02.10.2009

1 Logika, arytmetyka zbiorów

1.1 Logika

Jest to zasadniczo powtórka ze szk. średniej, być może z niektórymi rzeczami nowymi.

Uwaga: Często słowu "logika" nadaje się szersze znaczenie niż temu o czym będzie poniżej: np. mówi się "logiczne myślenie" w sensie wyciągania wniosków itp. Tu "logika" oznacza "formalne reguły dotyczące prawdziwości zdań".

Def. Zdaniem w sensie logiki (**zdaniem logicznym**) nazywamy wyrżenie, któremu możemy jednoznacznie przyporządkować jedną z dwóch wartości logicznych: **prawdę (1) lub fałsz (0)**.

Uwaga: W sensie logiki zdaniami *nie są* zdania pytające i rozkazujące.

Przykład: *"Warszawa jest stolicą Polski"* jest zdaniem (prawdziwym), "*Pcim jest stolicą Polski"* jest zdaniem (fałszywym), "*najładniejsze kwiaty to malwy"* nie jest zdaniem.

Zdania złożone. Z jednego (lub kilku) zdań możemy utworzyć nowe zdania – **zdania złożone**– przy pomocy *operatorów logicznych* (zw. czasem też *spójnikami zdaniowymi, funktorami zdaniotwórczymi*). Podstawowe operatory logiczne to:

1. **Zaprzeczenie (negacja)** zdania: "$\sim$". Dla zdania p czytamy: "nieprawda, że p".

   Operacja jednoargumentowa:

p	$\sim p$
1	0
0	1

2. **Koniunkcja** zdań p, q: "$\wedge$". ("Mnożenie" logiczne). Operacja dwuargumentowa: czytamy "p i q". Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba są prawdziwe, co ilustrujemy przy pomocy tabelki logicznej:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3. **Alternatywa** zdań p, q: "$\vee$". ("Dodawanie" logiczne). Operacja dwuargumentowa: czytamy "p lub q". Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedno z nich jest prawdziwe. Zapisujemy to przy użyciu tabelki:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

4. **Implikacja** zdań p, q: "$\Longrightarrow$". Operacja dwuargumentowa: czytamy "jeżeli p to q".

p	q	$p \Longrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5. **Równoważność** zdań: p, q: "$\Longleftrightarrow$". Operacja dwuargumentowa: czytamy "p wtedy i tylko wtedy gdy q". Dwa zdania są równoważne, gdy są oba jednocześnie prawdziwe lub jednocześnie fałszywe:

p	q	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

6. **Alternatywa wykluczająca** zdań: p, q: "$\underline{\vee}$". Operacja dwuargumentowa. Jest to operacja działająca odwrotnie niż równoważność: Wynik zadziałania alternatywy wykluczającej jest prawdziwy wtedy i tylko wtedy gdy jedno ze zdań jest fałszywe, a drugie prawdziwe:

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Def. Tautologią nazywamy zdanie złożone, które jest prawdziwe niezależnie od wartości logicznych zdań, z których jest złożone. (W języku potocznym "tautologią" nazywa się wyrażenie w stylu "masło maślane", czyli powtórzenie tego samego, może innymi nieco słowami; tu definicja jest nieco szersza, gdyż dotyczy zdań złożonych.)

Niektóre prawa rachunku zdań:

1. Prawo podwójnego przeczenia: $\sim (\sim p) \Longleftrightarrow p$.

2. Prawo wyłączonego środka: Zdanie: $p\vee \sim p$ jest zawsze prawdziwe. Niech p będzie zdaniem: "Legia wygrała"; wtedy $\sim p$ to "Legia przegrała lub zremisowała".

3. Prawa de Morgana:

   (a) Prawo zaprzeczenia koniunkcji: $\sim (p \wedge q) \Longleftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$. (o tym można się przekonać bezpośrednim rachunkiem, wstawiając możliwe wartości logiczne zdań i patrząc czy po lewej i prawej stronie dostanie się to samo. Jest to uniwersalna metoda sprawdzania, czy dwa zdania złożone są równoważne.)

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

   (b) Prawo zaprzeczenia alternatywy: $\sim (p \vee q) \Longleftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$.

4. Prawo zaprzeczenia implikacji: $\sim (p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

5. Prawo transpozycji: $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim q \wedge \sim p)$.

6. Prawa łączności:

   (a) Łączność koniunkcji: $[(p \wedge q) \wedge r] \Longleftrightarrow [p \wedge (q \wedge r)]$

   (b) Łączność alternatywy: $[(p \vee q) \vee r] \Longleftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$

7. Prawa rozdzielności:

   (a) koniunkcji względem alternatywy: $(p \wedge q) \vee r \Longleftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

   (b) alternatywy względem koniunkcji: $(p \vee q) \wedge r \Longleftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Kwantyfikatory. Dotyczą *form zdaniowych*

- Dla każdego x zachodzi $\phi(x) : \underset{x}{\forall}\ \phi(x)$
- Istnieje taki x, że zachodzi $\psi(x) : \underset{x}{\exists}\ \psi(x)$

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

- $\sim (\underset{x \in X}{\forall}\ \phi(x)) \Longleftrightarrow \underset{x \in X}{\exists}(\sim \phi(x))$

  Przykł. Powiedzieć, że "nieprawda, że wszystkie liczby naturalne są parzyste" jest tym samym, co powiedzieć, że "istnieje taka liczba naturalna, która jest nieparzysta".

- $\sim (\underset{x}{\exists}\psi(x)) \Longleftrightarrow \underset{x \in X}{\forall}(\sim \psi(x))$

1.2 Zbiory

Zbiór jest pojęciem pierwotnym, niedefiniowalnym. Aby jednak na tym nie poprzestać i powiedzieć o co tu chodzi, to taką pseudodefinicją mogłoby być: "coś, co zawiera elementy".

