

Oddziaływanie atomu z kwantowym polem E-M: C.D.

1 atom jako źródło 1 fotonu.
Emisja spontaniczna wg. złotej reguły
Fermiego.
Absorpcja i emisja kolektywna

Powtórzenie

$$\hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) = i \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} \underbrace{\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon(2\pi)^3}} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x})}_{u_{\lambda,k}(\vec{x})} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} + H.c.$$

zwykła funkcja
opisuje charakterystykę modową

operator
zawiera statystykę pola

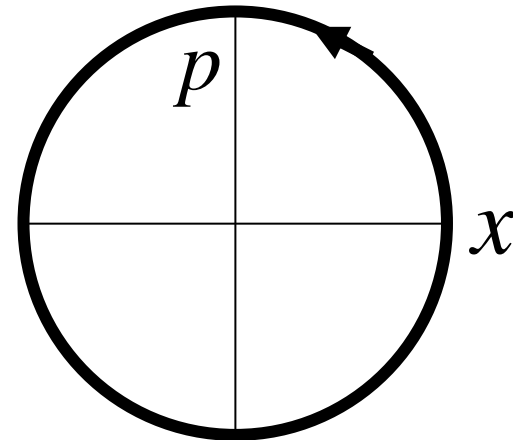
$$\hat{a}_{\vec{k}} = e^{-i\omega t} \tilde{a}_{\vec{k}}$$

Uwaga na x, p

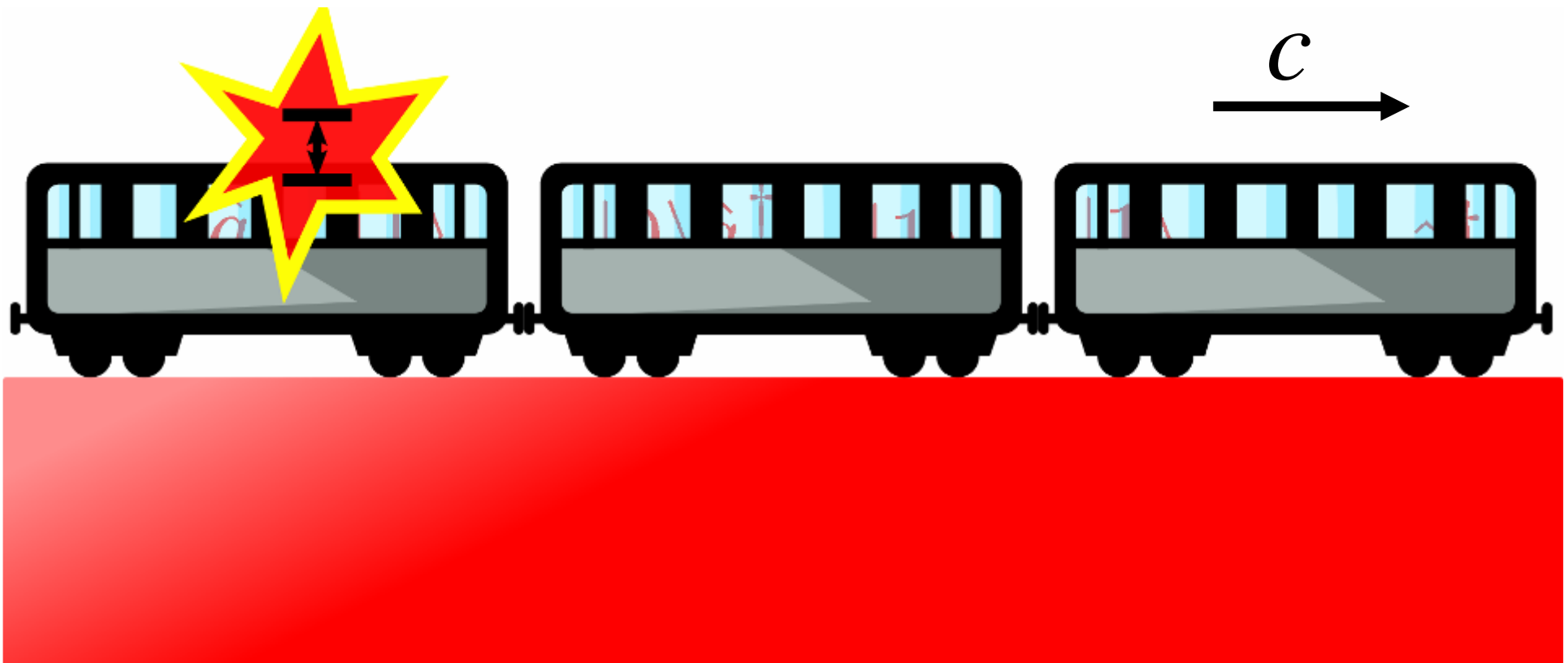
$$\hat{a}_{\vec{k}} = e^{-i\omega t} \tilde{a}_{\vec{k}}$$

