0.1 Małe drgania

Krótka notatka o małych drganiach wyjasniające możliwe niejasności.

0.2 Poszukiwanie punktów równowagi

Punkty równowagi wyznaczone są warunkami

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} = 0, \quad \dot{x}^i = 0 \tag{1}$$

Pochodna ta jest równa pochodnej lagranżjanu z podstawionymi $\dot{x}^i = 0$.

0.2.1 Przykłady

Jeśli lagranżjan jest postaci

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \frac{\dot{x}^2 + e^{y^2}\dot{y}^2}{x^2 + 1 + \sin x + e^y} + \dot{x}e^{\sin x}x^2 + y^2 \tag{2}$$

to nie musimy różniczkować pierwszego i drugiego członu gdyż i tak po podtawieniu $\dot{x} = \dot{y} = 0$ dadzą 0. Patrzymy tylko na funkcję

$$L(x, 0, y, 0) = x^2 + y^2 \tag{3}$$

i otrzymujemy

$$\frac{\partial L}{\partial x}|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 2x, \ \frac{\partial L}{\partial y}|_{\dot{x}=\dot{y}=0} = 2y \tag{4}$$

czyli punktem równowagi jest $x = y = 0$.

0.3 Rozwinięcie Lagranżjanu

W teorii małych drgań rozwijamy lagranżjan do wyrazów drugiego rzędu korzystajac z twierdzenia Taylora, wokół położenia równowagi

$$\dot{x}^i_r = 0, \ x^i_r \tag{5}$$

dostajemy (konwencja sumacyjna)

$$L(\dot{x}^i, x^i) = \underbrace{L|_{\dot{x}^i=0x^i_r}}_{\text{stała}} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial x^i}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta x^i}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta \dot{x}^i}_{\text{pełna pochodna}} \tag{6}$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta \dot{x}^i \delta \dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta \dot{x}^i \delta x^j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta x^i \delta x^j + O(\delta^3) \tag{7}$$

Pierwsza linijka rozwinięcia składa się ze stałej i pełnej pochodnej $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\delta x^i\right)$ i może być pominięta w lagranżjanie.

Proszę sobie przypomnieć skąd się bierze brak $\frac{1}{2}$ przy $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\delta \dot{x}^i \delta x^j$!

0.3.1 Przykłady

Jeśli lagranżjan jest równy

$$L(x,\dot{x},y,\dot{y}) = \frac{1}{x^2+1}\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{y}x^2 + \sqrt{1-(x-1)^2-y^2} \tag{8}$$

i punkt równowagi to $x = 1$, $y = 0$ to najlepiej policzyć rozwinięcie Taylora rozwijając w szereg do drugiego rzędu w $\delta\dot{x} = \dot{x}, \delta\dot{y} = \dot{y}, \delta y = y, \delta x = x-1$.

Zajmijmy się członem $\frac{1}{x^2+1}\dot{x}^2$. Zauważmy, że

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}|_{\dot{x}^i=0,x^i_r} = \frac{2}{x^2+1}|_{x=1} = 1 \tag{9}$$

i pozostałe drugie pochodne przy warunku $\dot{x}^i = 0$ znikają. Jest to ogólna zasada: funkcję przy kwadracie prędkości trzeba rozwinąć tylko do zerowego rzędu (policzyć wartość).

Wyrazy liniowe w prędkościach trzeba rozwinąć do pierwszego rzędu. W tym przypadku najlepiej użyć szeregu Taylora

$$x^2 = x^2|_{x=1} + 2x|_{x=1}\delta x = 1 + 2\delta x \tag{10}$$

czyli

$$\dot{y}x^2 = \delta\dot{y} + 2\delta\dot{y}\delta x \tag{11}$$

Pozostaje rozwinięcie wyrazów $\sqrt{1-(x-1)^2-y^2} = \sqrt{1-\delta x^2-\delta y^2}$. Korzystamy tu z faktu, że

$$\sqrt{1-r} = 1 - \frac{1}{2}r + O(r^2), \quad \sqrt{1-\delta x^2-\delta y^2} = 1 - \frac{1}{2}(\delta x^2+\delta y^2) + O(\delta^4) \tag{12}$$

ponieważ $r = x^2 + y^2$ to $O(r^2) = O(\delta^4)$.

