. Granicą dowolnego podciągu jest ten sam punkt x . Zatem (z zał. i z definicji zb. zwartego) $x \in K$. To pokazuje, że K jest domknięty.

Przypuśćmy teraz, że zbiór K nie jest ograniczony. Wtedy istnieje ciąg $\{x_n\}$ elementów zbioru K taki, że $d(0, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. Tak też jest dla dowolnego podciągu ciągu $\{x_n\}$. Ale taki podciąg nie może być zbieżny.

CBDO