

ALGEBRA, przestrzenie wektorowe

Zadanie 1

Zbadać czy wektor $\mathbf{v}$ można przedstawić jako kombinację liniową wektorów $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$, gdzie

$$i) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Odp. $i)$ tak: $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$, $ii)$ nie.

Zadanie 2

Czy wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1+2i \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 7-i \\ 3+i \end{bmatrix},$$

są liniowo zależne? Zbadać sprawę nad ciałem R^1 i nad ciałem C^1 .

Odp. Pytamy, czy równanie

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 = 0,$$

ma rozwiązanie dla $x_i \in R^1$, gdy nad R^1 oraz $x_i \in C^1$ gdy nad C^1 . Rozwiążmy:

$$x_1(1+2i) + x_2(7-i) = 0,$$

$$x_1i + x_2(3+i) = 0,$$

Z drugiego $x_1 = (-1+3i)x_2$ i to do pierwszego, co da: $[(1+2i)(-1+3i) + 7-i]x_2 = 0$. To istotnie jest zero. Rozwiązaniem są więc dowolne x_2 i $x_1 = (-1+3i)x_2$. Widać jednak, że jeśli $x_2 \in R^1$ to x_2 jest zespolone. Zatem nad R^1 wektory $\mathbf{w}_1$ i $\mathbf{w}_2$ są liniowo niezależne, a nad C^1 zależne.

Zadanie 3

Zbadać liniową niezależność nad ciałem R^1 i nad C^1 wektorów

$$i) \quad \mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

oraz

$$ii) \quad \mathbf{f}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Odp.: W przypadku *i*) widać gołym okiem, że są liniowo zależne nad R^1 bo równanie $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 + \lambda_4 \mathbf{e}_4 = 0$ ma rozwiązanie $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda$, $\lambda_3 = -2\lambda$ dla dowolnego λ , a skoro są liniowo zależne nad R^1 to i nad C^1 też, bo $R^1 \subset C^1$. W przypadku *ii*) rozwiązujemy równanie $\xi_1 \mathbf{f}_1 + \xi_2 \mathbf{f}_2 + \xi_3 \mathbf{f}_3 = 0$, czyli układ

$$\begin{aligned} \xi_2 + i\xi_3 &= 0, \\ \xi_1 + i\xi_2 + \xi_3 &= 0, \\ 2\xi_1 - i\xi_2 + \xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dodając pierwsze pomnożone przez i do trzeciego dostajemy $\xi_1 = 0$. Uwzględniając to z drugiego dodanego do trzeciego znajdujemy $2\xi_3 = 0$ czyli $\xi_3 = 0$ i wtedy (z pierwszego) $\xi_2 = 0$ też. Zatem wektory $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ są liniowo niezależne nad obydwoma ciałami.

Zadanie 4

Dowieść, że wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ i \\ -i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2i \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

są liniowo zależne.

Odp.: Rozwiązujemy równanie $x_1 \mathbf{w}_1 + x_2 \mathbf{w}_2 + x_3 \mathbf{w}_3 = 0$, czyli układ

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2ix_2 + x_3 &= 0, \\ ix_1 - x_2 + 2x_3 &= 0, \\ -ix_1 + x_2 + 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dodanie drugiego do trzeciego daje $x_3 = 0$. Wtedy pierwsze sprowadza się do $x_1 + ix_2 = 0$, a drugie do $ix_1 - x_2 = 0$, czyli do pierwszego pomnożonego przez i . Zatem szukanym rozwiązaniem jest $x_2 = ix_1$, $x_3 = 0$ i x_1 dowolne. Ponieważ albo x_1 albo x_2 jest zespolone (albo nawet oba) to wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ oraz $\mathbf{w}_3$ są liniowo zależne nad C^1 , ale nie nad R^1 .

Zadanie 5

Dowieść, że jeśli wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ oraz $\mathbf{e}_3$ są liniowo niezależne (nad R^1 lub C^1) to takimiż są wektory

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{f}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{f}_3 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Odp.: Jak zwykle pytamy, czy z faktu, że $\lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 = 0$ wynika, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Wiemy teraz także, iż równanie $\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + \xi_3 \mathbf{e}_3 = 0$ ma tylko rozwiązanie $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$. Piszemy więc:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 \mathbf{f}_1 + \lambda_2 \mathbf{f}_2 + \lambda_3 \mathbf{f}_3 = \lambda_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + \lambda_2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \lambda_3(\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{e}_1 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{e}_2 + (\lambda_1 + \lambda_3)\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Zatem na mocy założenia musimy mieć $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$. Drugie z pierwszym daje $\lambda_3 = 0$, wtedy trzecie daje $\lambda_1 = 0$ i na koniec z drugiego wynika wtedy że i $\lambda_2 = 0$.