Def. Zbiorem pustym nazywamy zbiór, który nie zawiera żadnego elementu. Oznacza się go $\emptyset$.

Def. *Zbiorem skończonym* nazywamy zbiór posiadający skończoną ilość elementów. Ilość elementów zbioru skończonego A oznaczamy jako $|A|$, czasem też $\#A$.

Def. Mówimy, że zbiory A i B są *równe* wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i każdy element zbioru B należy do zbioru A. Zapisujemy to tak:

$$A = B \Longleftrightarrow \forall_x (x \in A \Longleftrightarrow x \in B).$$

Def. Zbiór A *zawiera się* w zbiorze B wtedy i tylko wtedy, gdy każdy element zbioru A jest jednocześnie elementem zbioru B. Sytuację taką oznaczamy $A \subset B$, a o zbiorze A mówimy, że jest *podzbiorem* zbioru B. Zapisujemy to tak: $A \subset B \Longleftrightarrow (a \in A \Longrightarrow a \in B)$.
. Rysunek $A \subset B$

Przykład. Zbiór liczb parzystych jest podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Niektóre proste własności inkluzji (zawierania się) zbiorów:

- $\forall_A : \emptyset \subset A$ (zbiór pusty jest podzbiorem dowolnego zbioru A)

- $\forall_A : A \subset A$ (każdy zbiór jest swoim podzbiorem).

Def. Jeśli $A \subset B$ i $A \neq B$, to mówimy, że A jest *podzbiorem właściwym* zbioru B.

Pytanie: Ile podzbiorów ma zbiór skończony zawierający n elementów? **Odp.** 2^n.

Def. Sumą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do co najmniej jednego z tych zbiorów. Zapisujemy to jako:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

. **Rysunek** $A \cup B$

Def. Przecięciem (iloczynem) zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, które należą do obu zbiorów. (Przecięcie nazywamy też *częścią wspólną*). Zapisujemy to jako:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

. **Rysunek** $A \cap B$

Def. Różnicę zbiorów A i B zapiszemy już tylko wzorem i zilustrujemy:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

. **Rysunek** $A \setminus B$

Def. Mówimy, że zbiory A i B są **rozłączne** wtedy i tylko wtedy, gdy nie mają wspólnych elementów, tzn. gdy $A \cap B = \emptyset$. $\boxed{A \cap B = \emptyset}$

Dopełnienie zbioru: Każdy zbiór A możemy uważać za podzbiór jakiegoś większego zbioru Ω (wtedy Ω nazywamy **nadzbiorem** zbioru A).

Def. Dopełnieniem zbioru A do zbioru Ω nazywamy zbiór $A' = \Omega \setminus A$. (Czasem dopełnienie A oznacza się też A^C od "complement").

Def. Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór par uporządkowanych (a, b), gdzie $a \in A, b \in B$:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Przykł. Niech $x, y \in A = \mathbb{R}$. Wtedy (x, y) – parę liczb rzeczywistych można interpretować jako współrzędne punktu na płaszczyźnie. Tak więc $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ to *płaszczyzna*.

Przykł. Niech A – zbiór dat, B – zbiór miejsc na Ziemi; wtedy $A \times B = \{(data, miejsce)\}$ – zbiór zdarzeń historycznych.

Def. Analogicznie definiujemy **iloczyn kartezjański** n zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jako zbiór n-ek uporządkowanych:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Przykł. Nasza przestrzeń, w której żyjemy, to R^3.

1.3 Podstawowe zbiory liczbowe i ich oznaczenia

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ – zbiór liczb *naturalnych*. ("natural")
2. $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ – zbiór liczb *całkowitych*. ("Zahlen")
3. $\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p, q$ – względnie pierwsze $\}$ – zbiór liczb *wymiernych*. ("quotient")
4. $\mathbb{R}$ – zbiór liczb *rzeczywistych* ("real").

1.4 Przedziały liczbowe i ich oznaczenia

1.4.1 Przedziały ograniczone

Niech $a, b \in \mathbb{R}$ i $a < b$.

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (przedział obustronnie otwarty)
2. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ (przedział obustronnie domknięty)

1.4.2 Przedziały nieograniczone

Niech $a \in \mathbb{R}$.

1. $]a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
2. $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}$
3. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
4. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}$

2 Funkcje

Def. *Funkcją* (stosuje się też nazwę *odwzorowanie*) określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi $x \in X$ dokładnie jednego elementu $y \in Y$. x nazywamy *argumentem*, zaś y – *wartością* funkcji. Zbiór X nazywamy *dziedziną* funkcji. Zapisujemy: $y = f(x)$. Dla jednoczesnego podania funkcji (sposobu przyporządkowania) oraz zbiorów X i Y piszemy: $f : X \to Y$.

Uwaga. Do definicji funkcji trzeba podać trzy rzeczy: f, X, Y. Dwie funkcje: $f : X_1 \to Y_1$ oraz $f : X_2 \to Y_2$, dla których sposób przyporządkowania f jest taka sama, ale $X_1 \neq X_2$ lub $Y_1 \neq Y_2$, uważamy za *różne*! Np. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x + 1$ oraz $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : f(x) = x + 1$, uważamy za *różne*, mimo iż recepta przyporządkowania jest ta sama!

Def. *Injekcją* nazywamy odwzorowanie o własności: $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$. (innymi słowy, jest to odwzorowanie *różnowartościowe*)

Przykł. Przykł.

Def. *Surjekcją* nazywamy takie odwzorowanie, że każdy $y \in Y$ jest obrazem pewnego $x \in X$. Zapiszmy to używając kwantyfikatorów: $\underset{y \in Y}{\forall} \; \underset{x \in X}{\exists} : y = f(x)$. W tym przypadku mówimy też, że f jest odwzorowaniem "na".