$$\hat{\vec{E}}(\vec{x}, t) \propto \sum_{\vec{k}} \tilde{p}_{\vec{k}} \cdot \sqrt{\hbar\omega_k} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \\ + \tilde{x}_{\vec{k}} \cdot \sqrt{\hbar\omega_k} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \sin(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)$$

kwadratury pola E-M



Emisja spontaniczna



Eksperiment...

**Quantum interference between two
single photons emitted by two single
trapped atoms**

http://www.acqao.org/workshops/Kioloa_2006/Messin.pdf

Hamiltonian oddziaływania z polem wielomodowym

$$H_A = \hbar\omega_0\sigma_z/2$$

$$H_R = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\omega \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \hat{a}_{\vec{k},\lambda}$$

$$\kappa_{\vec{k},\lambda} = \frac{\vec{E}_{1\omega} \cdot \vec{d}}{\hbar} = \vec{d} \cdot \vec{e}_{k,\lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0(2\pi)^3}}$$

$$H_{int} = \hat{E} \cdot \hat{d} \simeq \hbar_{\vec{k},\lambda} (\kappa_{\omega}^* \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \sigma_- + \kappa_{\omega} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \sigma_+)$$

$$\tilde{H}_{int} = \hbar \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} \kappa_{\vec{k},\lambda}^* \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger \tilde{\sigma}_- e^{i(\omega-\omega_0)t} + \text{H.c.}$$

$$\begin{aligned} p_0 &= \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} \int_0^{\Delta T} dt |\langle 0, 1_{\vec{k},\lambda} | \tilde{H}_{int}/\hbar | 1, 0 \rangle|^2 \\ &= \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} |\kappa_{\vec{k},\lambda}|^2 \frac{4 \sin^2[(\omega - \omega_0)\Delta T/2]}{(\omega - \omega_0)^2} \end{aligned}$$

Złota reguła Fermiego

$$p_0 = \sum_{\lambda} \int d^3 \vec{k} |\kappa_{\vec{k}, \lambda}|^2 \frac{4 \sin^2[(\omega - \omega_0)\Delta T/2]}{(\omega - \omega_0)^2}$$

\downarrow
 $k^2 dk d \cos \theta d\phi$
 $\downarrow \quad \searrow$
 $\omega^2 d\omega / c^3 \quad 4\pi$

$\downarrow \int d\omega$
 $2\pi \Delta T$

$$\kappa_{\omega} = \frac{\vec{E}_{1\omega} \cdot \vec{d}}{\hbar} = \vec{d} \cdot \vec{e}_{k, \lambda} \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\epsilon_0(2\pi)^3}}$$

\downarrow
 $\frac{d^2}{3}$

$$A = \frac{1}{\pi\epsilon_0} \frac{\omega^3 d^2}{3\hbar c^3}$$

Emisja kolektywna 1: N atomów blisko

$$H_A = \hbar\omega_0 \sum_a \sigma_{a,z}/2 \quad \tilde{H}_{int} = \hbar \sum_\lambda \int d^3\vec{k} \kappa_{\vec{k},\lambda}^* \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^\dagger e^{i(\omega-\omega_0)t} \sum_a \tilde{\sigma}_{a,-} + \text{H.c.}$$

Sprzężenie jedynie poprzez operatory sumaryczne “pseudospinu”

$$\sum_z, \sum_\pm$$

Emisja kolektywna 1: N atomów blisko

niech $|\Psi\rangle = \prod_a \frac{|0\rangle_a + |1\rangle_a}{\sqrt{2}}$

moc emisji $\langle P \rangle \propto \langle e\vec{r}^2 \rangle$

$$\langle \Psi | \left(\sum_a e\hat{r}_a \right)^2 | \Psi \rangle \simeq N^2 |d_{10}|^2$$