Zadanie 6

Dowieść, że następujące zbiory wektorów-funkcji (tj. wektorów z przestrzeni $V = \text{Map}(R^1, R^1)$) są liniowo niezależne

- a) $\sin x, \quad \cos x,$
- b) $1, \quad \sin x, \quad \cos x,$
- c) $\sin x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \sin nx$
- d) $1, \quad \cos x, \quad \cos 2x, \quad \dots, \quad \cos nx$
- e) $1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \cos nx, \quad \sin nx.$

Odp.: W przypadku a) jest jasne, że $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ może dla wszystkich $x \in (a, b) \subset R^1$ zachodzić tylko dla $\lambda = \xi = 0$: jeśli $x = k\pi$ i $x = l\pi + \frac{1}{2}\pi$ należą do (a, b) to jest to trywialne, jeśli nie, to można zróżniczkować i ma się $\lambda \cos x - \xi \sin x = 0$ oraz $\lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ i znów jedynym rozwiązaniem obu dla wszystkich x -ów jest $\lambda = 0, \xi = 0$. To samo w przypadku b): $\eta + \lambda \sin x + \xi \cos x = 0$ dla wszystkich $x \in (a, b) \subset R^1$ też wymaga $\eta = \lambda = \xi = 0$. W przypadku c) możemy posłużyć się indukcją. Zakładamy, że wektory te są liniowo niezależne dla jakiegoś n (dla $n = 1$ jest to oczywiste) i sprawdzamy, czy z tego wynika to samo dla $n + 1$, to znaczy, że

$$f(x) \equiv \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \sin 2x + \dots + \lambda_n \sin nx + \lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0,$$

(symbol $\equiv$ przypomina, że ma to być 0 dla wszystkich x) tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Skoro ma to zachodzić dla wszystkich x to znaczy że i

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) \equiv -\lambda_1 \sin x - 2^2 \lambda_2 \sin 2x + \dots - n^2 \lambda_n \sin nx - (n+1)^2 \lambda_{n+1} \sin(n+1)x \equiv 0.$$

Mnożymy $f(x)$ przez $(n+1)^2$ i dodajemy do tego tu wyżej, co da

$$[(n+1)^2 - 1]\lambda_1 \sin x + [(n+1)^2 - 4]\lambda_2 \sin 2x + \dots + [(n+1)^2 - n^2]\lambda_n \sin nx \equiv 0,$$

To zaś na mocy założenia o liniowej niezależności wektorów $\sin x, \quad \sin 2x, \quad \dots, \quad \sin nx$ oznacza, że $[(n+1)^2 - 1]\lambda_1 = [(n+1)^2 - 4]\lambda_2 = \dots = [(n+1)^2 - n^2]\lambda_n = 0$. Stąd zeru muszą być wszystkie λ_i o $i = 1, \dots, n$ z wyjątkiem ewentualnie k -tej, o takim k ,

że $(n+1)^2 - k^2 = 0$. Ale to się nie może zdarzyć, bo w indukcji rozpatrujemy tylko $n+1 > k$. Zatem $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$ i z tożsamościowego znikania $f(x)$ wynika, iż także $\lambda_{n+1} = 0$. W przypadku *d*) także posługujemy się indukcją. Zakładamy, że teza (liniowa niezależność) jest prawdziwa dla n mamy pokazać, że

$$g(x) \equiv \eta + \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos 2x + \dots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x \equiv 0 ,$$

pociąga za sobą $\eta = \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \lambda_{n+1} = 0$. Mnożymy $g(x)$ przez $(n+1)^2$ i odejmujemy od tego dwakroć zróżniczkowane $g(x) = 0$. Jak wyżej wynika stąd, że $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots \lambda_n = 0$ i zostaje nam w $g(x) = 0$ tylko $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x = 0$, co znów wymaga by $\eta = \lambda_{n+1} = 0$. Wreszcie w przypadku *e*) także zakładamy, że $\eta + \lambda_1 \cos x + \xi_1 \sin x + \lambda_n \cos nx + \xi_n \sin nx = 0$ tylko dla $\eta = \lambda_1 = \xi_1 = \dots = \lambda_n = \xi_n = 0$ i robimy dla $n+1$ sztuczkę z drugą pochodną co zostawia nam $\eta + \lambda_{n+1} \cos(n+1)x + \xi_{n+1} \sin(n+1)x = 0$. To też wymaga, by $\eta = \lambda_{n+1} = \xi_{n+1} = 0$ (choćby na mocy tego, że teza jest prawdziwa dla $n = 1$, a czymże się różni x od $(n+1)x$? - tylko dziedziną...)

