

# Zadania domowe z Matematyki II

Seria I - liczby zespolone

04 Marca 2010

1. Wyznacz
  - a)  $Re \frac{1+17i}{1+2i}$ ,    b)  $Im \left[ \frac{(3+i)^2}{1+i} + 8i \right]$ ,    c)  $|2\sqrt{10} + \frac{6}{(1-i)^2}|$
2. Zapisz w postaci trygonometrycznej liczby
  - a)  $-7$ ,    b)  $-1 - i$ ,    c)  $\frac{1}{\sqrt{3+i}}$ ,    d)  $\frac{1+it}{1-it}$ ,     $t \in \mathbb{R}$ ,
  - e)  $1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ ,     $\alpha \in [-\pi, \pi]$ ,
3. Znajdź wszystkie zespolone rozwiązania równań
  - a)  $z^2 + i = 0$ ,    b)  $z^2 + iz + 2 = 0$ ,    c)  $z^2 + 2z + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$ ,
  - d)  $z^2 - (1+i)z - 4 + 8i = 0$ ,    e)  $z^5 - z^4 + z^3 - z^2 + z - 1 = 0$ ,
  - f)  $z^3 = -2 + 2i$ ,    g)  $z^6 = -1$ ,    h)  $z^{12} = 1$
4. Rozłóż wielomian  $w(x) = x^6 - 1$  na iloczyn wielomianów o współczynnikach rzeczywistych stopnia możliwie najniższego.
5. Posługując się postacią wykładniczą liczb zespolonych wyprowadź wzory
  - a)  $\sum_{k=1}^n \sin[(2k-1)\phi] = \frac{1 - \cos(2n\phi)}{2 \sin \phi}$ ,     $\sin \phi \neq 0$
  - b)  $\sum_{k=1}^n \cos^2(k\phi) = \frac{n}{2} + \frac{\cos[(n+1)\phi] \sin(n\phi)}{2 \sin \phi}$ ,     $\sin \phi \neq 0$
  - c)  $\frac{\cos(5\phi)}{\cos^5 \phi} = 1 - 10 \operatorname{tg}^2 \phi + 5 \operatorname{tg}^4 \phi$
6. Wyznacz
  - a)  $|(3+4i)^{77}|$ ,    b)  $\operatorname{Arg}[(1+i)^{99}]$ ,    c)  $\arg(1 + \sqrt{3}i)$
7. Wyznacz i narysuj zbiory
  - a)  $\{z \in \mathbb{C} : |\frac{z-3}{z+i}| > 1\}$ ,    b)  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left( \frac{z-1}{z(z+1)} \right) > 0\}$ ,
  - c)  $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) < \frac{\pi}{4}\}$

## Rozwiązania

- a), b), c) 7
- a)  $7(\cos \pi + i \sin \pi)$ , b)  $\sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$ , c)  $\frac{1}{2}(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$ ,  
d)  $\cos(2\operatorname{arctg} t) + i \sin(2\operatorname{arctg} t)$ , e)  $2 \cos \frac{\alpha}{2}(\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$
- a)  $\pm(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i)$ , b)  $\{-2i, i\}$ , c)  $\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ ,  
d)  $\{3 - i, -2 + 2i\}$ , e)  $\{1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i\}$ ,  
f)  $\{\sqrt{2}(1 + i), \frac{1}{2}(-\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} - 1)), \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - i(\sqrt{3} + 1))\}$   
g)  $\{\pm i, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\}$ , h)  $\{\pm 1, \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i\}$
- $w(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$
- Zajrzeć do zeszytu (swojego lub koleżanki)
- a)  $5^{77}$ , b)  $\frac{3}{4}\pi$ , c)  $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$