Przykł. **Def.** *Bijekcją* nazywamy odwzorowanie, które jest jednocześnie injekcją i surjekcją.

Przykł. Rozważmy trzy funkcje f_1, f_2, f_3: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) := x^2$; $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, f_2(x) := x^2$; $f_3 : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, f_3(x) := x^2$. f_1 nie jest iniekcją ani surjekcją; f_2 nie jest injekcją, ale jest surjekcją; wreszcie f_3 jest zarówno injekcją jak i surjekcją. Przykład ten pokazuje, w jak dużym (decydującym!) stopniu własności funkcji (injektywność, surjektywność itp.) zależą od zbioru, na którym są określone.

Bijekcje są ważną klasą odwzorowań, gdyż można dla nich określić *odwzorowanie odwrotne*.

Def. Jeśli $f : X \to Y$ jest bijekcją, to *odwzorowaniem odwrotnym* do f (oznaczanym jako f^{-1}) jest odwzorowanie $f^{-1} : Y \to X$, definiowane tak: Jeśli $y = f(x)$, to $f^{-1}(y) = x$.

Przykł. Weźmy f_3 z powyższego przykładu. Mamy tu $y = f(x) = x^2$, więc $x = +\sqrt{y} = f^{-1}(y)$.

Def. *Obrazem* zbioru $A \subset X$ przy odwzorowaniu f nazywamy zbiór $B \subset Y$ oznaczany jako $B = f(A)$ i określony jako

$$B := \cup_{x \in A} f(x)$$

Def. *Przeciwobrazem* zbioru $C \subset Y$ przy odwzorowaniu f nazywamy zbiór $E \subset X$, oznaczany jako $E = f^{-1}(C)$ i określony jako

$$E = \{x \in X : f(x) \in C\}$$

Przykł. Rozważmy funkcję f_1 z powyższego przykładu: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) := x^2$. Mamy: $f_1([1,2]) = [1,4]$, zaś $f^{-1}([1,4]) = [1,2] \cup [-2,-1]$.

Def. *Poziomicą* punktu $c \in Y$ nazywamy przeciwobraz punktu $c \in Y$.

Przykł. Rozważmy funkcję $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, określoną jako: $g(x,y) = x^2 + y^2$. Wtedy, dla $c > 0$, poziomica to zbiór punktów płaszczyzny spełniających równanie: $x^2 + y^2 = c$, w czym rozpoznajemy równanie *okręgu* o promieniu $\sqrt{c}$. Dla $c = 0$ poziomicą jest punkt $(0,0)$, a dla $c < 0$ – zbiór pusty.

Jako że zmysłem człowieka, odbierającym zdecydowaną większość bodźców jest *wzrok*, nic dziwnego, że łatwiej dostrzeżemy różne aspekty funkcji patrząc na jej *wykres*.

Def. *Wykresem funkcji* $f : X \to Y$ nazywamy następujący podzbiór G iloczynu kartezjańskiego $X \times Y$: $G = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$.

W sytuacjach, z którymi teraz będziemy mieć do czynienia (tzn. wykresami funkcji rzeczywistych o argumentach rzeczywistych), wykres jest podzbiorem płaszczyzny, tzn. zbiorem par (x,y). Na osi poziomej zaznaczamy argumenty x, a na osi pionowej wartości funkcji $y = f(x)$.

Def. *Miejscem zerowym* x_0 funkcji f nazywamy argument taki, że $f(x_0)$=0.

Uwaga. Używając dopiero co wprowadzonej terminologii mówimy, że zbiorem miejsc zerowych funkcji f jest *poziomica* $f^{-1}(0)$.

Następujące właściwości funkcji rzeczywistych (tzn. $f : X \to Y$, gdzie X, Y są podzbiorami $\mathbb{R}$) są często ważne w zastosowaniach.

Def. *Monotoniczność* funkcji:

- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *rosnącą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *malejącą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall\, x_1, x_2 \in A : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *stałą* na zbiorze $A \subset X \iff \forall\, x_1, x_2 \in A : f(x_1) = f(x_2)$

Def. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *parzystą* $\iff \forall\, x \in D : f(x) = f(-x)$.

Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY.

Przykł. Funkcja $\cos(x)$ jest parzysta na $\mathbb{R}$.
Def. Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy *nieparzystą* $\iff \forall\, x \in D : f(x) = -f(-x)$.
Uwaga. Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$.
Przykł. Funkcja $\sin(x)$ jest parzysta na $\mathbb{R}$.
Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną z dołu*

$$\iff \exists_{m \in \mathbb{R}} : \forall_{x \in D} : f(x) \geqslant m$$

Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną z góry*

$$\iff \exists_{M \in \mathbb{R}} : \forall_{x \in D} : f(x) \leqslant M$$

Def. Funkcję f nazywamy *ograniczoną* jeśli jest jednocześnie ograniczona z góry i z dołu.

Przykł. Funkcja $F_1 : \mathbb{R}_+ \ni x \to F_1(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z dołu; $F_2 : \mathbb{R}_- \ni x \to F_2(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ jest ograniczona z góry; $F_3 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \to F_3(x) := \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ nie jest ograniczona; a funkcja $F_4 : \mathbb{R} \ni x \to F_4(x) := \sin^2(x) \in \mathbb{R}$ jest ograniczona.

Def. Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje *największą* wartość $y_{max} \in Y$ dla $x_0 \in X \iff f(x_0) = y_{max}$ oraz $\forall_{x \in X} : f(x) \leqslant f(x_0)$.

Analogicznie

Def. Funkcja $f : X \to Y$ przyjmuje *najmniejszą* wartość $y_{min} \in Y$ dla $x_0 \in X \iff f(x_0) = y_{min}$ oraz $\forall_{x \in X} : f(x) \geqslant f(x_0)$.

Przekształcenia wykresu funkcji.