Zadanie 7

Dowieść, że wektory

$$\mathbf{f}_1 = \sin x, \quad \mathbf{f}_2 = \sin^3 x, \quad \mathbf{f}_3 = \sin 3x ,$$

z przestrzeni wektorowej $V = \text{Map}(R^1, R^1)$ są liniowo zależne.

Odp.: To proste (można dać do domu)

$$\begin{aligned} \sin 3x &= \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \sin x \cos 2x \\ &= 2 \sin x \cos^2 x + \sin x(1 - 2 \sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x . \end{aligned}$$

Czyli $\mathbf{f}_3 = 3\mathbf{f}_1 - 4\mathbf{f}_2$, co dowodzi, że $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ są liniowo zależne.

Zadanie 8

Dowieść, że wektory

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} , \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} ,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej R^3 .

Odp.: Trzeba pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{w}$ można przedstawić jako kombinację liniową tych trzech, tj. w postaci $x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = \mathbf{w}$. Niech $\mathbf{w} = [a, b, c]$. Trzeba pokazać, że układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= a, & 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b, & 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= c, & 2x_1 + 4x_2 &= a - b + c \end{aligned}$$

ma rozwiązanie. Mnożąc pierwsze równanie przez -2 i dodając je do trzeciego

$$\begin{aligned} 2x_2 + 4x_3 &= a + b - c \\ 4x_1 + 2x_3 &= -a + b + c \\ 2x_1 - 8x_3 &= -a - 3b + 3c \end{aligned}$$

Teraz trzecie razy -2 i dodać do drugiego. Otrzymujemy $18x_3 = a + 7b - 5c$. Czyli mamy x_3 . W podobny sposób można znaleźć $18x_1 = -5a + b + 7c$ oraz $18x_2 = 7a - 5b + c$ (symetria równań!). Łatwo sprawdzić, że to dobry wynik. Skoro jest rozwiązanie dla dowolnego wektora $\mathbf{w}$ to $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ tworzą bazę.

Zadanie 9

Znaleźć wymiar i jakąś bazę podprzestrzeni wektorowej $E \subset R^4$ rozpinanej przez wektory $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_5$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix},$$

Odp.: Ponieważ R^4 ma wymiar 4, zatem przynajmniej jeden z tych wektorów musi być liniowo zależny od pozostałych. Odrzucimy ostatni (bo ma brzydkie liczby). Aby zobaczyć, czy pierwsze cztery są liniowo zależne spróbujemy zapisać czwarty jako kombinację liniową trzech pierwszych, tj. jako $\mathbf{v}_4 = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3$. To daje układ równań

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= -1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= -1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Weźmy trzy pierwsze na razie. Odjąć od trzeciego pierwsze. To da $x_2 = 4x_3$. Wstawiamy to do dwu pierwszych i mamy układ (ten prof. Zybertowicza, ale widać komputer do tego niepotrzebny - układy są zawsze i wszędzie)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 15x_3 &= -1, \\ x_1 + 11x_3 &= 1. \end{aligned}$$

To łatwo rozwiązać (drugie razy dwa i odjąć od pierwszego). Stąd mamy jako rozwiązanie układu trzech pierwszych równań

$$x_1 = \frac{-26}{7}, \quad x_2 = \frac{12}{7}, \quad x_3 = \frac{3}{7}.$$

Teraz możemy sprawdzić ostatnie

$$\frac{-26}{7} + 2 \cdot \frac{12}{7} + 3 \cdot \frac{3}{7} = -1.$$

Cztery równania na trzy zmienne - trzeba mieć cholerne szczęście żeby się udało!! To dowodzi, że wektory cztery pierwsze wektory są liniowo zależne bo

$$-\frac{26}{7} \mathbf{v}_1 + \frac{12}{7} \mathbf{v}_2 + \frac{3}{7} \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0 .$$

Zarazem z jednoznaczności tego rozwiązania wynika, że jak byśmy wzięli którekolwiek dwa wektory z $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ to się nie uda, tzn. $\mathbf{v}_4$ nie jest kombinacją liniową tylko dwu z nich. Zatem wymiar podprzestrzeni E jest równy 3, a jako jej bazę można wziąć wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. (Dla porządku można by $\mathbf{v}_5$ wyrazić przez tę bazę, ale niech to oni zrobią sobie w domu).

