Matematyka I

Zadania domowe, seria 3

Zadanie 1. Oblicz granice: **a)** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4+3x^2-4}{x+1}$, **b)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$, **c)** $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} x$,
d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$, **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[5]{x}}$, **f)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$, **g)** $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$, **h)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$.

Zadanie 2. Oblicz (jeśli istnieją) granice lewo-, prawo- i dwustronnne następujących funkcji w podanych punktach: **a)** $f(x)=e^{-1/x}$ w punkcie $x=0$, **b)** $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+x$ w punkcie $x=1$, **c)** $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{1-x}$ w punkcie $x=1$, **d)** $f(x)=\frac{x}{x-2}$ w punkcie $x=2$, **e)** $f(x)=x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ w punkcie $x=0$, **f)** $f(x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{|x-\frac{\pi}{2}|}$ w punkcie $x=\frac{\pi}{2}$.

Zadanie 3. Niech funkcja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie określona następująco:

$$f(x)=\begin{cases} 2+e^{\frac{1}{x}}, & \text{gdy } x<0,\\ \lim_{x\to 0^-}\left(2+e^{\frac{1}{x}}\right), & \text{gdy } x=0,\\ \frac{1}{x}\sin ax, & \text{gdy } x>0.\end{cases}$$

Dobierz parametr a tak, aby funkcja ta była ciągła na $\mathbb{R}$.

Zadanie 4. Dobierz parametry a, b, c tak, aby funkcja f była różniczkowalna na $\mathbb{R}$

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+a^2}, & \text{gdy } |x|>1,\\ ax^2+bx+c, & \text{gdy } |x|\le 1,\end{cases}$ **b)** $f(x)=\begin{cases} ax+1, & \text{gdy } x\le\frac{\pi}{2},\\ \sin(x)+b, & \text{gdy } x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

Zadanie 5. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x)=\arcsin(\sin x)$.

Zadanie 6. Oblicz pochodne następujących funkcji: **a)** $(x^2-1)^5$, **b)** $\sqrt{1+x^2}$, **c)** $\sin(ax+b)$, **d)** $\ln\sin x$, **e)** x^2e^x, **f)** $x^{1/2}+x^{2/3}$, **g)** $(1+\sqrt[3]{x})/(1-\sqrt[3]{x})$, **h)** x^x, **i)** $\ln\operatorname{tg} x$, **j)** $\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)$, **k)** $\arcsin\frac{1-x}{1+x}$, **l)** $\arccos\sqrt{1-x^2}$, **m)** $\operatorname{arctg}\frac{x}{1-x^2}$, **n)** $x\sqrt{x^2+a}+a\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$, **o)** $x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}$, **p)** $(x^2+1)^{x+\frac{1}{x}}$, **r)** $\frac{\operatorname{sh} x}{x}$, **s)** $\sqrt[n+m]{(1-x)^m(1+x)^n}$, **t)** $\exp\operatorname{tg}\frac{1}{x}$, **u)** $\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\operatorname{arsh} x$, **v)** $\sqrt[\ln x]{\ln x}$, **w)** $\operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.
(notacja: sh=sinh, ch=cosh, th=tgh=tanh, cth=ctgh=coth).

Zadanie 7. Znajdź wzory ogólne na n-te pochodne następujących funkcji:
a) a^x, **b)** $\ln(1+x)$, **c)** $(1+x)^\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$, **d)** $\sqrt{x}$, **e)** $x\ln x$.

Zadanie 8. Dane są dwie funkcje $f(x)=x^2$ i $g(x)=x^2-4x+6$.
a) W jednym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy obu funkcji.
b) Pokaż, że oba wykresy mają tylko jeden punkt wspólny A.
c) Znajdź punkty B i C, w których styczne do krzywych w punkcie A przecinają oś x.
d) Znajdź równanie stycznej do obu krzywych oraz punkty styczności.

Zadanie 9. Znajdź równanie normalnej do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ w punkcie, w którym $f''(x) = 0$.

Zadanie 10. Punkt materialny porusza się ruchem prostoliniowym w taki sposób, że jego przyspieszenie wzrasta proporcjonalnie do czasu. W ciągu pierwszych 10s ruchu przyspieszenie wzrosło od 0 do 5m/s^2. Jaka będzie prędkość ruchu tego punktu po 20s od rozpoczęcia ruchu oraz droga przebyta do tego czasu, jeżeli w chwili $t = 0$ znajdował się w spoczynku?

Zadanie 11. W półokrąg o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, którego wierzchołek leży w środku okręgu. Zbadaj przebieg zmienności pola S tego trójkąta.