- *Symetria względem osi OX*: Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OX, otrzymamy wykres funkcji $y = -f(x)$.
- *Symetria względem osi OY*: Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem osi OY, otrzymamy wykres funkcji $y = f(-x)$.
- *Symetria względem punktu* $(0, 0)$: Przekształcając wykres funkcji $y = f(x)$ przez symetrię względem punktu $(0, 0)$, otrzymamy wykres funkcji $y = -f(-x)$.
- *Przesunięcie równoległe wykresu o wektor* $[a, b]$: W wyniku przesunięcia równoległego wykresu funkcji $y = f(x)$ o wektor $[a, b]$ otrzymujemy wykres funkcji $y = f(x-a)+b$.
- *Skalowanie* wykresu funkcji: wykresy $y = f(x)$ oraz $y = Af(x)$.
- *Symetria względem prostej $y = x$*: Przekształcając w ten sposób wykres funkcji $y = f(x)$ otrzymamy wykres funkcji *odwrotnej* $y = f^{-1}(x)$.

3 Funkcje: liniowa, kwadratowa, wielomiany, f. wymierne

3.1 Funkcja liniowa

Def. *Funkcją liniową* nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax + b$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Stw. Wykresem funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ jest prosta o równaniu $y = ax + b$, nachylona do osi OX pod kątem α takim, że $a = \operatorname{tg} \alpha$.

Stw. Funkcja liniowa jest: rys.

- rosnąca $\iff a > 0$,
- malejąca $\iff a < 0$,
- stała $\iff a = 0$.

Jak powiedziano, wykresem funkcji liniowej jest prosta. Patrząc na wszystkie możliwe proste na płaszczyźnie, widzimy, że postać $y = ax+b$ obejmuje prawie wszystkie przypadki, z wyjątkiem jednej klasy – *prostych pionowych.* Aby uwzględnić także tę sytuację, dogodnie jest przyjąć ogólniejszą postać równań prostej, a mianowicie

$$Ax + By + C = 0, \quad A \neq 0 \ \text{lub} B \neq 0$$

Warunki równoległości wykresów funkcji liniowych:

- Proste zadane jako wykresy funkcji: $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe $\iff a_1 = a_2$.
- Proste zadane w postaci ogólnej $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ oraz $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ są równoległe $\iff A_1B_2 - A_2B_1 = 0$.

3.1.1 Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Def. *Równaniem liniowym z jedną niewiadomą* nazywamy równanie postaci $ax + b = 0$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$.

Mogą zachodzić następujące sytuacje dotyczące rozwiązalności takiego równania: rys.

- Jeśli $a \neq 0$, to równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie $x = -\frac{b}{a}$.
- Jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to rozwiązaniem równania jest dowolna liczba rzeczywista.
- Jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie nie posiada rozwiązań

3.1.2 Układ dwu równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Niech będzie dany układ dwu równań liniowych z dwiema niewiadomymi x, y:

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{cases} \tag{1}$$

Zdefiniujmy:

$$W = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1; \quad W_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1; \quad W_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - c_2b_1$$

Mogą zachodzić następujące sytuacje dotyczące rozwiązalności układu (1):

- Jeśli $W \neq 0$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = -\frac{W_x}{W}$, $y = -\frac{W_y}{W}$. Układ taki nazywamy *układem oznaczonym.*
- Jeśli $W = 0 = W_x = W_y$, to układ (1) posiada nieskończenie wiele rozwiązań; rozwiązaniem jest każda para liczb x, y spełniająca dowolne równanie danego układu. Układ taki nazywamy *układem nieoznaczonym.*
- Jeśli $W = 0$ i co najmniej jeden z wyznaczników W_x, W_y jest różny od zera, to układ nie posiada rozwiązań. Układ taki nazywamy *układem sprzecznym.*

Ilustracja graficzna

Nierówności lin. – ćw.

3.2 Funkcja kwadratowa

Def. *Funkcją kwadratową* (trójmianem kwadratowym) nazywamy funkcję: $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest *parabola* o wierzchołku w punkcie $p = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$, gdzie $\Delta := b^2 - 4ac$ nazywamy *wyróżnikiem* trójmianu kwadratowego.

Miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + c$: $\boxed{\text{rys.}}$

- ma dwa różne miejsca zerowe (pierwiastki): $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, gdy $\Delta > 0$;
- ma jedno miejsce zerowe $x_0 = -\frac{b}{2a}$, gdy $\Delta = 0$;
- nie ma miejsc zerowych, gdy $\Delta < 0$.

Przykł. *Rzut pionowy.* Z miejsca znajdującego się 2 m nad podłogą rzucamy w górę piłkę z prędkością początkową $3m/s$. Po jakim czasie piłka upadnie na podłogę? Założyć wartość przyspieszenia ziemskiego $10m/s^2$.

Rozw. Droga w ruchu jednostajnie przyspieszonym określona jest wzorem: $s(t) = at^2/2 + v_0t + s_0$, gdzie a – przyspieszenie, v_0 – prędkość początkowa, s_0 – droga w chwili $t = 0$. Pytamy zatem, jakiej chwili czasu t_0 będzie odpowiadała wysokość $s(t_0) = 0$. Mamy więc równanie:

$$s(t) = -5t^2 + 3t + 2 = 0,$$

skąd: $\Delta = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$, $t_1 = 1[s]$, $t_2 = -0.4[s]$. Tak więc piłka upadnie na podłogę po upływie 1 sekundy. (Czemu odpowiada drugi pierwiastek t_2?)

Pożyteczne są

Postaci funkcji kwadratowej:

- *Postać kanoniczna*: $y = a(x-p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{\Delta}{4a}$.
- *Postać iloczynowa:* Istnieje $\iff \Delta \geqslant 0$. Jeśli tak jest, to:
  - ⋆ $y = a(x - x_0)^2$ gdy $\Delta = 0$,
  - ⋆ $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ gdy $\Delta > 0$.

