# 1 Odwzorowania

Pojęcie *odwzorowania* pomiędzy dwoma zbiorami było już definiowane, ale dawno, więc nie od rzeczy będzie przypomnieć, że odwzorowaniem nazywamy sposób przyporządkowania (niekoniecznie każdemu) elementowi $x \in X$ elementu $y \in Y$. Zapisujemy to: $T : X \to Y$, Dalej $X$ będzie podzbiorem $\mathbb{R}^N$, zaś $Y$ podzbiorem $\mathbb{R}^M$.

**RYS.**

Załóżmy, że mamy jakieś układy współrzędnych w $\mathbb{R}^N$ i $\mathbb{R}^M$, tak że dowolny punkt $x \in X$ ma postać:

$$x = (x^j), \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

i analogicznie w $Y$

$$y = (y^k), \quad k = 1, 2, \ldots, M.$$

$$(Tx)^k = T^k(x^1, x^2, \ldots, x^N) \quad k = 1, 2, \ldots, M$$

Na odwzorowanie możemy patrzeć po prostu jak na układ $M$ funkcji $N$ zmiennych.

*Przykł.*

1. $R \to \mathbb{R}^3$ – krzywa w $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: Zamiana układu współrzędnych; pole wektorowe.

## 1.1 Definicja odwzorowania ciągłego i niektóre przykłady

**Def.** Niech $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, oraz niech będzie dane odwzorowanie $T : X \to Y$.

Mówimy, że odwzorowanie $T$ jest *ciągłe*, jeśli dla dowolnego ciągu $\{x_n\}$ elementów zbioru $X$ zbieżnego do punktu $g \in X$ mamy

$$T(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(g). \tag{1}$$

*Uwaga:* Przypominając sobie definicję zbieżności ciągu widzimy, że odwzorowanie $T$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie funkcje $T^k$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$ są ciągłe.

*Przykłady* odwzorowań ciągłych. Tu: $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$,$T : X \to Y$.

1. Odwzorowanie stałe: Dla każdego $x \in X$: $T(x) = y_0 = \text{const.}$. **RYS.**

2. Tu niech $N = M$. Określamy *odwzorowanie identycznościowe* wzorem: $T(x) = x$; $T$ często też oznaczamy symbolem $Id_X$.

3. Niech Tu: $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, $Z \subset \mathbb{R}^k$ oraz $T : X \to Y$, $S : Y \to Z$. Oznaczamy: $(S \circ T)(x) = S(T(x))$, czyli $S \circ T : X \to Z$.

   **RYS.**

   Odwzorowanie $S \circ T$ nazywamy *superpozycją* lub *złożeniem* odwzorowań $S$ oraz $T$.

   **Tw.** Jeśli $S$ i $T$ są odwzorowaniami ciągłymi, to $S \circ T$ też jest odwzorowaniem ciągłym.

   **Dow.** (podobny jak w $\mathbb{R}^1$): Niech $\{x_n\}$ będzie ciągiem elementów z $X$: $x_n \in X$ oraz $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in X$.

   Ponieważ $T$ – ciągłe, więc $T(x_n) stackreln \to \infty \longrightarrow T(g)$.

Oraz:

Ponieważ $X$ – ciągłe, więc $S(T(x_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} S(T(g))$.

Zatem $(S \circ T)(x_n)) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (S \circ T)(g))$.

**CBDO**

4. $+ : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x + y \in \mathbb{R}$ (dodawanie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   **Dow.** Jest to po prostu twierdzenie, że granica sumy dwóch ciągów zbieżnych jest sumą granic.

   **CBDO**

5. $\cdot : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \to x \cdot y \in \mathbb{R}$ (mnożenie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   **Dow.** Granica iloczynu dwóch ciągów zbieżnych jest iloczynem granic.

   **CBDO**

6. $:: (\mathbb{R}\times\mathbb{R}\backslash\{0\}) \ni (x, y) \to x : y \in \mathbb{R}$ (dzielenie liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem ciągłym.