Ostatecznie otrzymujemy lagranżjan

$$L^{(2)} = \frac{1}{2}\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + \underbrace{\delta\dot{y}}_{\text{pomijamy jako p. poch.}} + \underbrace{1}_{\text{stała do pominięcia}} + 2\delta\dot{y}\delta x - \frac{1}{2}(\delta x^2+\delta y^2) \tag{13}$$

W przypadku Lagranżjanu

$$L = \frac{1}{x^2+1}\dot{x}^2 + (2x^4 - x^2) \tag{14}$$

mamy trzy punkty równowagi

$$0 = \frac{\partial L(x,\dot{x}=0)}{\partial x} = 8x^3 - 2x \Rightarrow x \in \{0, 2, -2\} \tag{15}$$

Warto więc rozwinąć lagranżjan po prostu z szeregu Taylora w zmiennej x a w zmiennej $\dot{x}$ zastosować metodę szeregów (jak wyżej)

$$\frac{1}{x^2+1}\dot{x}^2 = \frac{1}{x^2+1}|_{x=x_r}\delta\dot{x}^2 + O(\delta^3), \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}|_{\dot{x}=0} = \frac{2}{x^2+1}, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial x}|_{\dot{x}=0} = 0 \tag{16}$$

oraz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}|_{\dot{x}=0} = 24x^2 - 2 = \begin{cases} 94 & x = \pm 2 \\ -2 & x = 0 \end{cases} \tag{17}$$

Mamy

$$L^{(2)} = \begin{cases} \frac{1}{5}\delta\dot{x}^2 + \frac{94}{2}\delta x^2 & x_r = \pm 2 \\ \frac{1}{2}\delta\dot{x}^2 + \frac{-2}{2}\delta x^2 & x_r = 0 \end{cases} \tag{18}$$

0.4 Stabilność i częstości własne

Aby zbadać stabilność należy znaleźć mody i częstości własne.

- Wypisujemy równania E-L dla $L^{(2)}$,

$$\forall_i \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta\ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta\dot{x}^j = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial x^i}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta\dot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}\delta\dot{x}^j$$

- Szukamy rozwiązań w postaci

$$\delta x^i = a^i e^{\lambda t} \tag{19}$$

  gdzie λ, a^i to stałe.

- równania zapisują się jako (po podzieleniu przez $e^{\lambda t}$)

$$\forall_i \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\lambda^2 a^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j}\lambda a^j = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial x^i}\lambda a^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} a^j \tag{20}$$

  Dla oszczędności pomijamy w zapisie $|_{\dot{x}^k=0,x^k_r}$ Wprowadźmy macierz

$$A_{ij}(\lambda) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}\lambda^2 + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial x^i}\right)\lambda - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j} \tag{21}$$

- Nietrywialne rozwiązanie $A_{ij}(\lambda)a^j = 0$ jest możliwe tylko dla $w(\lambda) = \det A_{ij}(\lambda) = 0$.

- Uwaga terminologiczna: Gdy dla danego rozwiązania Re $\lambda = 0$ to zapisujemy $\lambda = i\omega$ (ω to częstość własna)

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{22}$$

  to mod własny.

- Gdy znajdziemy wszystkie mody własne i pierwiastki $w(\lambda)$ to
  - punkt jest stabilny jesli wszystkie pierwiastki $w(\lambda)$ są czysto urojone i liczba modów własnych jest równa stopniowi wielomianu $w(\lambda)$ (gdy pierwiastek jest wielokrotny to liczymy wymiar przestrzeni $\ker A_{ij}(\lambda)$). Jeśli wszystkie częstosci są różne to ten drugi warunek jest automatycznie spełniony i nie trzeba go sprawdzać.
  - punkt jest niestabilny jeśli przynajmniej jeden pierwiastek $w(\lambda)$ ma część rzeczywistą wieksza od 0. Ponieważ pierwiastki występują parami $\{\lambda, -\lambda\}$ to wystarczy sprawdzić, że część rzeczywista jakiegoś pierwiastka jest rózna od 0,
  - jeśli wszystkie pierwiastki $w(\lambda)$ są czysto urojone ale liczba modów własnych jest mniejsza niż stopnień wielomianu $w(\lambda)$ (jest to możliwe tylko jeśli $w(\lambda)$ ma pierwiastki wielokrotne) to nie można okreslić czy punkt jest stabilny czy niestabilny.

