

Matematyka II: Zadania przed 3. terminem

Są tu niektóre zadania z egzaminu z rozwiązaniami i trochę dodatkowych

1. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

Odp. Jedno minimum (w p. $(0, 0)$), dwa maksima w punktach $(0, \pm 1)$, i jeszcze dwa punkty siodłowe (to oczywiście nie ekstrema) w punktach $(\pm 1, 0)$.

Rozw. Punkty stacjonarne (lub: krytyczne, lub: podejrzane o ekstremum) liczymy z warunków zerowania się pochodnych cząstkowych f . Mamy:

$$f_x = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \implies x(1 - x^2 - 2y^2) = 0 \implies x = 0 \text{ lub } x^2 + 2y^2 = 1;$$

$$f_y = (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)} = 0 \implies y(2 - x^2 - 2y^2) = 0 \implies y = 0 \text{ lub } x^2 + 2y^2 = 2.$$

skąd otrzymujemy cztery możliwe układy równań:

$$I : x = 0, y = 0; \quad II : x = 0, x^2 + 2y^2 = 2; \quad III : x^2 + 2y^2 = 1, y = 0;$$

$$IV : x^2 + 2y^2 = 1, x^2 + 2y^2 = 2$$

które mają rozwiązania:

$$I : (0, 0); \quad II : (\pm 1, 0); \quad III : (0, \pm 1);$$

(IV daje układ sprzeczny – dlaczego?).

Aby znaleźć ekstrema, należy obliczyć macierz drugich pochodnych D^2f w tych punktach i zbadać, czy jest dodatnio lub ujemnie określona. Mamy:

$$f_{xx} = (2 - 10x^2 - 4y^2 + 4x^4 + 8x^2y^2)e^{-(x^2+y^2)};$$

$$f_{xy} = f_{yx} = (-12xy + 4x^3y + 8y^3x)e^{-(x^2+y^2)};$$

$$f_{yy} = (4 - 2x^2 - 16y^2 + 4x^2y^2 + 8y^4)e^{-(x^2+y^2)}.$$

W punktach krytycznych mamy:

(a) I: $D^2f_I = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ - jest dodatnio określona (dlaczego?) – MINIMUM.

(b) II: $D^2f_{II} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix}$ - jest ujemnie określona (dlaczego?) – MAKSYMUM.

(c) III: $D^2f_{III} = \frac{1}{e} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ - nie jest określona ani dodatnio ani ujemnie – SIO-DŁO.

2. Znaleźć najmniejszą i największą wartość funkcji:

$$f(x, y) = x + 2y$$

w kole K : $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Rozw. Szukamy najspierw *wewnątrz* koła punktów *stacjonarnych* (zwanym też *krytycznymi*, bądź *podjezranymi o ekstrema*). W tym celu liczymy pochodne cząstkowe funkcji f :

$$f_x = 1, \quad f_y = 2$$

i przyrównujemy do zera. Widać, że *zawsze* pochodne cząstkowe są różne (tu: większe) od zera, tak więc *wewnątrz koła nie ma ekstremów*.

Wobec tego, szukamy wartości największych *na brzegu*, tzn. na okręgu $x^2 + y^2 = 1$. A to jest problem podpadający pod *metodę mnożników Lagrange'a*, bo szukamy ekstremów funkcji f przy warunku $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Tworzymy więc funkcję $F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ (gdzie λ – mnożnik Lagrange'a), liczymy jej pochodne i przyrównujemy do zera. W ten sposób dostajemy równania:

$$F_x = 1 + 2\lambda x = 0, \quad F_y = 2 + 2\lambda y = 0. \quad (1)$$

Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając do drugiego, dostaniemy

$$2\lambda(-2x + y) = 0,$$

skąd $\lambda = 0$ lub $y = 2x$. Pierwsza możliwość nie może zachodzić, gdyż po wstawieniu $\lambda = 0$ do równań (1) dostalibyśmy $1 = 0, 2 = 0$, czyli sprzeczność. Pozostaje więc możliwość $y = 2x$. Pamiętajmy, że mamy jeszcze równanie więzu $x^2 + y^2 = 1$; po wstawieniu tam otrzymanej równości $y = 2x$ dostajemy:

$$5x^2 = 1 \implies x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

i, ponieważ $y = 2x$, otrzymujemy dwa punkty p_1, p_2 podejrzane o ekstrema:

$$p_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right); \quad p_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right).$$

Można teraz zbadać, czy p_1, p_2 są ekstremami przez: 1) wyliczenie *drugiej pochodnej*, albo 2) skorzystanie z twierdzenia, że *funkcja ciągła na zbiorze zwartym osiąga swoje kresy*, wobec czego, jeśli ma punkty krytyczne, to w nich przyjmuje wartości największe i najmniejsze. Tu zbiorem jest okrąg, więc zbiór zwarty (domknięty i ograniczony). Wartości funkcji w punktach p_1, p_2 są:

$$f|_{p_1} = \sqrt{5}, \quad f|_{p_2} = -\sqrt{5},$$

wobec czego, w p_1 funkcja osiąga maksimum na okręgu (a więc jest to też wartość największa na całym kole K), a w p_2 funkcja osiąga minimum na okręgu (a więc jest to też wartość najmniejsza na całym kole K).

3. Znaleźć ogólne rozwiązania $y(t)$ równań różniczkowych:

(a) $y'' + y' - 6y = 0,$

(b) $y'' + y' - 6y = 2te^{-t}.$

Rozw.