   **Dow.** Granica ilorazu dwóch ciągów zbieżnych jest ilorazem granic.

   **CBDO**

Różnica pomiędzy $\to$ i $\mapsto$.
**Def.** Jeśli $A \subset Y$, to zbiór:

$$T^{-1}(A) = \{x \in X : \ \ T(x) = A\} \tag{2}$$

nazywamy *przeciwobrazem* zbioru $A$ przy odwzorowaniu $T$.

*Przykł.* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = x^2 + y^2$; $T^{-1}(1) = ...$, $T^{-1}(1) = ...$, $T^{-1}(0) = (0, 0)$, $T^{-1}(-1) = \emptyset$, $T^{-1}([1, 2]) = ....$

*Uwaga.* Pojawiający się wyżej symbol $T^{-1}$ *nie oznacza*, że $T$ jest odwracalne! Powyższy zapis należy odczytywać *łącznie*.

**Def.** (*) Niech $X \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{O} \subset X$.

Mówimy, że $\mathcal{O}$ jest *otwarty* w $X$, jeżeli istnieje zbiór otwarty $\mathcal{O}'$ w $\mathbb{R}^N$ taki, że $\mathcal{O} = X \cap \mathcal{O}'$.

**RYS.**

## 1.2 Inna charakteryzacja odwzorowań ciągłych

**Tw.** Niech $X \subset \mathbb{R}^N$, $Y \subset \mathbb{R}^M$, $T : \ X \to Y$. Wówczas

$T$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy wszystkich zbiorów otwartych w $Y$ są otwarte w $X$.

**Dow.** $\Longrightarrow$

Zakładamy, że $T$ – ciągłe i że $\mathcal{O} \subset Y$, $\mathcal{O}$ – otwarty.

Niech $a$ będzie jakimś punktem z przeciwobrazu $\mathcal{O}$: $a \in T^{-1}(\mathcal{O})$. Pokażemy, że

$$\underset{\epsilon>0}{\exists} : K(a, \epsilon) \cap X \subset T^{-1}(\mathcal{O}) \tag{3}$$

Gdy już będziemy mieli dowód (3), to wtedy:

Zdefiniujmy $\mathcal{O}'$ jako:

$$\mathcal{O}' = \bigcup_{a \in T^{-1}(\mathcal{O})} K(a, \epsilon_a).$$

$\mathcal{O}'$ jest otwarty, jako suma mnogościowa kul otwartych.

Ponieważ $T^{-1}(\mathcal{O}) \subset X$, więc też $T^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}' \cap X$.

Z drugiej strony, ponieważ zachodzi (3), to mamy dla każdego $a \in T^{-1}(\mathcal{O})$: $K(a, \epsilon_a) \cap X \subset T^{-1}(\mathcal{O})$ dla pewnego $\epsilon_a$, z czego wynika, że $\mathcal{O}' \cap X \subset T^{-1}(\mathcal{O})$.

Ostatecznie: Ponieważ: $T^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}' \cap X \subset T^{-1}(\mathcal{O})$, to znaczy, że

$$T^{-1}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}' \cap X,$$

czyli – w myśl definicji (*) wyżej – $T^{-1}(\mathcal{O})$ jest otwarty w $X$.

To teraz będzie **dowód** (3). Dowód będzie niewprost: Przypuśćmy, że prawdziwe jest *zaprzeczenie* zdania (3), tzn. że zachodzi

$$\underset{\epsilon > 0}{\forall} : K(a, \epsilon) \cap X \not\subset T^{-1}(\mathcal{O}).$$

Bierzemy wobec tego $\epsilon = \frac{1}{n}$ i mamy, że dla każdego $n$

$$K(a, \frac{1}{n}) \cap X \not\subset T^{-1}(\mathcal{O}).$$

(tzn. przecięcie wystaje poza zbiór $T^{-1}(\mathcal{O})$).

