Zadania domowe Matematyka II

11 kwietnia 2010

1. Znajdź pewną bazę podprzestrzeni A (przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^4$) zadanej przez
$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \; : \; x_1 + x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - x_4 = 0 \right\}$$
Czy wektory $v = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $w = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ należą do podprzestrzeni A?

2. Macierz odwzorowania liniowego $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ w bazie $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ to $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$.
Znaleźć współrzędne wektora w tej bazie, będącego obrazem wektora $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ w tym odwzorowaniu. Czy odwzorowanie jest surjekcją?

3. Znajdź wyznacznik macierzy
a) $\begin{bmatrix} 1 & \pi & 2 & 3 \\ 5 & e & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & \pi & 3 & 0 \\ 1 & e & 7 & 4 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{bmatrix}$

4. Dla jakiej wartości parametru a układ równań $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$ ma rozwiązanie. Znajdź to rozwiązanie. Jaki jest wymiar przestrzeni rozwiązań?

5. W zależności od wartości parametru a rozwiąż układ równań
a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

6. Znajdź bazę jądra i bazę obrazu macierzy odwzorowania liniowego (w bazach standardowych) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

7. Znajdź macierz odwrotną do danej a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Znaleźć pochodną superpozycji odwzorowań $T \circ S$ gdzie $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $S(x, y) = (x^3 + y^3, e^{x-y}, xy)$ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $T(u, v, w) = (u + \log v, e^{uv}, w^2)$

9. Znaleźć pochodną kierunkową w kierunku wersora $v = \frac{1}{4}[0, 3, \sqrt{7}]$ funkcji $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, e^{x+y+z}xy)$

10. Niech $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja klasy $\mathcal{C}^1$ pokazać, że funkcja $z(x, y) = (x^2 + y^2)\phi(xy)$ spełnia równanie $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}z$

Podpowiedzi i odpowiedzi

1. Na przykład $\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\-1\end{bmatrix}\right)$. Wektor v tak, wektor w nie.

2. $(3, 3, 9)$. Nie

3. a) 8, b) 6, c) -18016

4. $a = 4$, $\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\\frac{3}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} : \lambda \in \mathbb{R},\ \mu \in \mathbb{R}\right\}$, 2

5. a) $a \neq \frac{2}{3}$ dokładnie jedno rozwiązanie, $a = \frac{2}{3}$ jednowymiarowa przestrzeń rozwiązań.
   b) $a \neq \frac{2}{3}$ dokładnie jedno rozwiązanie, $a = \frac{2}{3}$ brak rozwiązań.

6. Przykładowa baza obrazu $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right)$ i jądra $\left(\begin{bmatrix}-2\\-4\\2\\1\end{bmatrix}\right)$