0.1 Wyprowadzenie hamiltonianu

Zadanie z kolokwium.

$$L = -m\sqrt{1-\dot{x}^2-\dot{y}^2} + eB(\dot{x}y - x\dot{y}) \tag{1}$$

Wyrażamy lagranżjan we współrzędnych biegunowych $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \tag{2}$$

znamy, trzeba tylko policzyc

$$\dot{x}y - x\dot{y} = (\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi)r\sin\phi - r\cos\phi(\dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi) = -r^2\dot{\phi} \tag{3}$$

Lagranżjan przyjmuje postać

$$L = -m\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2} - eBr^2\dot{\phi} \tag{4}$$

Liczymy pędy:

$$p_r = \frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}}, \quad p_\phi = \frac{mr^2\dot{\phi}}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}} - eBr^2 \tag{5}$$

Liczymy energię

$$\begin{aligned}
E &= p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = \\
&= \frac{m\dot{r}^2}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}} + \frac{mr^2\dot{\phi}^2}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}} - eBr^2\dot{\phi} + m\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2} + eBr^2\dot{\phi} = \\
&= \frac{m}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}}
\end{aligned}$$

Zauważmy, że ten sam czynnik występuje w pędach. Możemy zapisać

$$\begin{aligned}
E &= \frac{m}{\sqrt{1-\dot{r}^2-r^2\dot{\phi}^2}} \\
p_r &= E\dot{r} \\
p_\phi &= Er^2\dot{\phi} - eBr^2
\end{aligned}$$

Wyliczając z dwóch ostatnich równań

$$\dot{r} = \frac{p_r}{E}, \quad \dot{\phi} = \frac{p_r + eBr^2}{Er^2} \tag{6}$$

dostajemy po podstawieniu do pierwszego

$$\begin{aligned}
E = \frac{m}{1 - \frac{p_r^2}{E^2} - r^2\frac{(p_r+eBr^2)^2}{E^2r^4}} &\Rightarrow E^2\left(1 - \frac{p_r^2}{E^2} - r^{-2}\frac{(p_r+eBr^2)^2}{E^2}\right) = m^2 \\
&\Rightarrow E^2 - p_r^2 - r^{-2}(p_r+eBr^2)^2 = m^2
\end{aligned}$$