Wzory Viéte'a:

Gdy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma pierwiastki x_1, x_2, to zachodzą wzory (Viéte'a)

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{2a}, \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}$$

3.3 Funkcje wymierne – homografie

Def. Funkcję postaci: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, gdzie $c \neq 0$ oraz $ad - bc \neq 0$, nazywamy *homografią*. Dziedziną homografii jest $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Wykresem funkcji homograficznej jest *hiperbola*: wykres funkcji $y = \frac{1}{x}$ odpowiednio poprzesuwany: Napiszmy równanie funkcji homograficznej:

$$f(x) = \frac{a}{c}\frac{x + \frac{b}{a}}{x + \frac{d}{c}} = \dots = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{x + \frac{d}{c}}$$

Widać, iż ogólną homografię $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ powstaje ze 'standardowej' $y = \frac{1}{x}$ przez: i) przesunięcie pionowe o $y_0 = \frac{a}{c}$; ii) przesunięcie poziome o $x_0 = -\frac{d}{c}$; iii) przeskalowanie o czynnik $\frac{bc-ad}{c^2}$.

Prostą (poziomą) o równaniu $y = \frac{a}{c}$ nazywamy *asymptotą poziomą*; prostą (pionową) o równaniu $x = -\frac{d}{c}$ nazywamy *asymptotą poziomą*.

4 Funkcje trygonometryczne

4.1 Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym

RysTrojkata

Def. *Sinusem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przeciwprostokątnej:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Def. *cosinusem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przeciwprostokątnej:

$$\sin\alpha = \frac{b}{c}$$

Def. *Tangensem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi do przyprostokątnej przyległej do danego kąta:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Def. *Cotangensem* kąta ostrego w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek przyprostokątnej przyległej do danego kąta do przyprostokątnej przeciwległej danemu kątowi:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg}x}$$

Uwaga. Czasem, choć rzadko, używa się też funkcji *secans* i *cosecans*. Są one definiowane jako: $\sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$, $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$.

4.2 Miara łukowa kąta

Def. *1 radian* (1 rad) jest to miara kąta opartego na łuku, którego długość jest równa długości promienia okręgu.

Mamy więc proste wzory na zamianę miary kąta w stopniach α_s na miarę łukową α_r:

$$\alpha_r = \frac{\pi\alpha_s}{180}, \qquad \alpha_s = \frac{180\,\alpha_r}{\pi}$$

W szczególności: $180^o = \pi$ (rad); $90^o = \frac{\pi}{2}$; $60^o = \frac{\pi}{3}$; $30^o = \frac{\pi}{6}$ (podając kąt w mierze łukowej, często się już nie podaje że jest on mierzony w radianach).

4.3 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Mając zdefiniowane funkcje trygonometryczne dla dowolnego kąta $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}[$, łatwo rozszerzyć te definicje na dowolny inny kąt. Robi się to tak: Niech α będzie kątem skierowanymF.tryg.dow umieszczonym w ukł wsp. tak, że jego początkowe ramię pokrywa się z dodatnią półosią OX, a końcowym ramieniem jest półprosta o początku w punkcie $(0,0)$. Na końcowym ramieniu wybieramy dowolny punkt $P = (x, y)$, różny od punktu $(0,0)$.

Funkcje trygonometryczne kąta α definiujemy w sposób następujący:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r},$$

gdzie r jest odległością punktu P od punktu $(0,0)$, zaś $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{y}, \quad x \neq 0, \text{więc } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0, \text{więc } \alpha \neq k\pi, \ k \in \mathbf{Z}$$

4.3.1 Znaki funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych

:

"W pierwszej wszystkie są dodatnie,
W drugiej tylko sinus,
W trzeciej tangens i kotangens,
A w czwartej cosinus".

4.3.2 Wartości funkcji trygonometrycznych dla niektórych wartości kątów:

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	NI
$\operatorname{ctg}\alpha$	NI	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Tu wykresy funkcji trygon.

4.3.3 Parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych

- Funkcja $f(x) = \cos(x)$ jest *parzysta*: $\cos(-x) = \cos(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
- Funkcja $f(x) = \sin(x)$ jest *nieparzysta*: $\sin(-x) = \sin(x)\ \forall_{x\in\mathbb{R}}$
- Funkcja $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ jest *nieparzysta*: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)\ \forall_{x\in D_f}$
- Funkcja $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ jest *parzysta*: $\operatorname{ctg}(-x) = \operatorname{ctg}(x)\ \forall_{x\in D_f}$

4.3.4 Okresowość funkcji trygonometrycznych

- Okresem podstawowym funkcji $y = \sin x$ oraz $y = \cos x$ jest 2π: Zachodzi: $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ oraz $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ $\forall_{x\in\mathbb{R}}, \forall_{k\in\mathbb{Z}}$.
- Okresem podstawowym funkcji $y = \operatorname{tg} x$ oraz $y = \operatorname{ctg} x$ jest π: Zachodzi: $\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg}(x)$ oraz $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg}(x)$ $\forall_{x\in D_f}, \forall_{k\in\mathbb{Z}}$.

Częstość? Amplituda?

4.3.5 Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, tzn. tożsamości trygonometryczne

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}$ – jest to tzw. *jedynka trygonometryczna*;
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \ \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$;
- $\operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

Przy użyciu tych tożsamości trygonometrycznych można udowodnić wiele innych – zależnie od potrzeby.

4.3.6 Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi różnych kątów

Dla dowolnych kątów α, β zachodzą związki:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \sin\beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \sin\alpha\ \sin\beta$

Dow.

