

Zadania domowe z Matematyki II

Seria II - Całka Riemanna

10 Marca 2010

1. a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$, b) $\int_0^{\pi} e^{3x} \cos(7x) dx$, c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^6 - 1} dx$,
d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, e) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$, f) $\int_3^5 \sqrt{x^2 - 1} dx$,
g) $\int_0^{\infty} \frac{x}{\exp(ax^2) + 1} dx$, $a \in \mathbb{R}_+$ h) $\int_1^{e^{-\frac{1}{n}}} \frac{\ln x}{x^{(n+1)}} dx$, $n \in \mathbb{N}$
2. Znajdź pole figury ograniczonej krzywymi
a) $y = x^2 \cos x$, $x \in [-\pi, \pi]$, $y = 0$, b) $y = x^4 - 1$, $y = -x^2 + 1$
c) $y = (x+1)e^x$, $y = x^2 e^{-x}$ i $y = 2$
3. Znajdź objętość torusa powstającego w wyniku obrotu okręgu
$$x^2 + (y - R)^2 = r^2$$
wokół osi OX ($0 < r < R$).
4. Znajdź długość jednego łuku cykloidy tzn. długość krzywej zadanej parametrycznie przez
$$x(\theta) = R(\theta - \sin \theta), \quad y(\theta) = R(1 - \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$
5. Oblicz $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$
6. Czy zbieżna jest całka?
a) $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^4} dx$, b) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{\sqrt{x^3}} dx$, c) $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^9+x^3+1}} dx$

Rozwiązania

1. a) π , b) $-\frac{3}{58}(e^{3\pi} + 1)$, c) $-\frac{1}{12} \ln 21 - \frac{1}{6}\sqrt{3} \arctan(\frac{2}{3}\sqrt{3})$, d) π ,
e) $\frac{\pi}{2}$, f) $10 - \frac{9}{2} \ln 3$, g) $\frac{1}{2a} \ln 2$, h) $\frac{1}{n^2}$,
2. a) $\pi^2 + 4\pi - 8$ b) $\frac{44}{15}$ c) $2e^2 + 10e^{-2} - 2$
3. $2\pi^2 Rr^2$
4. $8R$
5. $\frac{2}{3}\pi$
6. a) nie, b) tak, c) tak.