

Matematyka: Matematyka I - ćwiczenia/Reguła de l'Hospitala

Reguła de l'Hospitala

Zadanie 1

Znaleźć granicę:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \log(1+x).$$

Wskazówka

Należy przepisać granicę w postaci ilorazu, aby możliwe było zastosowanie twierdzenia de l'Hospitala.

Rozwiązanie

Zapiszmy granicę w formie:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \log(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Granica ma charakter " $\frac{0}{0}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala.

Możemy więc napisać:

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \log(1+x) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 1,$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$. Literą "H" oznaczyliśmy powyżej miejsce, w którym skorzystaliśmy z twierdzenia de l'Hospitala.

Zadanie 2

Znaleźć granicę:

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x - \cosh x}{\sin x - \sinh x}.$$

Wskazówka

Zadanie bardzo łatwe, bez wskazówki.

Rozwiązanie

Jak widać, granica ma ponownie charakter " $\frac{0}{0}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala. Zachodzi więc równość:

$$(5) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x - \cosh x}{\sin x - \sinh x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cosh x - x(\sin x + \sinh x)}{\sin x - \sinh x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x(\sin x + \sinh x)}{\sin x - \sinh x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sinh x}{x}}{\frac{\sin x - 1}{x^2} - \frac{\cosh x - 1}{x^2}} \right). \end{aligned}$$

Jeśli teraz skorzystamy ze znanych granic:



$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = -\frac{1}{2}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sinh^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}, \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1,
 \end{aligned}$$

to z (5) uzyskujemy wynik:

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\cos x - \cosh x}{\sin x - \sinh x} = 3.$$

Zadanie 3

Znaleźć granicę:

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x}.$$

Wskazówka

Zadanie bardzo łatwe, bez wskazówki.

Rozwiązanie

Granica ma charakter " $\frac{0}{0}$ ". Funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala, więc można od razu zastosować zawarty w nim przepis:

$$\begin{aligned}
 (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin^3 x} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{3 \sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{3 \sin^2 x \cos^3 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3 \sin^2 x \cos^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3 \cos^3 x} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

Zadanie 4

Znaleźć granicę:

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x + \log^2 x - x + 1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}}.$$

Wskazówka

Należy dwukrotnie zastosować regułę de l'Hospitala.

Rozwiązanie

Gdy x zbiega do jedynki, to $\log x \rightarrow 0$ oraz $\cos \frac{\pi x}{2} \rightarrow 0$, więc granica ma ponownie charakter " $\frac{0}{0}$ ". Funkcje w liczniku i mianowniku spełniają w otoczeniu $x = 1$ założenia twierdzenia de l'Hospitala. Piszemy więc:

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x + \log^2 x - x + 1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2 \log x}{x} - 1}{-2 \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \sin \frac{\pi x}{2}} = -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2 \log x}{x} - 1}{\sin(\pi x)}.$$

Otrzymana granica jest w dalszym ciągu typu " $\frac{0}{0}$ " i nadal spełnione są założenia twierdzenia de l'Hospitala, więc spróbujemy zastosować je ponownie:

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x + \log^2 x - x + 1}{\cos^2 \frac{\pi x}{2}} \stackrel{H}{=} -\frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} - \frac{2 \log x}{x^2}}{\pi \cos(\pi x)} = \frac{2}{\pi^2}.$$



Zadanie 5

Znaleźć granicę:

$$(13) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

Wskazówka

Należy zapisać wyrażenie w postaci ilorazowej, do której można już zastosować regułę de l'Hospitala.

Rozwiązanie

Sprowadzając wyrażenie w nawiasie do wspólnego mianownika, możemy wyrażenie (13) zapisać w formie:

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \sin x}.$$

Granica ma teraz charakter " $\frac{0}{0}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala.

Stosując je do naszego wyrażenia otrzymujemy:

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x \sin x + x^2 \cos x}.$$

Uzyskaną granicę znajdziemy, ponownie stosując regułę de l'Hospitala:

$$(16) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{\sin x}{x}}{2 \frac{\sin x}{x} + 4 \cos x - x \sin x} = -\frac{1}{6}, \end{aligned}$$

gdzie wykorzystaliśmy (6).