Wynikają z nich, po przyjęciu $\alpha = \beta$, związki na funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\ \cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{2}$$

oraz połówkowego kąta:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \tag{3}$$

4.3.7 Wzory redukcyjne na sprowadzanie kąta do pierwszej ćwiartki

Okresowość funkcji trygonometrycznych oraz wzory na sumę kątów pozwalają sprowadzić dowolny argument funkcji trygonometrycznej do I. ćwiartki.

Przykł.

$$\sin(270^o + \alpha) = \sin 270^o \cos\alpha + \cos 270^o \sin\alpha = -\cos\alpha;$$

$$\cos(180^o - \alpha) = \cos 180^o \cos(-al) - \sin 180^o \sin(-\alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$$

4.4 Funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych

Z uwagi na okresowość funkcji trygonometrycznych, *nie można* zdefiniować funkcji odwrotnych do nich dla *wszystkich* argumentów. Funkcję odwrotną do f można zdefiniować dla tych argumentów, dla których f jest wzajemnie jednoznaczna.

Weźmy funkcję $f(x) = \sin x$ (+ zbiory, pomiędzy którymi f działa). Patrząc na wykres $y = f(x) = \sin x$, widać, że $f : X \to Y$ jest funkcją wzajemnie jednoznaczną, jeśli za zbiór argumentów weźmiemy $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, zaś za zbiór wartości $Y = [-1, 1]$. Funkcję odwrotną $\sin^{-1}(\cdot)$ do funkcji $\sin(\cdot)$ nazywamy $\arcsin(\cdot)$ i definiujemy – zgodnie z definicją funkcji odwrotnej – jako: Jeśli $y = \sin(x)$, to $x = \sin^{-1}(y) = \arcsin(y)$.

Uwaga: Wzajemna jednoznaczność $\sin : X \to Y$ ma miejsce także w innych sytuacjach, np. $X_{ns} = [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $Y = [-1, 1]$, i zdefiniować funkcję $\arcsin_{ns} : [-1, 1] \to [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Standardowa umowa mówi, że za X bierze się $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ostatecznie (aby oswoić z różnymi notacjami):

Def. Dla funkcji $\sin(\cdot)$: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \overset{\sin}{\to} [-1, 1]$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\arcsin(\cdot)$: $[-1, 1] \overset{\arcsin}{\to} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ jako: Jeśli $y = \sin(x)$, to $x = \arcsin(y)$.

(więc np. $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}, \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$ itd.). Wykres funkcji $\arcsin$ – zgodnie z ogólną reguła uzyskiwania wykresów funkcji odwrotnych – otrzymuje się z wykresu $\sin$ przez zamianę osi lub równoważnie przez symetrię względem osi $y = x$. **Wykr.** $\sin$ i $\arcsin$

Dla innych funkcji trygonometrycznych funkcje odwrotne definiuje się jako:

Def. Dla funkcji $\cos(\cdot)$: $[-[0, \pi] \overset{\cos}{\to} [-1, 1]$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\arccos(\cdot)$: $[-1, 1] \overset{\arcsin}{\to} [0, \pi]$ jako: Jeśli $y = \cos(x)$, to $x = \arccos(y)$.

Def. Dla funkcji $\mathrm{tg}(\cdot)$: $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\overset{\mathrm{tg}}{\to}]-\infty, \infty[$ definiujemy odwrotną do niej funkcję $\mathrm{arctg}(\cdot)$: $]-\infty, \infty[\overset{\mathrm{arctg}}{\to}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ jako: Jeśli $y = \mathrm{tg}(x)$, to $x = \mathrm{arctg}(y)$.

4.4.1 Biegunowy układ współrzędnych

Punkt na płaszczyźnie można zaznaczyć, zadając *układ współrzędnych* i pisząc współrzędne punktu p w tym układzie (są to też *składowe wektora* $\vec{OP}$: Do wyznaczenia położenia **Rys.** punktu na płaszczyźnie można jednak użyć innego układu współrzędnych. Jeżeli zamiast (x, y) wprowadzimy r, ϕ przez

$$x = \cos\phi, \qquad y = \sin\phi$$

(lub na odwrót: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\phi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$), to jest to równie dobry układ współrzędnych co (x, y): Każdemu punktowi płaszczyzny odpowiada dokładnie jedna para liczb (r, ϕ) oraz na odwrót: Każdej parze (r, ϕ) odpowiada dokładnie jeden punkt płaszczyzny. (jest jeden WYJĄTEK: punkt $(0, 0)$, gdzie kąt ϕ nie jest określony).

Jedną z większych sztuk w matematyce (i fizyce) jest dobór odpowiedniego układu współrzędnych. Gdy się go odpowiednio (do zagadnienia) dobierze, to problem często znacznie się upraszcza lub nawet trywializuje.

Przykł. Równanie okręgu (o środku w $(0, 0)$ i promieniu R) ma we współrzędnych kartezjańskich postać

$$x^2 + y^2 = R^2$$

zaś we współrzędnych biegunowych

$$r = R, \qquad \phi - \text{dowolne}.$$

Przykł. Rozważmy krzywą (*kardioidę*)

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a(x^2 + y^2), \quad a > 0$$

Analiza we współrzędnych kartezjańskich, aczkolwiek możliwa, jest dość uciążliwa. We współrzędnych biegunowych badanie jest o wiele łatwiejsze i krzywą można narysować "od ręki".

$$r = a(1 + \cos\phi)$$

Przykł. Rozważmy krzywą (*lemniskata Bernoulliego*)

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2), \quad a > 0$$

Można ją wykreślić we współrzędnych kartezjańskich, aczkolwiek jest to dość pracochłonne. We współrzędnych biegunowych ma ona o wiele dogodniejszą do analizy postać

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\phi$$

Rys.

4.4.2 Twierdzenie cosinusów

Rozpatrzmy trójkąt o bokach długości a, b, c, gdzie kąt między bokami a i b wynosi α. Ma**Rys.** miejsce następujące uogólnienie twierdzenia Pitagorasa, zwane *twierdzeniem cosinusów*.