0.4.1 Przykłady

Dla

$$L^{(2)} = \frac{1}{2}\delta\dot{x}^2 + \delta\dot{y}^2 + 2\delta\dot{y}\delta x - \frac{1}{2}(\delta x^2 + \delta y^2) \tag{23}$$

Równania E-L mają postać

$$\delta\ddot{x} = 2\delta\dot{y} - \delta x, \;\; 2\delta\ddot{y} + 2\delta\dot{x} = -\delta y \tag{24}$$

Zapisując $\delta x = ae^{\lambda t}$, $\delta y = be^{\lambda t}$

$$\begin{aligned} \lambda^2 ae^{\lambda t} &= (2\lambda b - a)e^{\lambda t} \\ (2\lambda^2 b + 2\lambda a)e^{\lambda t} &= -be^{\lambda t} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2+1 & -2\lambda \\ 2\lambda & 2\lambda^2+1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \tag{25}$$

Mozliwe wartości λ to rozwiązania $\det A(\lambda) = 0$ (równanie dwukwadratowe)

$$2\lambda^4 + 7\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}} \tag{26}$$

Widać, że Re $\pm\sqrt{\frac{-7\pm\sqrt{41}}{4}} = 0$ a więc punkt jest stabilny (częstości są różne). Mody własne to

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\lambda}{\lambda^2+1} \\ 1 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \tag{27}$$

Przyjeliśmy $b = 1$.

0.5 Kilka uwag

0.5.1 Czy stabilnosć można odczytać z energii?

PROSZĘ NIE STOSOWAC TEGO NA EGZAMINIE, PONIEWAŻ METODA TA DAJE TYLKO WARUNKI DOSTATECZNE NA STABILNOSC.

Trzeba policzyć energię (zachowaną stałą ruchu). Jeśli punkt równowagi $\dot{x}^i = 0, x^i = x^i_r$ jest lokalnym izolowanym minimum (jako funkcji $\dot{x}^i, x^i$) to punkt jest stabilny. Jest to warunek dostateczny, ale nie konieczny!.

Na ćwiczeniach był przykład wahadła w polu magnetycznym gdzie (położenie do góry było przy odpowiednio dużym polu magnetycznym stabilne a energia nie była tam w lokalnym minimum). PROSZĘ O TYM PAMIĘTAĆ I ZAWSZE ODCZYTYWAĆ STABILNOŚĆ Z CZĘSTOŚCI WŁASNYCH.

0.6 Przykład z obręczą z kolokwium

Lagranżjan w układzie sferycznym

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2) - mgr\cos\theta \tag{28}$$

Przy czym z więzów $r = R$ ($\dot{r} = 0$) oraz $\dot{\phi} = \omega$ czyli

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \omega^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta \tag{29}$$

Położenia równowagi

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{mR^2}{2}(\omega^2\sin^2\theta) - mgR\cos\theta\right) = mR\sin\theta(R\omega^2\cos\theta + g) \tag{30}$$

Czyli $\theta = 0, \pi$ lub $\cos\theta = \frac{-g}{R\omega^2}$. Ten drugi punkt istnieje bo $g < R\omega^2$.

Ponieważ jest kilka punktów i problem jest jednowymiarowy to lepiej jest rozwijać używając roziniecia Taylora

$$L^{(2)} = \frac{mR^2}{2}\delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}\delta\theta^2 \tag{31}$$

Mamy

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}|_{\dot{\theta}=0} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(mR\sin\theta(R\omega^2\cos\theta + g)\right) = mR\cos\theta(R\omega^2\cos\theta + g) - mR\sin\theta R\omega^2\sin\theta \tag{32}$$

Dla punktów $\theta_r = 0, \pi$ mamy więc $\cos\theta_r = \pm 1$

$$L^{(2)} = \frac{mR^2}{2}\delta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR(R\omega^2 \pm g)\delta\theta^2 \tag{33}$$

To problem jednowymiarowy i rozwiązaniami są $\lambda = \pm\sqrt{\omega^2 - \frac{g}{R}}$ (rzeczywiste). Czyli punkt jest niestabilny. Dla $\cos\theta = -\frac{g}{R\omega^2}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}|_{\dot{\theta}=0} = mR\cos\theta(R\omega^2\cos\theta + g) - mR^2\omega^2(1 - \cos^2\theta) = mR^2\omega^2\left(1 - \frac{g^2}{R^2\omega^4}\right) > 0 \tag{34}$$

Mamy $\lambda = \pm i\sqrt{\omega^2\left(1 - \frac{g^2}{R^2\omega^4}\right)}$ a więc to punkt stabilny.

W rzeczywistości to dwa punkty położone po dwóch stronach obręczy.