Zadanie 10

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $E \subset R^4$ rozpiętej przez wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Odp.: Znów zobaczmy, czy się da przedstawić $\mathbf{w}_4$ w postaci $y_1 \mathbf{w}_1 + y_2 \mathbf{w}_2 + y_3 \mathbf{w}_3$. Aby się dało musi być spełniony układ równań:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7. \end{aligned}$$

Rozwiążmy trzy pierwsze, a potem sprawdzimy ostatnie. Drugie minus pierwsze daje $x_3 = 1 - \frac{1}{2}x_1$. To do trzeciego i mamy razem z pierwszym układ (kolejny!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1, \\ \frac{5}{2}x_1 + 3x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Stąd już łatwo i mamy jako rozwiązanie trzech pierwszych

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 0.$$

(Łatwo sprawdzić, że to rozwiązuje trzy pierwsze równania). Teraz sprawdzamy czwarte:

$$4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (0) = 7.$$

Hurra! Znów się udało! Czyli $\mathbf{w}_4$ jest liniowo zależny od $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$: $\mathbf{w}_4 = 2\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2$. Co więcej znów rozwiązanie jest jednoznaczne, więc wszystkie trzy, $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i $\mathbf{w}_3$ są już liniowo niezależne. Zatem wymiar $\dim E = 3$, a jej bazą mogą być te trzy wektory.

Zadanie 11

Znaleźć wymiar i bazę podprzestrzeni $F \subset R^4$ rozpiętej przez wszystkie wektory postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 2y - 2z - t &= 0 \\ x - 4y + 4z + 2t &= 0 \end{aligned}.$$

Odp.: dwa razy pierwszy warunek plus drugi da $x = 0$. Z pierwszego zaś mamy, że $t = 2y - 2z$. Wektory rozpinające E są więc postaci

$$\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \\ 2y - 2z \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \equiv y \mathbf{e}_1 + z \mathbf{e}_2.$$

Wektory $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$ są ewidentnie liniowo niezależne. Zatem $\dim F = 2$ i jej bazą mogą być $\mathbf{e}_1$ i $\mathbf{e}_2$.

Zadanie 12

Znaleźć wymiar i bazę sumy podprzestrzeni E z zadania 10 i F z zadania 11.

Odp.: Jeden z pięciu wektorów

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rozpinających $E \oplus F$ musi być liniowo zależny od pozostałych. Wyrzucimy pierwszy bo najbardziej skomplikowany. Zobaczmy następnie, czy $\mathbf{w}_2$ się da zapisać jako kombinacja liniowa $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$. Gołym okiem widać, że się nie da. Co więcej, Łatwo sprawdzić, że równanie $x\mathbf{w}_3 + y\mathbf{w}_4 + z\mathbf{w}_5 = 0$ ma tylko rozwiązanie $x = y = z = 0$. Zatem $E \oplus F = R^4$ bo jest rozpinana przez cztery wektory $\mathbf{w}_2$, $\mathbf{w}_3$, $\mathbf{w}_4$ i $\mathbf{w}_5$, które można przyjąć za jej bazę.

Zadanie 13

Pokazać, że podprzestrzeń liniowa $E \subset R^4$ złożona z wektorów postaci

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} 3z - 4t &= 0 \\ x - y + z + t &= 0 \end{aligned},$$

jest rozpinana przez dwa wektory.

Odp.: Warunki są dwa na cztery składowe. Weźmy x i z jako niezależne. Wtedy $t = \frac{3}{4}z$ oraz (po wstawieniu tego do drugiego warunku) $x - y + \frac{7}{4}z = 0$, czyli $y = x + \frac{7}{4}z$. Zatem

każdy wektor z E musi mieć postać

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

Zadanie 14

Pokazać, że podprzestrzeń E rozpięta przez wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ postaci

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

zawiera wektory

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{oraz} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1-i \end{bmatrix},$$

oraz, że wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ rozpinają tę samą podprzestrzeń E .