Warto jeszcze dodać, że nie musieliśmy powtórnie stosować reguły de l'Hospitala do granicy po prawej stronie (15), gdyż można ją było także znaleźć wykorzystując tożsamość: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ i przekształcając wyrażenie w następujący sposób:

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2}{2 \frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{1}{6}.$$

Zadanie 6

Znaleźć granicę:

$$(18) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

Wskazówka

Należy zapisać wyrażenie w postaci ilorazowej, do której można już zastosować regułę de l'Hospitala.

Rozwiązanie

Procedura rozwiązania zadania polega na sprowadzeniu wyrażenia w nawiasie do wspólnego mianownika, a następnie dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia de l'Hospitala. W wyniku tego otrzymujemy:

$$(19) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \log x}{(x-1) \log x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\log x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \log x + x-1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\log x + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



Zadanie 7

Znaleźć granicę:

$$(20) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{4}{x^4 - 1} \right).$$

Wskazówka

Należy zapisać wyrażenie w postaci ilorazowej, do której można już zastosować regułę de l'Hospitala.

Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednim zadaniu, procedura rozwiązywania zadania polega na sprowadzeniu wyrażenia w nawiasie do wspólnego mianownika, a następnie dwukrotnym zastosowaniu twierdzenia de l'Hospitala. W wyniku tego otrzymujemy:

$$(21) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{4}{x^4 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4 - 4x^5 - 1}{x^9 - x^5 - x^4 + 1} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-20x^4 + 20x^3}{9x^8 - 5x^4 - 4x^3} \\ &= -20 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{9x^5 - 5x - 4} \stackrel{H}{=} -20 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{45x^4 - 5} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Zadanie 8

Znaleźć granicę:

$$(22) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)}.$$

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (22), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.

Rozwiązanie

Aby przekształcić granicę do postaci, dla której można zastosować regułę de l'Hospitala, wykorzystamy własności funkcji logarytm. Zamiast obliczać (22), znajdziemy:

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log(1+x) \log \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log \operatorname{tg} x}{\frac{1}{\log(1+x)}}.$$

Otrzymana granica ma teraz charakter " $\frac{\infty}{\infty}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają w otoczeniu punktu $x = 0$ założenia twierdzenia de l'Hospitala. Stosując je do prawej strony (23), otrzymujemy:

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{-1}{\log^2(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+x) \log^2(1+x)}{\sin 2x}.$$

Teraz musimy ponownie zastosować regułę de l'Hospitala:

$$(25) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} \stackrel{H}{=} -2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log^2(1+x) + 2 \log(1+x)}{2 \cos 2x} = 0.$$

Za względu na ciągłość funkcji logarytm, mamy

$$(26) \quad 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} = \log \left[\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} \right],$$

skąd, dzięki jej różnowartościowości, możemy już wnioskować, że

$$(27) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{tg} x)^{\log(1+x)} = e^0 = 1.$$



Zadanie 9

Znaleźć granicę:

$$(28) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)^{\log \left(1 + \frac{b}{x} \right)},$$

gdzie $a, b > 0$.

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (28), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.

Rozwiązanie

Najpierw przekształcimy granicę do postaci, dla której można zastosować regułę de l'Hospitala, wykorzystując własności funkcji logarytm. Zamiast obliczać (28), zajmiemy się granicą:

$$(29) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)^{\log \left(1 + \frac{b}{x} \right)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{b}{x} \right) \log \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)}{\frac{1}{\log \left(1 + \frac{b}{x} \right)}}. \end{aligned}$$

Granica (29) jest już typu " $\frac{\infty}{\infty}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala. Wykorzystując je, otrzymujemy:

$$(30) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)^{\log \left(1 + \frac{b}{x} \right)} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log \left(1 + \frac{a}{x} \right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{\log^2 \left(1 + \frac{b}{x} \right)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{b}{x}} \cdot \frac{-b}{x^2}} \\ &= -\frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+b}{x+a} \cdot \frac{\log^2 \left(1 + \frac{b}{x} \right)}{\log \left(1 + \frac{a}{x} \right)}. \end{aligned}$$