- (a) RORJ: Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$ ma pierwiastki: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$. Stąd Rozwiązanie Ogólne Równania Jednorodnego $y_{OJ} = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{3t}$.
- (b) RSRN: Niejednorodność jest 'zgadywalna', jako że jest postaci wielomian (tu: pierwszego stopnia) razy eksponens. Wykładnik w eksponensie wyrazu niejednorodnego nie pokrywa się z żadną z wartości własnych równania charakterystycznego. Przewidujemy więc rozwiązanie w postaci: (wielomian 1. stopnia) $\times e^{-t}$, czyli Rozwiązanie Szczególne Równania Niejednorodnego $y_{SN} = (A + Bt)e^{-t}$. Wstawiając tę postać do równania niejednorodnego, dostajemy: $(-2B + A)e^{-t} + Ate^{-t} = 2te^{-t}$. Równanie to musi być spełnione tożsamościowo dla każdego t , skąd mamy: $-2B + A = 0$ (współczynnik przy e^{-t}), $B = 2$ (współczynnik przy te^{-t}). Znajdujemy stąd współczynniki: $A = 4$, $B = 2$, czyli

$$y_{SN} = (4 + 2t)e^{-t}$$

Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego y_{ON} jest sumą powyższych wyrażeń:

$$y_{ON} = y_{SN} + y_{OJ}.$$

4. Znaleźć wartości własne i wektory własne operatora danego macierzą A :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Rozw.

- (a) *wartości własne*: Liczymy wielomian charakterystyczny macierzy:

$$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} (5 - \lambda) & -1 & -1 \\ -1 & (5 - \lambda) & -1 \\ -1 & -1 & (5 - \lambda) \end{bmatrix} = (5 - \lambda)^3 - 3(5 - \lambda) - 2$$

Widać, że warto podstawić $t = 5 - \lambda$, co daje $w_A(t) = t^3 - 3t - 2$. Wartości własne A są pierwiastkami równania charakterystycznego. Zauważamy, że jednym z pierwiastków równania charakterystycznego jest $t_1 = -1$ (Jeśli w zadaniu kolokwialnym pojawi się równanie trzeciego stopnia, to z bardzo wysokim prawdopodobieństwem jednym z pierwiastków jest niewielka liczba całkowita. Chyba że układający zadanie jest złośliwy albo się pomyli.). Stąd mamy: $w_A(t) = (t + 1)^2(t - 2)$, którego pierwiastki są: $t_1 = -1$ (podwójny), $t_2 = 2$. W przeliczeniu na lambdy: $\lambda_1 = 5 - t_1 = 6$, $\lambda_2 = 5 - t_2 = 3$.

- (b) *Wektory własne*:

- i. v_1 jest wektorem spełniającym równanie: $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Niech $v_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

Wstawiając tę postać do równania $Av_1 = \lambda_1 v_1$, gdzie $\lambda_1 = 6$, dostajemy układ równań na składowe wektora v_1 : $\alpha + \beta + \gamma = 0$ (trzy razy to samo, więc nie przepisujemy dwu pozostałych równań, bo są identyczne). Jedną

ze składowych (np. α) możemy więc wyrazić jako funkcje pozostałych: $\alpha = -\beta - \gamma$, co daje postać wektora własnego:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -\beta - \gamma \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie β, γ są dowolnymi liczbami. Innymi słowy, zbiór wektorów własnych tworzy tu dwuwymiarową przestrzeń wektorową, rozpinaną przez wektory $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

ii. v_2 jest wektorem spełniającym równanie: $Av_2 = \lambda_2 v_2$. Niech $v_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$.

Wstawiając tę postać do równania $Av_2 = \lambda_2 v_2$, gdzie $\lambda_2 = 3$, dostajemy układ równań na składowe wektora v_2 :

$$\begin{cases} 2\alpha & -\beta & -\gamma & = & 0 \\ -\alpha & +2\beta & -\gamma & = & 0 \\ -\alpha & -\beta & +2\gamma & = & 0 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ, dostając na współczynniki: $\beta = \gamma$, $\alpha = \gamma$, czyli v_2 jest

$$v_2 = \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

gdzie γ jest dowolną liczbą. Innymi słowy, zbiór wektorów własnych tworzy

tu jednowymiarową przestrzeń wektorową, rozpinaną przez wektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

5. W zależności od parametru p znaleźć rozwiązanie(-a) układu równań:

$$\begin{bmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozw. Korzystamy z wzorów Cramera. Liczymy wyznaczniki:

$$W = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = (p-1)^2(p+2); \quad W_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = (p-1)^2;$$

$$W_y = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & p \end{vmatrix} = (p-1)^2; \quad W_z = \begin{vmatrix} p & 1 & 1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (p-1)^2.$$

Mamy trzy możliwe sytuacje:

- (a) Gdy $W \neq 0$, tzn. $p \neq 1$ i $p \neq -2$, to układ ma jednoznaczne rozwiązanie dane przez wzory Cramera:

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{1}{p+2}; \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{1}{p+2}; \quad z = \frac{W_z}{W} = \frac{1}{p+2}.$$

- (b) Gdy $p = -2$, to $W = 0$, zaś pozostałe wyznaczniki są różne od zera – układ jest *sprzeczny*.
- (c) Gdy $p = 1$, to wszystkie wyznaczniki są równe zeru. Układ przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Wszystkie równania są takie same, wystarczy więc napisać: $x + y + z = 1$ i można wyrazić jedną ze zmiennych (np. z) jako funkcję x i y : $z = 1 - x - y$, gdzie x, y są dowolne. Jest tu więc *nieskończenie wiele* rozwiązań – tworzą one dwuparametrową rodzinę.

Często wygodne jest równoważne zapisanie rozwiązania w postaci wektorowej. Uzupełniając powyższe wyrażenie na z dwoma tautologicznymi równaniami: $x = x$, $y = y$, możemy zapisać

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$