N^2 razy większa moc emisji

Emisja przypadkowa: N atomów blisko

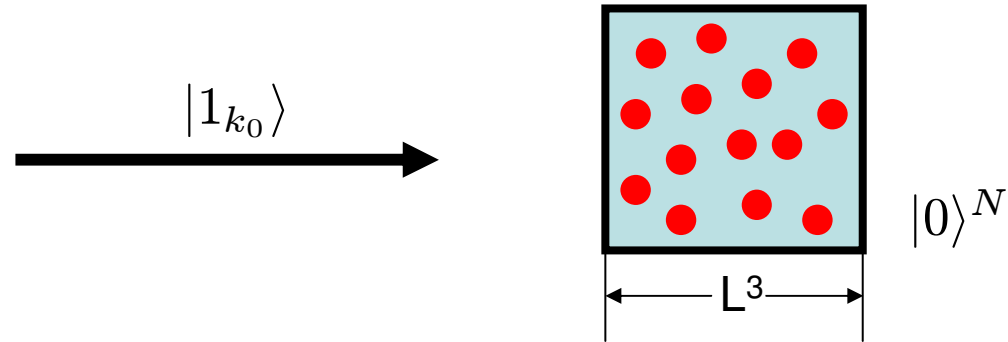
niech $|\Psi\rangle = \prod_a \frac{|0\rangle_a + e^{i\phi_a}|1\rangle_a}{\sqrt{2}}$

$$\langle\Psi|\sum_a e^{i\hat{r}_a}|\Psi\rangle = \sum_a e^{i\phi_a} \simeq 0$$

$$\left\langle \left(\sum_a e^{i\hat{r}_a} \right)^2 \right\rangle \simeq N|d_{01}|^2$$

N razy większa moc emisji

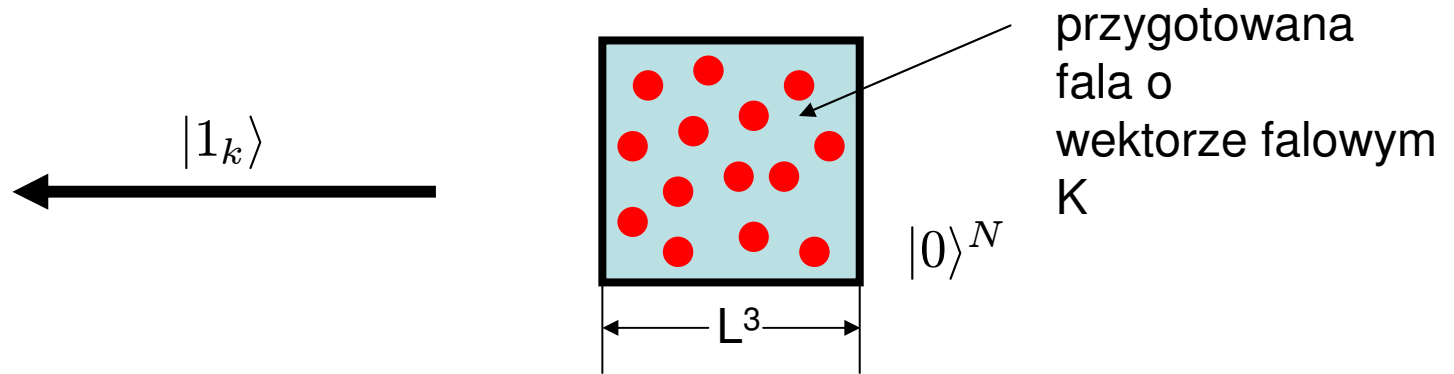
Fale spinowe



$$\tilde{H}_{int} = \hbar \sum_{\lambda} \int d^3 \vec{k} \kappa_{\vec{k}, \lambda} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda} e^{i(\omega - \omega_0)t} \sum_a e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_a} \tilde{\sigma}_{a,+} + \text{H.c.}$$

$$\begin{aligned} |\Psi_f\rangle &= \frac{\sum_a \sigma_{a,+} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_a}}{\sqrt{N}} |0\rangle^N \\ &= \frac{\sum_a e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}_a} |0 \dots 1_a \dots 0\rangle}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Emisja z fali spinowej



$$|\Psi_i\rangle = \frac{\sum_a \sigma_{a,+} e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}_a}}{\sqrt{N}} |0\rangle^N$$

$$\tilde{H}_{int} = \hbar \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} \kappa_{\vec{k},\lambda} \hat{a}_{\vec{k},\lambda}^{\dagger} e^{i(\omega-\omega_0)t} \sum_a e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}_a} \tilde{\sigma}_{a,-} + \text{H.c.}$$

chcemy znaleźć $\int_0^T dt \frac{\tilde{H}_{int}}{i\hbar} |\Psi_i, 0\rangle$

Emisja z fali spinowej

$$\tilde{H}_{int} = \hbar \sum_{\lambda} \int d^3 \vec{k} \kappa_{\vec{k}, \lambda} \hat{a}_{\vec{k}, \lambda}^{\dagger} e^{i(\omega - \omega_0)t} \sum_a e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}_a} \tilde{\sigma}_{a, -} + \text{H.c.}$$

$$\int_0^T dt \frac{\tilde{H}_{int}}{i\hbar} |\Psi_i, 0\rangle$$

$\delta_{a, a'}$ $|\Psi_i\rangle = \frac{\sum_a' \sigma_{a', +} e^{i\vec{K} \cdot \vec{r}_a}}{\sqrt{N}} |0\rangle^N$