Odp.: Najpierw trzeba pokazać, że równania $x_1 \mathbf{v}_1 + x_2 \mathbf{v}_2 + x_3 \mathbf{v}_3 + x_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_1$ oraz $y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3 + y_4 \mathbf{v}_4 = \mathbf{w}_2$ mają rozwiązania. Pierwsze daje układ równań

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ ix_2 - ix_3 &= i, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 &= 3, \\ ix_1 + (1-i)x_2 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Z drugiego $x_2 - x_3 = 1$, czyli $x_2 = 1 + x_3$. To do pozostałych trzech, co da układ

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 2, \\ ix_1 + (1-i)x_3 + x_4 &= i. \end{aligned}$$

Od drugiego odjąć pierwsze: $x_1 = 1 - x_4$. To do pierwszego i trzeciego

$$\begin{aligned} 2(x_3 + x_4) &= 0, \\ (1-i)(x_3 + x_4) &= i. \end{aligned}$$

Czyli da się przedstawić $\mathbf{w}_1$, z tym, że nie w sposób jednoznaczny. To oznacza, że same wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ i $\mathbf{v}_4$ są liniowo zależne (czyli $\dim E < 4$). Istotnie, widać, że $\mathbf{v}_4 =$

$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem by dowieść, że $\mathbf{w}_2 \in E$ wystarczy pokazać, że $\mathbf{w}_2 = y_1 \mathbf{v}_1 + y_2 \mathbf{v}_2 + y_3 \mathbf{v}_3$. Widać, że $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ po prostu. Ogólniej, można zauważyć, że

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) , \\ \mathbf{w}_2 &= \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \xi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4) ,\end{aligned}$$

dla dowolnych λ i ξ ponieważ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 = 0$. Kładąc $\lambda = 1, \xi = 2$ ($\lambda = 1, \xi = 1$) i odejmując od drugiego pierwsze (od pierwszego drugie) dostajemy

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{v}_1 &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3 ,\end{aligned}$$

(co łatwo sprawdzić). Zatem każdy wektor postaci $\alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 \in E$ można napisać jako

$$\alpha(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{v}_3) + \beta(\mathbf{w}_2 - \mathbf{v}_3) + \gamma \mathbf{v}_3 = \alpha \mathbf{w}_1 + (\beta - \alpha) \mathbf{w}_2 + (\alpha - \beta + \gamma) \mathbf{v}_3 .$$

Zatem wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ i $\mathbf{v}_3$ także rozpinają E .

Zadanie 15

W pewnej bazie w R^n wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ mają współrzędne

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Pokazać, że $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ są także bazą tej przestrzeni i podać w tej nowej bazie współrzędne wektora $\mathbf{w}$, który w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 9, 14)$.

Odp.: Niech wyjściową bazą będą wektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Zatem

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 .\end{aligned}$$

Odejmijmy pierwsze od drugiego:

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 .$$

To do dwu pozostałych:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 3(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) .\end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 , \\ \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 &= 3\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 .\end{aligned}$$

Od drugiego pierwsze oraz od dwa razy pierwszego drugie. Razem więc mamy

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Udało się jednoznacznie wyrazić trzy (z założenia) liniowo niezależne wektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$ przez wektory $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$, co oznacza, że te drugie też są liniowo niezależne, czyli też mogą być bazą przestrzeni. Możemy teaz przerobić wektor $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= 6\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2 + 14\mathbf{e}_3 \\ &= 6(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) + 9(\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) + 14(-\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3,\end{aligned}$$

czyli współrzędne $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ to $(1, 2, 3)$.

Zapiszmy to przez macierz zmiany bazy. Niech

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mnożenia “paluchowe” podrazumywjajetsia. Jeśli teraz napiszemy (stosując konwencję sumacyjną wujka A.E.) wektor $\mathbf{w}$ w postaci $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w_{(e)}^i$ (indeksik e u $w_{(e)}^i$ ma przypominać że $w_{(e)}^i = (6, 9, 14)$ to są współrzędne w bazie $\mathbf{e}_i$) to będziemy mieć:

$$\mathbf{w} = \mathbf{e}_i w_{(e)}^i = \mathbf{v}_k R_{(e)}^k w_{(e)}^i \equiv \mathbf{v}_k w_{(v)}^i.$$

gdzie $R_{(e)}^k$ jest macierzą zmiany bazy, a $w_{(v)}^i = R_{(e)}^k w_{(e)}^i$ jawnie wygląda tak:

$$(w_{(v)}^1, w_{(v)}^2, w_{(v)}^3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 16

Jak w zadaniu 15 tylko teraz

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

a $\mathbf{w}$ w pierwotnej bazie ma współrzędne $(6, 2, -7)$.