Czyli dla każdego $n$ istnieje taki punkt $a_n$, że

$a_n \in K(a, \frac{1}{n})$,

$a_n \in X$,

$T(a_n) \notin \mathcal{O}$, bo $a_n \notin T^{-1}(\mathcal{O})$,

$T(a) \in \mathcal{O}$, bo $a \in T^{-1}(\mathcal{O})$.

Ponieważ $a_n \in K(a, \frac{1}{n})$, to $d(a_n, a) < \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, zatem

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \quad \text{oraz} \quad T(a_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(a)$$

ponieważ $T$ z założenia jest *ciągłe*.

Zbiór $\mathcal{O}$ jest otwarty w $Y$, więc

$$\mathcal{O} = Y \cap \mathcal{O}', \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{O}' \text{ jest otwarty w } \mathbb{R}^N.$$

Zachodzi: $T(a) \in \mathcal{O}$, czyli $T(a) \in \mathcal{O}'$ i, ponieważ $\mathcal{O}'$ jest otwarty, to istnieje takie $r$, że $K(T(a), r) \subset \mathcal{O}'$.

Ponieważ $d(T(a_n), T(a)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, to prawie wszystkie wyrazy ciągu $T(a_n)$ są zawarte w kuli $K(T(a), r)$:

$$T(a_n) \in K(T(a), r) \subset \mathcal{O}'$$

zaś $K(T(a), r) \subset \mathcal{O}'$ (co było wyżej), a ponadto $T(a_n) \in Y$ (

(??? Chyba też $T(a_n) \in Y$, bo $a_n \in X$ oraz $T : X \to Y$ ???)

Skoro $T(a_n) \in Y$ i $T(a_n \in \mathcal{O}'$ to $T(a_n) \in \mathcal{O}$ – więc otrzymaliśmy sprzeczność.

$\Longleftarrow$

Niech $x_n \in X$ i $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in X$. Trzeba pokazać, że również $T(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(g)$.

Równoważnie będziemy pokazywać, że dla dowolnego $\epsilon > 0$, prawie wszystkie wyrazy $T(x_n) \in K(T(g), \epsilon)$.

Ponieważ $K(T(g), \epsilon)$ jest zbiorem otwartym, to $K(T(g), \epsilon) \cap Y$ jest zbiorem otwartym w $Y$. Dalej, ponieważ dla $T$ – ciągłego przeciwobraz zb. otwartego jest zb. otwartym, to $T^{-1}(K(T(g), \epsilon) \cap Y)$ jest zbiorem otwartym w $X$. Oraz mamy: $g \in T^{-1}(K(T(g), \epsilon) \cap Y)$, czyli razem z $g$ musi należeć do $X$ pewne jego otoczenie.

A to znaczy, że dla każdego ciągu $x_n$ dążący do $g \in X$, wszystkie wyrazy $x_n$ od pewnego miejsca $n_0$ muszą należeć do $X$: Dla $n > n_0$ zachodzi

$$x_n \in T^{-1}(K(T(g), \epsilon) \cap Y),$$

tzn.

$$T(x_n) \in K(T(g), \epsilon)$$

a to znaczy, że

$$T(x_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T(g).$$

**CBDO**

## 1.3 Jeszcze inna charakteryzacja odwzorowań ciągłych

**Tw.**

$$(T \text{ ciągłe na } X) \Longleftrightarrow \left( \underset{x\in X}{\forall} \underset{\epsilon>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists} \underset{y\in X}{\forall} (d(x,y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon \right) \quad (4)$$

**Dow.**

$\Longrightarrow$

Załóżmy, że teza tw. powyżej jest nieprawdziwa, tzn.

$$\underset{x\in X}{\exists} \underset{\epsilon>0}{\exists} \underset{\delta>0}{\forall} \underset{y\in X}{\exists} (d(x,y) < \delta) \text{ i } d(T(x), T(y)) \geqslant \epsilon.$$

Wybierzmy $\delta = \frac{1}{n}$. Istnieje więc taki ciąg $\{y_n\}$ , że

$$d(x, y_n) < \frac{1}{n} \quad (*)$$
$$d(T(x), T(y_n)) \geqslant \epsilon \quad (**)$$

Z (*) wynika, że $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$,

natomiast z (**) wynika, że $T(y_n) \stackrel{n\to\infty}{\not\longrightarrow} T(x)$, co jest sprzeczne z założeniem, że $T$ jest ciągłe.