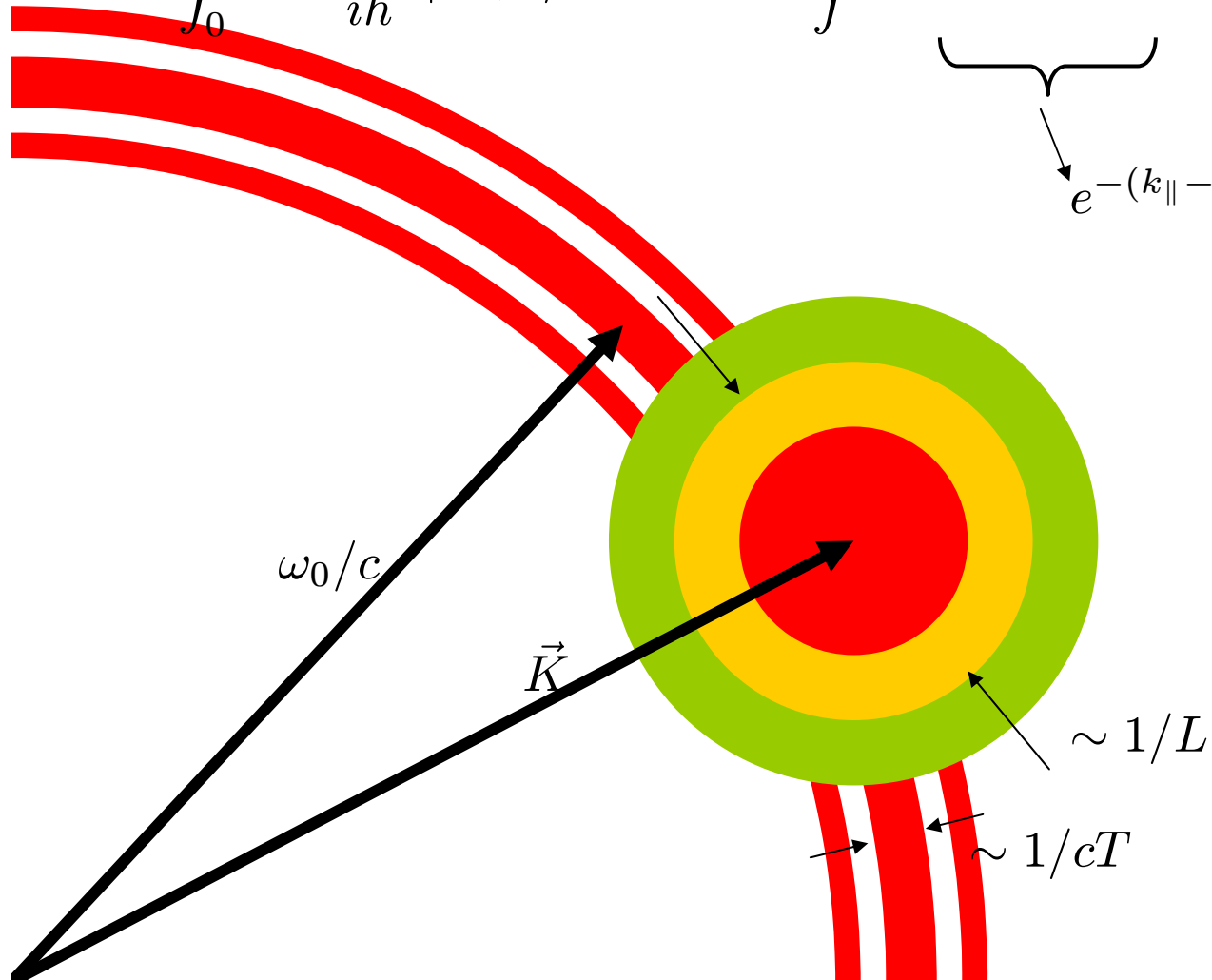
$$= \frac{-i\kappa}{\sqrt{N}} \int d^3 k \underbrace{\int dt e^{i(ck - \omega_0)t} \sum_a e^{i(\vec{K} - \vec{k})r_a} \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger}}_{\frac{2 \sin(ck - \omega_0) \frac{T}{2}}{(ck - \omega_0)}} |0, 0\rangle$$