Aby skorzystać z twierdzenia o granicy iloczynu, osobno znajdziemy (ponownie posługując się regułą de l'Hospitala) granicę:

$$(31) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^2 \left(1 + \frac{b}{x} \right)}{\log \left(1 + \frac{a}{x} \right)} &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log \left(1 + \frac{b}{x} \right) \frac{1}{1 + \frac{b}{x}} \cdot \frac{-b}{x^2}}{\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \cdot \frac{-a}{x^2}} \\ &= 2 \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+a}{x+b} \log \left(1 + \frac{b}{x} \right) = 0. \end{aligned}$$

Oznacza to, iż zeru równa jest także granica (30), a dzięki ciągłości i różnowartościowości funkcji logarytm, możemy od razu napisać wynik końcowy:

$$(32) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right)^{\log \left(1 + \frac{b}{x} \right)} = e^0 = 1.$$

Zadanie 10

Znaleźć granicę:

$$(33) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (33), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.



Rozwiązanie

Podobnie jak w poprzednich przykładach, wykorzystując własności funkcji logarytm, przekształcimy granicę do postaci, dla której można zastosować regułę de l'Hospitala. Zamiast obliczać (33), znajdziemy:

$$(34) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)}{(x-1)^2}.$$

Otrzymana granica (34) ma postać " $\frac{0}{0}$ ", a funkcje w liczniku i mianowniku spełniają założenia twierdzenia de l'Hospitala. Stosując je, otrzymujemy:

$$(35) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{\sin \frac{x\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} \cos \frac{x\pi}{2}}{2(x-1)}.$$

Poniżej będziemy chcieli skorzystać z twierdzenia o iloczynie granic. W tym celu znajdziemy osobno:

$$(36) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{x\pi}{2}}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{(t+1)\pi}{2}}{t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{t\pi}{2}}{t} = - \frac{\pi}{2}.$$

W konsekwencji mamy:

$$(37) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \log \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = - \frac{\pi^2}{8}.$$

i ostatecznie:

$$(38) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\sin \frac{x\pi}{2} \right)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{-\frac{\pi^2}{8}}.$$

Zadanie 11

Znaleźć granicę:

$$(39) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx + 1} \right)^x,$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$.

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (39), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.

Rozwiązanie

Postępujemy według schematu zarysowanego w poprzednich zadaniach. Najpierw obliczamy:

$$(40) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \log \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx + 1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \log \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 + ax + 1) - \log(x^2 + bx + 1)}{\frac{1}{x}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x+a}{x^2+ax+1} - \frac{2x+b}{x^2+bx+1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4(a-b) + x^2(b-a)}{(x^2+ax+1)(x^2+bx+1)} = a-b, \end{aligned}$$

a stąd wnosimy, że:

$$(41) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + bx + 1} \right)^x = e^{a-b}.$$



Zadanie 12

Znaleźć granicę:

$$(42) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}.$$

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (42), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.

Rozwiązanie

Metoda postępowania jest nam już znana, więc od razu obliczamy:

$$(43) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log (\sin x)^{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \log \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\operatorname{ctg} x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cos x = 0. \end{aligned}$$

W konsekwencji mamy:

$$(44) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} = e^0 = 1.$$

Zadanie 13

Znaleźć granicę:

$$(45) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Wskazówka

Zamiast obliczać wprost granicę (45), należy obliczyć granicę logarytmu z wyrażenia w treści zadania.

Rozwiązanie

Obliczamy najpierw:

$$(46) \quad \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \log (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^2 x \log \sin x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\log \sin x}{\operatorname{ctg}^2 x} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctg} x}{-2 \operatorname{ctg} x \frac{1}{\sin^2 x}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

W konsekwencji otrzymujemy:

$$(47) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$



Źródła i autorzy artykułu

Matematyka:Matematyka I - ćwiczenia/Reguła de l'Hospitala Źródło: <https://brain.fuw.edu.pl/edu-wiki/index.php5?oldid=8834> Autorzy: Torado

Licencja

Attribution-Share Alike 3.0 PL
<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/pl>



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

