Ok. To jest dobre rozwiązanie problemu z konsultacji:

0.1 Zasada Jacobiego

Załóżmy, że mamy związek między $p_t = -H$ oraz pozostałymi pędami

$$C(p_t, p_1, ...p_n, t, x_1, ...x_n) = 0 \tag{1}$$

Traktujmy wszytskie pędy i położenia jednakowo i oznaczmy je przez

$$p_\mu, x_\mu \tag{2}$$

Możemy wyznaczyć z tego związku $p_\mu(....)$ wtedy

$$\frac{dx_\nu}{dx_\mu} = -\frac{\partial p_\mu}{\partial p_\nu}, \quad \frac{dp_\nu}{dx_\mu} = \frac{\partial p_\mu}{\partial x_\nu}, \tag{3}$$

Pozwala to na wyznaczenie toru jesli tylko $\frac{\partial p_\mu}{\partial p_\nu}$ można zapisać jako funkcję zależną tylko od stałych ruchu i x_μ.

0.2 Separacja

Wykonujemy ją krokami. Jeśli C zależy od pary zmiennych kanonicznie sprzężonej p_μ, x_μ tak, że

$$C = \tilde{C}(p_{\nu\neq\mu}, x_{\nu\neq\mu}, h_\mu(p_\mu, x_\mu)) \tag{4}$$

to h_μ jest stałą ruchu. Dostajemy dwa równania:

$$\tilde{C}(p_{\nu\neq\mu}, x_{\nu\neq\mu}, h_\mu) = 0, \quad h_\mu = h_\mu(p_\mu, x_\mu)) \tag{5}$$

z dodatkową stałą h_μ. Powtarzamy tę procedurę dla $\tilde{C}$. W najlepszej sytuacji dostajemy układ równań:

$$0 = C'(p_1, x_1, h_2, \dots h_n) \tag{6}$$
$$h_2 = h_2(p_2, x_2, h_3, \dots h_n) \tag{7}$$
$$\dots \tag{8}$$
$$h_n = h_n(p_n, x_n) \tag{9}$$

Możemy je rozwikłać ze względu na p_i:

$$p_1 = p_1(x_1, h_2 \cdots h_n) \tag{10}$$
$$p_2 = p_2(x_2, h_2 \cdots h_n) \tag{11}$$
$$\dots \tag{12}$$
$$p_n = p_n(x_n, h_n) \tag{13}$$

Trochę magii (wyjaśnienie w drugim pliku). Okazuje się, że

$$s_2 = \int dx_1 \frac{\partial p_1}{\partial h_2} + \int dx_2 \frac{\partial p_2}{\partial h_2} \tag{14}$$
$$s_3 = \int dx_1 \frac{\partial p_1}{\partial h_3} + \int dx_2 \frac{\partial p_2}{\partial h_3} + \int dx_3 \frac{\partial p_3}{\partial h_3} \tag{15}$$
$$\dots \tag{16}$$
$$s_n = \int dx_1 \frac{\partial p_1}{\partial h_n} + \int dx_2 \frac{\partial p_2}{\partial h_n} + \dots + \int dx_n \frac{\partial p_n}{\partial h_n} \tag{17}$$

to stałe ruchu.

0.3 Przykład z układem sferycznym

$$-p_t = H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}p_\phi^2\right)\right) + V(r) \tag{18}$$

Widzimy, że ϕ, p_ϕ się separują czyli

$$h_\phi(p_\phi,\phi) = p_\phi, \quad 0 = p_t + \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}h_\phi^2\right)\right) + V(r) \tag{19}$$

Teraz θ, p_θ się separują

$$h_\phi(p_\phi,\phi) = p_\phi, \quad h_\theta(p_\theta,\theta) = p_\theta^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}h_\phi^2, \quad 0 = p_t + \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}h_\theta\right) + V(r) \tag{20}$$

Ostatecznie t, p_t się separuja:

$$h_\phi(p_\phi,\phi) = p_\phi, \quad h_\theta(p_\theta,\theta) = p_\theta^2 + \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}, \quad h_t(p_t,t) = p_t, \quad 0 = h_t + \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}h_\theta\right) + V(r) \tag{21}$$

Dostajemy

$$p_\phi = h_\phi, \quad p_\theta = \pm\sqrt{h_\theta - \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}}, \quad p_t = h_t, \quad p_r = \pm\sqrt{-2m(h_t + \frac{h_\theta}{r^2} + V(r))} \tag{22}$$

Policzmy:

$$\frac{\partial p_\phi}{\partial h_\phi} = 1, \quad \frac{\partial p_\theta}{\partial h_\phi} = \mp\frac{h_\phi}{\sin^2\theta\sqrt{h_\theta - \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}}} \quad \frac{\partial p_t}{\partial h_t} = 1 \quad \frac{\partial p_\theta}{\partial h_\theta} = \pm\frac{1}{\sqrt{h_\theta - \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}}} \tag{23}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial h_t} = \mp\frac{2m}{\sqrt{-2m(p_t + \frac{h_\theta}{r^2} + V(r))}} \quad \frac{\partial p_r}{\partial h_\theta} = \mp\frac{2m}{r^2\sqrt{-2m(h_t + \frac{h_\theta}{r^2} + V(r))}} \tag{24}$$

Daje to kilka równości całkowych

$$s_\phi = \phi + \int d\theta \mp \frac{h_\phi}{\sin^2\theta\sqrt{h_\theta - \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}}} \tag{25}$$

$$s_\theta = \int d\theta \pm \frac{1}{\sqrt{h_\theta - \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}}} + \int dr \mp \frac{2m}{r^2\sqrt{-2m(p_t + \frac{h_\theta}{r^2} + V(r))}} \tag{26}$$

$$s_t = t + \int dr \mp \frac{2m}{\sqrt{-2m(h_t + \frac{h_\theta}{r^2} + V(r))}} \tag{27}$$

Razem z wyrażeniami na $h_\phi = p_\phi, h_t = -H, h_\theta = p_\theta^2 + \frac{h_\phi^2}{\sin^2\theta}$ jest to rozwiązanie problemu przez kwadratury.