$$\simeq \int d^3 r n(r) e^{i(\vec{K} - \vec{k})r}$$

$$\simeq N e^{-(\vec{K} - \vec{k})^2 \frac{L^2}{2}}$$

Emisja z fali spinowej

$$\int_0^T dt \frac{\tilde{H}_{int}}{i\hbar} |\Psi_i, 0\rangle = -i\kappa\sqrt{N} \int d^3k e^{-\underbrace{(\vec{k}-\vec{K})^2 \frac{L^2}{2}}_{e^{-(k_{\parallel}-K)^2 \frac{L^2}{2}} e^{-k_{\perp}^2 \frac{L^2}{2}}} \frac{2 \sin(ck - \omega_0) \frac{T}{2}}{(ck - \omega_0)} \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} |0, 0\rangle$$



Emisja z fali spinowej

$$|f\rangle = -i\kappa\sqrt{N} \int d^3k e^{-(k_{\parallel}-K)^2 \frac{L^2}{2}} e^{-k_{\perp}^2 \frac{L^2}{2}} \frac{2 \sin(ck - \omega_0) \frac{T}{2}}{(ck - \omega_0)} \hat{a}_{\vec{k}}^{\dagger} |0, 0\rangle$$

$$p_0 = \langle f|f\rangle = N\kappa^2 e^{-(k_{\parallel}-K)^2 L^2} \int d^3k e^{-k_{\perp}^2 L^2} \frac{2 \sin(ck - \omega_0) \frac{T}{2}}{(ck - \omega_0)}$$

↓ $\frac{\pi}{L^2}$
↓ $\frac{2\pi T}{c}$

dopasowanie fazowe

$$p_0 = \frac{e^{-(k_0-K)^2 L^2}}{3 \cdot 2^4} \frac{N}{\pi L^2} \frac{2d^2\omega}{\hbar\epsilon_0 c} = \frac{e^{-(k_0-K)^2 L^2}}{3 \cdot 2^4} \frac{N\sigma}{A} \frac{T}{T_1}$$

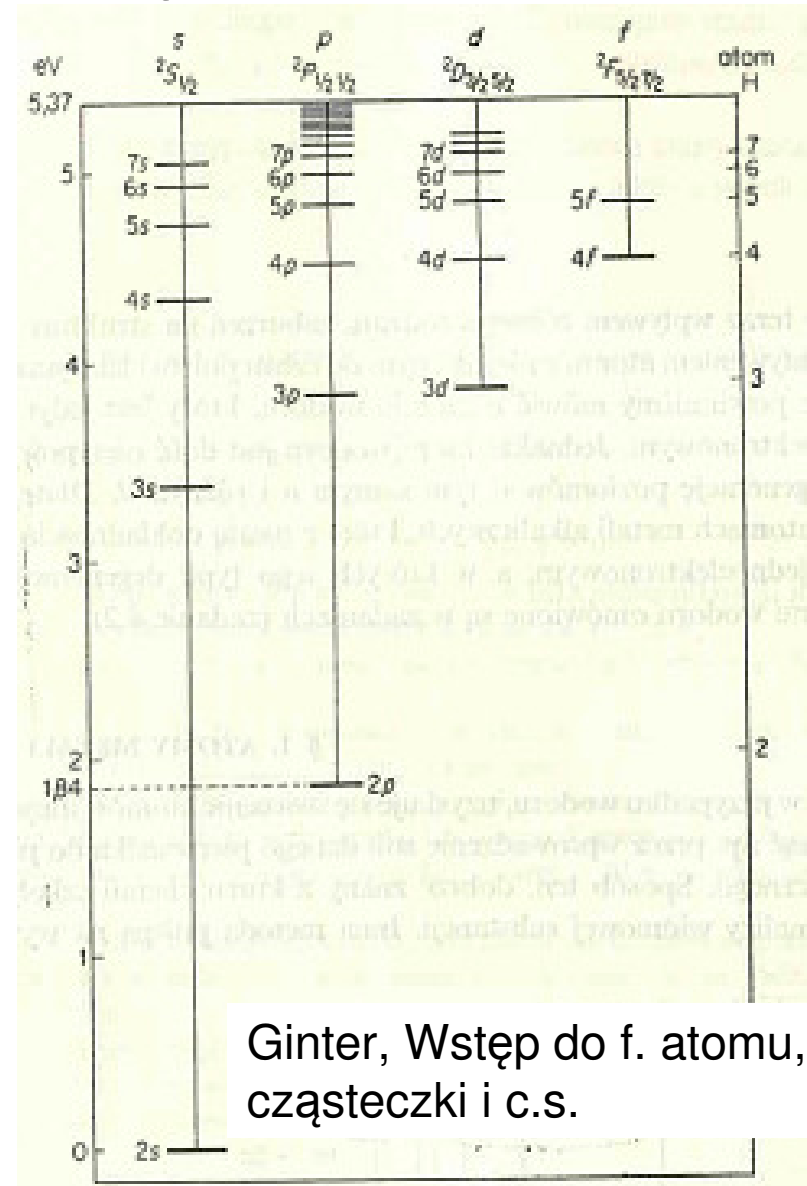
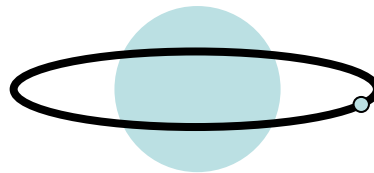
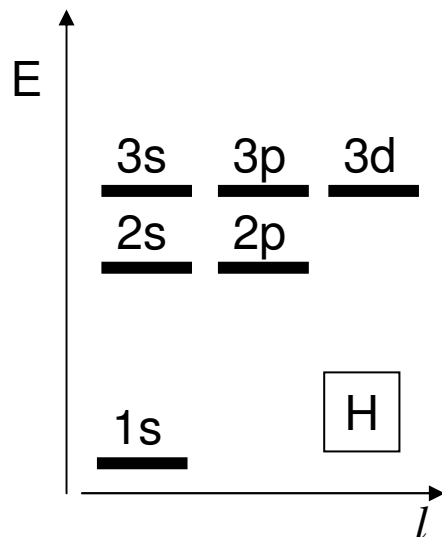
grubość optyczna