(cosinusów). Zachodzi:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

Dow.?

4.4.3 Twierdzenie sinusów

Rozpatrzmy trójkąt o bokach a, b, c oraz kątach: α – naprzeciw boku a (tzn. kąt pomiędzy bokami b i c); β – naprzeciw boku b; γ – naprzeciw boku c. Między długościami boków a, b, c a kątami α, β, γ zachodzą następujące związki, zwane *twierdzeniem sinusów*.

(sinusów). Zachodzą równości:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

gdzie R – promień okręgu opisanego na trójkącie.

Tu z grubsza powinien się kończyć wykład 3.

5 Wielomiany

Wielomianem jednej zmiennej (tu: rzeczywistej) nazywamy funkcję

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0, \quad \text{gdzie} a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Liczby $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ nazywamy ***współczynnikami*** wielomianu.

Jeśli $a_n \neq 0$, to liczbę n nazywamy ***stopniem wielomianu***: deg$W = n$. ("degree")

Jeśli $\forall_{x \in \mathbb{R}} W(x) = 0$, to wielomian nazywamy *zerowym*. Ma on wszystkie współczynniki równe zeru. Takiemu wielomianowi nie przypisujemy żadnego stopnia. (Można mu też przypisać stopień $-\infty$).

Def. Mówimy, że Dwa wielomiany $f(x)$, $g(x)$ zmiennej rzeczywistej są równe $\iff$ gdy przyjmują te same wartości dla *każdej* wartości zmiennej x: $f = g \iff \forall_{x \in \mathbb{R}} f(x) = g(x)$.

Mamy proste

Tw. Dwa wielomiany $f(x)$, $g(x)$ zmiennej rzeczywistej są równe (zapisujemy to: $f \equiv g$) wtedy i tylko wtedy gdy mają równe współczynniki przy tych samych potęgach zmiennej x.

Tw. (o dzieleniu wielomianów) Jeśli $f(x)$, $g(x)$ są wielomianami i $g(x)$ nie jest wielomianem zerowym, to istnieją takie wielomiany $q(x)$, $r(x)$, że $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, przy czym $\deg r < \deg g$. Wielomian $q(x)$ nazywamy *ilorazem* wielomianów f i g, zaś wielomian r – *resztą* z dzielenia f przez g.

Def. Jeśli $r(x) \equiv 0$, to mówimy, że wielomian f jest *podzielny* przez wielomian g.

Def. *Pierwiastkiem* wielomianu f nazywamy taką liczbę rzeczywistą x_0, że $W(x_0) = 0$.

Tw. Reszta z dzielenia wielomianu $W(x)$ przez dwumian $x - a$ jest równa $W(a)$.

Wniosek (Tw. Bézout). Liczba a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$.

Inna postać zapisu. Jeśli a jest pierwiastkiem wielomianu $W(x)$, to można go zapisać w postaci: $W(x) = p(x)(x - a)$, gdzie $p(x)$ jest wielomianem stopnia o 1 niższego niż $W(x)$.

Każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych można przedstawić w postaci iloczynu wielomianów stopnia co najwyżej drugiego.

Każdy wielomian n–tego stopnia ma co najwyżej n pierwiastków.

Każdy wielomian stopnia nieparzystego ma co najmniej jeden pierwiastek.

Def. Liczbę a nazywamy k–***krotnym*** (gdzie $k \in \mathbb{N}$) pierwiastkiem wielomianu $W(x)$ $\iff W(x)$ jest podzielny przez $(x - a)^k$, ale nie jest podzielny przez $(x - a)^{k+1}$. Liczbę k nazywamy ***krotnością*** pierwiastka.

6 Funkcje wymierne

Def. Funkcję: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $P(x), Q(x)$ są wielomianami i $Q(x) \not\equiv 0$, nazywamy ***funkcją wymierną***. Dziedziną D_f tej funkcji jest zbiór $D_f = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.

7 Funkcja wykładnicza i logarytmiczna

7.1 Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą definiuje się najsampierw dla wykładników naturalnych. Dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$ oraz $n \in Ndb$ można zapisać:

$$a^n = a \cdot a \ldots a \qquad (n \text{ razy}) \tag{4}$$

Stąd od razu wynika, że:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \tag{5}$$

oraz

$$(a^n)^m = a^{nm} \tag{6}$$

Przyjmujemy, że $a^0 = 1$.

Ujemną potęgę definiujemy rozszerzając zasadę (5) przez dopuszczenie, aby n, m były dowolnymi liczbami całkowitymi. Weźmy:

$$a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

skąd

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \tag{7}$$

(zakładamy tu, że $a \neq 0$). Stąd od razu mamy

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{8}$$

Definiujemy następnie potęgi *ułamkowe*. Tu zakładamy, że $a > 0$ (zaraz się okaże dlaczego). Oznaczmy: $b = a^{\frac{1}{n}}$. Mamy:

$$b^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$$

co znaczy, że $b = \sqrt[n]{a}$, czyli

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}. \tag{9}$$

Dowolną potęgę wymierną liczby a definiujemy teraz jako

$$a^{\frac{p}{n}} = (\sqrt[n]{a})^p \tag{10}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}, p \in Zdb$.

Mamy też: Jeśli $a > 1$ i $b > 0$, to $a^b > 1$ i, w konsekwencji, jeśli $c_1 > c_2$, to $a^{c_1} > a^{c_2}$. (Dla $a < 1$ znaki trzeba odwrócić). To pozwala przez ciągłość zdefiniować a^b dla dowolnych $a > 0$ i $b \in \mathbb{R}$. Widać też, że funkcja wykładnicza jest *monotoniczna* (rosnąca dla $a > 1$ i malejąca dla $a < 1$).