Odp.: Znów piszemy

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 3\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 &= 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

Trzecie dodać do pierwszego, a potem dwa razy trzecie do drugiego

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 &= 5\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_3,\end{aligned}$$

Teraz pierwsze razy 3, drugie razy 2 i odjąć, oraz pierwsze razy 5, a drugie razy 3 i odjąć:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Do tego jeszcze

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_3 \\ &= (-3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) - \mathbf{v}_3 + (-5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) \\ &= -8\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Razem więc

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= -3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= -8\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Czyli macierz zmiany bazy to

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a współrzędne $\mathbf{w}$ w bazie $\mathbf{v}_i$ to

$$\begin{pmatrix} -3 & -8 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 17

Sprawdzić, że wielomiany

$$\mathbf{w}_1 = x + 1, \quad \mathbf{w}_2 = x - 1, \quad \mathbf{w}_3 = x^2 + x,$$

tworzą bazę przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa i znaleźć współrzędne w tej bazie wielomianu $\mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1$.

Odp.: Trzeba sprawdzić, że $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ są liniowo niezależne, czyli, że równość

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \lambda_2 \mathbf{w}_2 + \lambda_3 \mathbf{w}_3 = 0,$$

dla wszystkich wartości x zachodzi tylko gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. To widać:

$$\lambda_1(x+1) + \lambda_2(x-1) + \lambda_3(x^2+x) = (\lambda_1 - \lambda_2) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3x^2 = 0 ,$$

wymaga by $\lambda_3 = 0$, oraz $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$ i $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A to rzeczywiście tylko dla $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Czyli są liniowo niezależne, a zatem tworzą bazę. Chcemy teraz napisać

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = 2x^2 + 3x + 1 &= \mathbf{w}_1v^1 + \mathbf{w}_2v^2 + \mathbf{w}_3v^3 \\ &= (x+1)v^1 + (x-1)v^2 + (x^2+x)v^3 . \end{aligned}$$

Czyli $v^3 = 2$ oraz $v^1 + v^2 + v^3 = 3$ i $v^1 - v^2 = 1$. Stąd $v^1 = 1$, $v^2 = 0$. Istotnie

$$1 \cdot (x+1) + 2 \cdot (x^2+x) = 2x^2 + 3x + 1 .$$

Zadanie 18

W bazie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, mają składowe (współrzędne) $(1, 2, 1)$, $(2, 3, 3)$ oraz $(3, 8, 2)$, zaś wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ mają w tejże samej bazie składowe $(3, 5, 8)$, $(5, 14, 13)$ i $((1, 9, 2)$. Sprawdzić, że trzy wektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lub trzy wektory $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ także tworzą dwie inne bazy tej samej przestrzeni i znaleźć macierz przejścia z jednej z nich do drugiej.

Odp.: mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_2 &= 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 , \\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3 , \end{aligned}$$

Drugie od 2×pierwszego: $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$, czyli $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$. To do pierwszego i trzeciego:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 , \\ \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 8\mathbf{e}_2 + 2(\mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) , \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 , \\ 4\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 &= 3\mathbf{e}_1 + 10\mathbf{e}_2 , \end{aligned}$$

Teraz pierwsze $\times 3$ od drugiego i mamy $\mathbf{e}_2 = -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$. Zatem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - 3(-5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) , \\ \mathbf{e}_3 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 . \end{aligned}$$

Reasumując:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= 18\mathbf{v}_1 - 4\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_2 &= -5\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 , \\ \mathbf{e}_3 &= -7\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 . \end{aligned}$$

W podobny sposób można wyrazić $\mathbf{e}_i$ także przez $\mathbf{w}_j$, ale nie warto tego robić (trzeba by dowieść, że $\mathbf{w}_j$ też są bazą). Mamy teraz (w konwencji sumacyjnej):

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{e}_j (R_A)^j_i, \quad \mathbf{e}_j = \mathbf{v}_l (R_B^{-1})^l_j,$$

czyli

$$\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_l (R_B^{-1})^l_j (R_A)^j_i.$$

Zatem jeśli $\mathbf{V} = \mathbf{w}_i V_{(w)}^i$, to $\mathbf{V} = \mathbf{v}_l V_{(v)}^l$, gdzie $V_{(v)}^l = (R_B^{-1})^l_j (R_A)^j_i V_{(w)}^i$, przy czym

$$R_B^{-1} R_A = \begin{pmatrix} 18 & -5 & -7 \\ -4 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 5 & 14 & 9 \\ 8 & 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}.$$