emisja spontaniczna

Atom ze spinem i jądrem

Proste atomy

- Zamknięte powłoki wewnętrzne, o ustalonym stanie kwantowym
- Elektron(y) walencyjne poruszają się w potencjale ekranowanego jądra



Struktura subtelna: spin elektronu

- Elektron ma wewnętrzny moment magnetyczny μ_B - **spin**
- Ruch **orbitalny** elektronu (l) oddziałuje ze spinem
- W lekkich atomach energia tego oddziaływania jest mała w porównaniu z odległościami między poziomami

$$H_{int} \propto \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$$



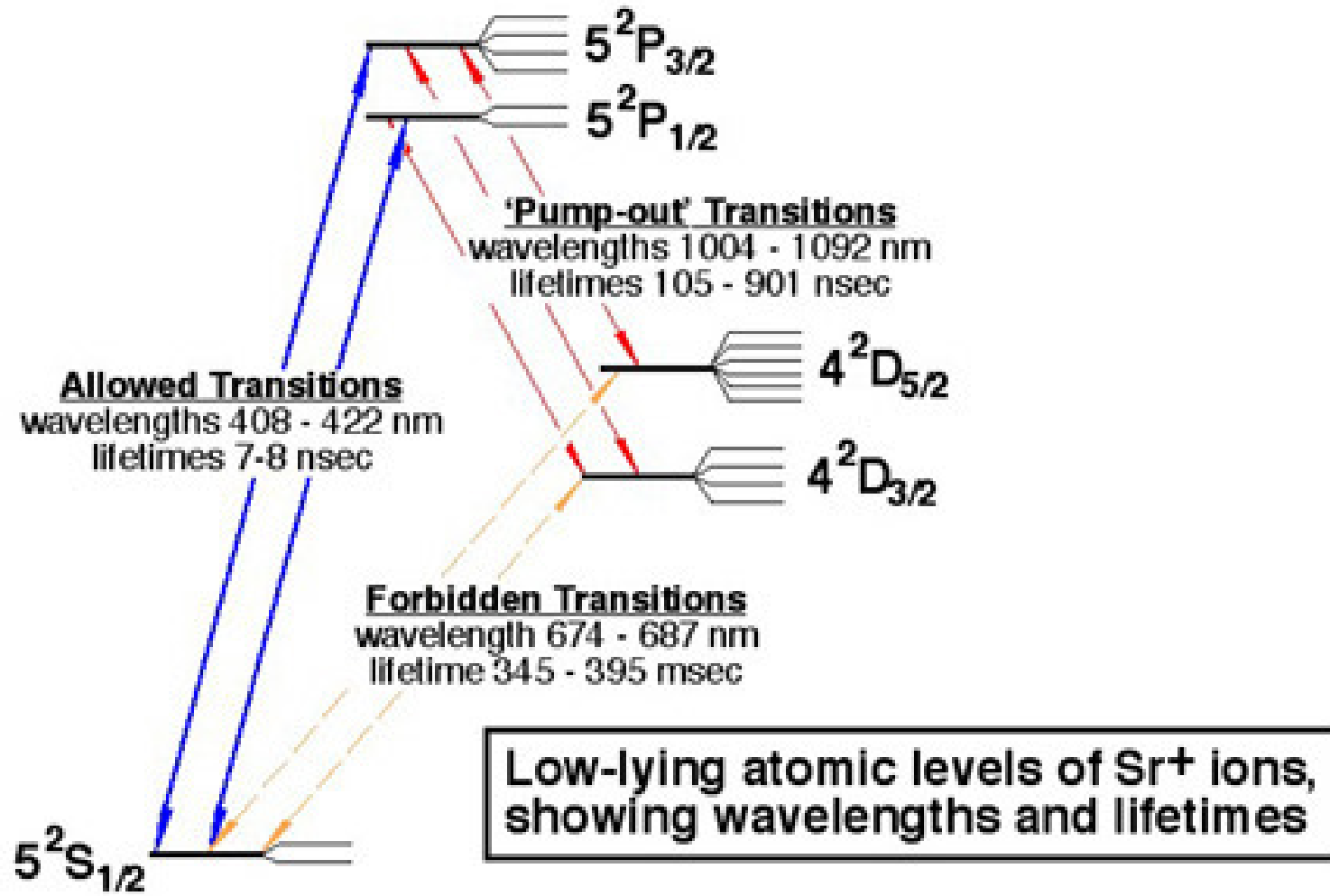
W przybliżeniu Russela-Saundersa

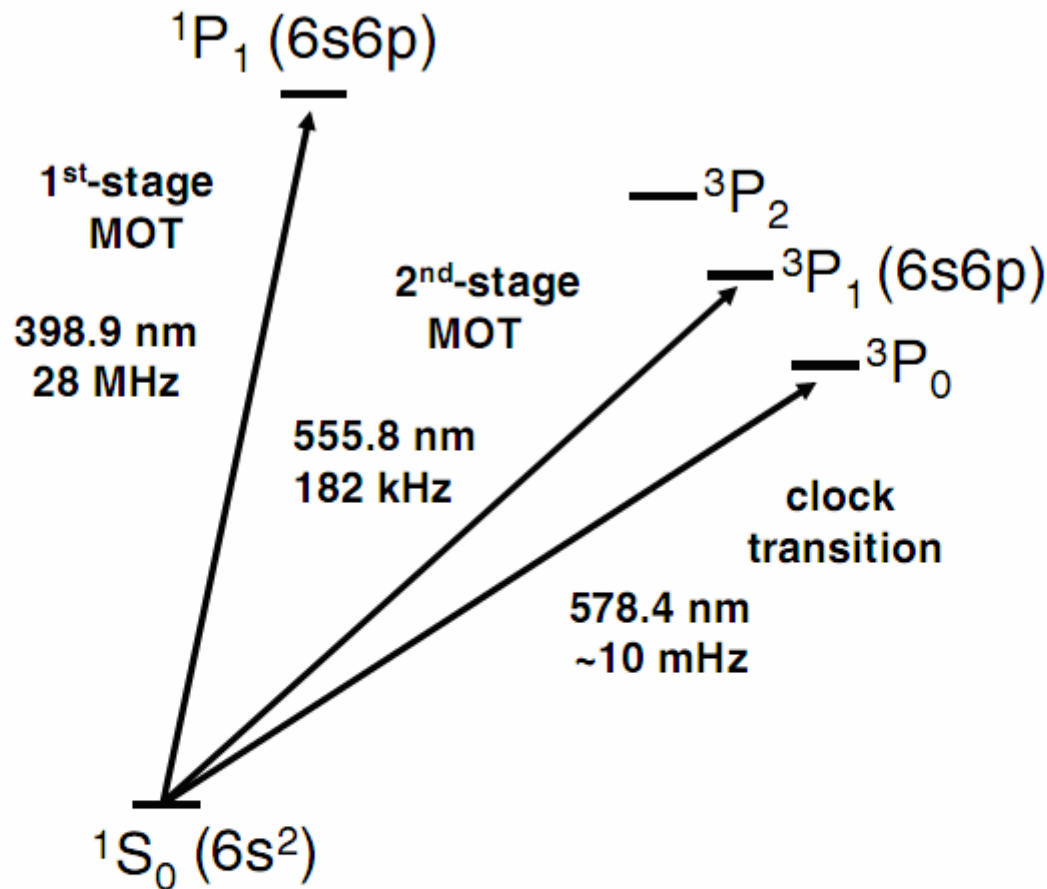
- L – moment orbitalny
- S – spin
- Wzajemne ustawienie charakteryzuje J – całkowity moment pędu

$$H_{int} \propto \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \frac{1}{2} [J(J + 1) - L(L + 1) - S(S + 1)]$$