$\Longrightarrow$

Niech $x_n, x \in X$, oraz $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.

Weźmy $\epsilon > 0$. Z założenia,

$$\underset{\delta>0}{\exists} \underset{y\in X}{\forall} (d(x,y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x), T(y)) < \epsilon.$$

Ponieważ $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, to dla prawie wszystkich $n$ zachodzi:

$$d(x, x_n) < \delta \quad \text{oraz } d(T(x), T(x_n)) < \epsilon$$

a ta ostatnia nierówność mówi, że $T(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(x)$, a to znaczy, że $T$ jest ciągłe.

**CBDO**

**Tw.** (nazwane w notatkach 'sakramentalnym'; na pewno jest FUNDAmentalne).
Niech $K \subset \mathbb{R}^N$ – zwarty, oraz niech $f : K \to \mathbb{R}$ – funkcja ciągła. Wtedy:

1. $f$ jest ograniczona.
2. $f$ osiąga swoje kresy, tzn.:

$$\underset{x_{min}, x_{max} \in K}{\exists} \ \underset{x \in K}{\forall} \ f(x_{min}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_{max}) \tag{5}$$

3. $f$ jest jednostajnie ciągła.

**Dow.**

1. Przypuśćmy, że $f$ nie jest ograniczona. Wtedy istnieje $\{x_n\}$ , $x_n \in K$ taki, że

$$f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \qquad (\bullet)$$

Ponieważ $K$ jest zwarty, więc ciąg $\{x_n\}$ posiada podciąg zbieżny $\{y_n\} : y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g \in K$. Ale $f$ jest ciągła, więc

$$f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(g)$$

co stanowi sprzeczność z $(\bullet)$.

**CBDO**

2. Niech $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem wartości funkcji $f$ na $K$: $\mathcal{W} = \{f(x) : \ x \in K\}$. Niech $M$ będzie kresem górnym zbioru wartości funkcji na $K$: $M = \sup \mathcal{W}$. Kres górny należy do domknięcia zbioru: $M \in \overline{\mathcal{W}}$. $\overline{\mathcal{W}}$ jest domknięty, więc istnieje ciąg $\{x_n\}$ o wyrazach z $K$ taki, że $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} M$. $K$ jest zwarty, więc domknięty, więc istnieje podciąg $\{x_{n_m}\}$ ciągu $\{x_n\}$ , który to podciąg jest zbieżny do granicy należącej do $K$:

$$f(\underbrace{\lim_{m\to\infty} x_{n_m}}_{x_{max}}) = \lim_{m\to\infty} f(x_{n_m}) = M.$$

**CBDO**

3. Przypomnijmy sobie, co to znaczy, że funkcja od argumentu rzeczywistego jest jednostajnie ciągła. Dla odwzorowania definicja jest analogiczna:

**Def.**

$$(T \text{ jednostajnie ciągłe na } X) \Longleftrightarrow \left( \underset{\epsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x,y\in X}{\forall} \ (d(x,y) < \delta) \Longrightarrow d(T(x),T(y)) < \epsilon \right) \tag{6}$$

Teraz

**Dow.** Przypuśćmy, że $f$ *nie jest* jednostajnie ciągła, tzn.

$$\underset{\epsilon>0}{\exists} \ \underset{\delta>0}{\forall} \ \underset{x,y\in X}{\exists} \ (d(x,y) < \delta) \overset{\mathrm{i}}{\Longrightarrow} d(T(x),T(y)) \geqslant \epsilon.$$

Weźmy $\delta = \frac{1}{n}$ i ciągi $\{x_n\}$ , $\{y_n\}$ o wyrazach z $X$ takie, że

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \quad \text{i jednocześnie} \quad d(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \epsilon.$$