0.1 Równania ruchu dla nieciągłych hamiltonianów

Zakładamy, że H jest nieciagłe (ale tylko w położeniach i czasie) na pewnych gładkich powierzchniach.

Rozważmy problem wariacyjny

$$\delta \int p_\mu dx^\mu \tag{1}$$

gdzie $p_t = -H(p_i, x_i, t)$. Jeśli trajektoria nie przechodzi przez powierzchnie nieciagłości H to

$$\delta \int_p^k p_\mu dx^\mu = \int \delta p_\mu dx^\mu + \int p_\mu d\delta x^\mu = \int \delta p_\mu dx^\mu - \int \delta x^\mu dp_\mu + p_\mu \delta x^\mu|_p^k \tag{2}$$

Korzystając $\delta p_t = -\frac{\partial H}{\partial x^i}\delta x^i - \frac{\partial H}{\partial t}\delta t - -\frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i$ dostajemy

$$\delta \int p_\mu dx^\mu = \int \delta p_i \left(dx^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right) + \int \delta x_i \left(-dp_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}dt\right) + \int \delta t \left(-dp_t - \frac{\partial H}{\partial t}dt\right) + p_\mu \delta x^\mu|_p^k \tag{3}$$

W tym przypadku wariacje przy założeniu, że δx^μ znika na końcach (ustalone punkty końcowe) jest równoważna równaniom Hamiltona. Ostatnie równanie jest automatycznie spełnione gdy zachodzą równania Hamiltona.

Załóżmy, że trajektoria przecina powierzchnię skokowej zmiany H. Powierzchnia ta wyznaczona jest równaniem $f(x^\mu) = 0$ (może być zależna od czasu). Podzielmy całkę na dwie części

$$\int_p^k p_\mu dx^\mu = \int_p^s p_\mu dx^\mu + \int_s^k p_\mu dx^\mu \tag{4}$$

gdzie punkt s wyznaczony jest równaniem $f(x^\mu) = 0$.

$$\delta \int p_\mu dx^\mu = \tag{5}$$

$$= \int_p^s \delta p_i \left(dx^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right) + \int_p^s \delta x_i \left(-dp_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}dt\right) + \int_p^s \delta t \left(-dp_t - \frac{\partial H}{\partial t}dt\right) + p_\mu \delta x^\mu|_p^s \tag{6}$$

$$= \int_s^k \delta p_i \left(dx^i - \frac{\partial H}{\partial p_i}dt\right) + \int_s^k \delta x_i \left(-dp_i - \frac{\partial H}{\partial x^i}dt\right) + \int_s^k \delta t \left(-dp_t - \frac{\partial H}{\partial t}dt\right) + p_\mu \delta x^\mu|_s^k \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Nie mozemy założyć, że p_μ jest ciagłe na powierzchni zmiany (ale trajektoria ma być ciągła) a więc człony bez całki dają

$$p_\mu(k)\delta x^\mu(k) + (p_\mu^-(s) - p_\mu^+(s))\delta x^\mu(s) - p_\mu(p)\delta x^\mu(p) = (p_\mu^-(s) - p_\mu^+(s))\delta x^\mu(s) \tag{9}$$

Tym razem tylko $x^\mu(k)$ oraz $x^\mu(p)$ są ustalone. Przez $p_\mu^\pm(s)$ oznaczamy wartości pędów przed i po przejściu przez powierzchnię. Ponieważ przy zmianie trajektorii punkt s jest cały czas wyznaczony przez $f = 0$ (tak dzielimy całkę) to wariacje spełniają

$$0 = \delta f = \frac{\partial f}{\partial x^\mu}\delta x^\mu(s) \tag{10}$$

Stąd

$$p_\mu^-(s) - p_\mu^+(s) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x^\mu(s)) \tag{11}$$

Poza tym punktem mamy równania Hamiltona. Analogiczne wzory zachodzą przy wielokrotnym przechodzeniu przez powierzchnię zmiany H. Wzory te determinują ewolucję razem z równaniem $p_t = -H(p_i, x^i, t)$.