Wykresy funkcji wykładniczej dla $a > 1$ i $a < 1$ wyglądają tak: **Rys.**

Jako że funkcja wykładnicza $f(x) = a^x$ jest rosnąca (weźmy, dla ustalenia uwagi, $a > 1$) w całej swojej dziedzinie, (dziedziną jest $\mathbb{R}$ a zbiorem wartości $\mathbb{R}_+$) to istnieje funkcja do niej odwrotna. Zwiemy ją *logarytmem*.

7.2 Funkcja logarytmiczna

Zakładamy, że $a > 0$, $a \neq 1$.

Def. Dla danych a oraz y, jeśli x jest takie, że $a^x = y$, to x nazywamy *logarytmem* o podstawie a z y i oznaczamy: $x = \log_a y$. Dziedziną logarytmu jest $\mathbb{R}_+$, a zbiorem wartości $\mathbb{R}$.

Własności (5) odpowiada:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad \text{oraz} \quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \tag{11}$$

a własności (6):

$$\log_a(b^c) = c \log_a b \tag{12}$$

W szczególności

$$\log_a(\sqrt[n]{b}) = \frac{1}{n} \log_a b \tag{13}$$

8 Zasada indukcji matematycznej

Zbiór liczb naturalnych posiada bardzo ważną własność, której często się używa w dowodach. Mówi ona że:

Niech będzie dana jakaś własność liczb naturalnych (nazwijmy ją *tezą indukcyjną* T_n, która spełnia następujące warunki:

1. Liczba 1 posiada tę własność (tzn. teza T_1 jest prawdziwa),
2. Jeśli liczba n posiada tę własność, to posiada ją również liczba $n+1$ (tzn. prawdziwa jest implikacja: $T_n \Longrightarrow T_{n+1}$).

Zasada indukcji oznacza, że przy powyższych założeniach, *każda* liczba naturalna posiada tę własność (tzn. teza T_n jest prawdziwa dla każdej $n \in \mathbb{N}$).

Zasada indukcji odpowiada następującej intuicji: Jeśli prawdziwa jest teza T_1, to – na mocy 2) – prawdziwa jest również teza T_2. Skoro tak, to z 2) prawdziwa jest również teza T_3, i znów używając 2) prawdziwa jest teza T_4 itd.

Przykł. *Nierówność Bernoulliego*: Mówi ona, że:

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby rzeczywistej $a \geqslant 1$ zachodzi wzór

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \tag{14}$$

Dow.

1. Sprawdzamy prawdziwość tezy T_1, tzn. czy nierówność jest prawdziwa dla $n = 1$. Mamy: $1 + a \geqslant 1 + a$ czyli ok.
2. Sprawdzamy prawdziwość implikacji $T_n \Longrightarrow T_{n+1}$. Zapiszmy prawą stronę T_{n+1}:

   $$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geqslant \| \text{korzystamy z założenia o prawdziwości } T_n \ldots$$

   $$\ldots \text{ oraz że } (1+a) \geqslant 0 \| \geqslant (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a$$

   czyli, zakładając prawdziwósć tezy T_n, otrzymaliśmy prawdziwość tezy T_{n+1}. Z zasady indukcji wynika więc, że teza T_n jest prawdziwa dla każej $n \in \mathbb{N}$ – tzn. że nierówność (14) jest prawdziwa $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Przykł. *Dwumian Newtona.* Najsampierw jednak zdefiniujemy (a dla tych, co znają, przypomnimy) symbol *silnia*: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n$, (przyjmujemy też, że $0! = 1$), a następnie *współczynniki Newtona*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} \tag{15}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{16}$$

zakładamy, że n i k są to liczby naturalne, oraz $n \geqslant k$. Mamy:

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1.$$

Pokażemy teraz, że $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$, $n \geqslant k$ zachodzi

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Liczymy bezpośrednio:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (k-1)} \cdot \frac{k}{k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1+k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot k} = \binom{n+1}{k}.$$

Teraz przystępujemy do udowodnienia *wzoru dwumiennego Newtona*:
$\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n} b^n. \tag{17}$$

Uwaga. Dla $n = 1$ wzór (17) jest oczywisty. Dla $n = 2$ i $n = 3$ wzór wzór (17) powinien być znany ze szkoły średniej (a jeśli nie jest, niech Czytelnik sprawdzi, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Tak więc, zgodnie ze schematem dowodu indukcyjnego:

1. teza T_1 jest prawdziwa.

2. Aby pokazać wynikanie $T_n \Longrightarrow T_{n+1}$, weźmy prawą stronę równości (17) dla $n+1$. Mamy:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = (a+b)^n a + (a+b)^n b,$$

i korzystając teraz z założenia o prawdziwości T_n, mamy

$$(a+b)^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \binom{n}{2} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \cdots + \binom{n}{n} a b^n +$$

$$+ a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + \cdots + \binom{n+1}{n} a b^n + b^{n+1} =$$

$$= a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \cdots + \binom{n+1}{n} ab^n + b^{n+1},$$

a jest to właśnie lewa strona równości (17) dla $n+1$. Zatem, możemy zakończyć dowód mówiąc, że

3. Równość (17) jest prawdziwa dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga. Wzór na dwumian Newtona daje się zapisać o wiele krócej używając symbolu *sumy*:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{18}$$

Tu symbol: $\sum_{k=0}^{n} A_k$ oznacza, że należy utworzyć sumę $n+1$ składników, które powstają z wyrażenia A_k przez podstawianie na miejsce k kolejno liczb $0, 1, 2, \ldots, n$.

Przykł. (startuje się od $n_0 > 1$) $2^n > n^2 \forall n > 4$

Przykł. (używa się tezy T_n i T_{n-1} aby pokazać prawdziwość T_{n+1}) Ciąg Fibonacciego.