Przykład





[Xe] $4f^{14} 6s^2$

FIG. 1. Ytterbium atomic energy levels. Wavelengths and natural linewidths are indicated for the relevant cooling, trapping, and clock transitions. The fine-structure splitting is not to scale. The hyperfine structure for the ^{171}Yb ($I = 1/2$) and ^{173}Yb ($I = 5/2$) isotopes is ignored for clarity.

C. W. Hoyt et al. PRL 95, 083003 (2005).

Atomy wieloelektronowe

Singlet

$$|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$$

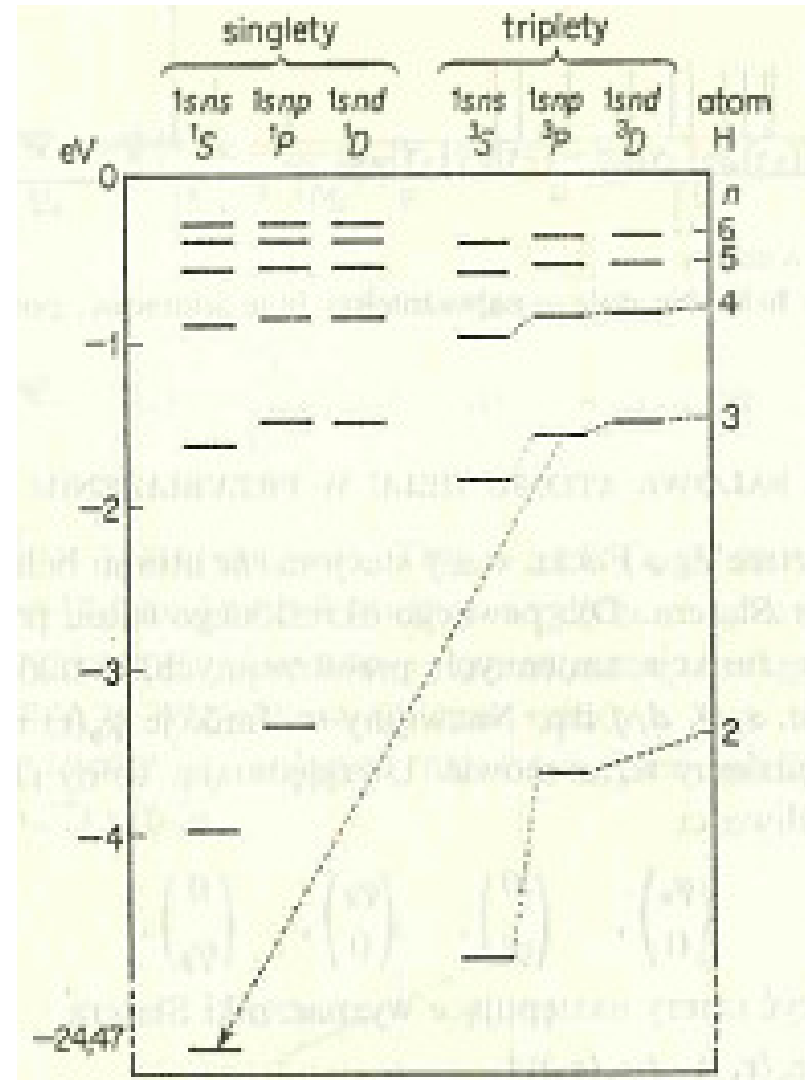
Tryplet

$$|\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$$

$$|\downarrow\downarrow\rangle$$

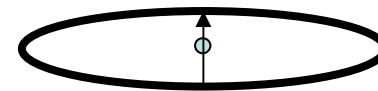
He



Struktura nadsubtelna: spin jądra

- Jądro (też) ma spin i
- Ruch elektronów (J) oddziałuje ze spinem
- Energia tego oddziaływania jest bardzo mała. Przeważa oddziaływanie dipoli magnetycznych

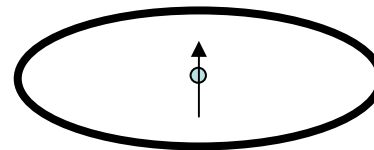
$$H_{int} \propto \hat{\vec{I}} \cdot \hat{\vec{J}}$$



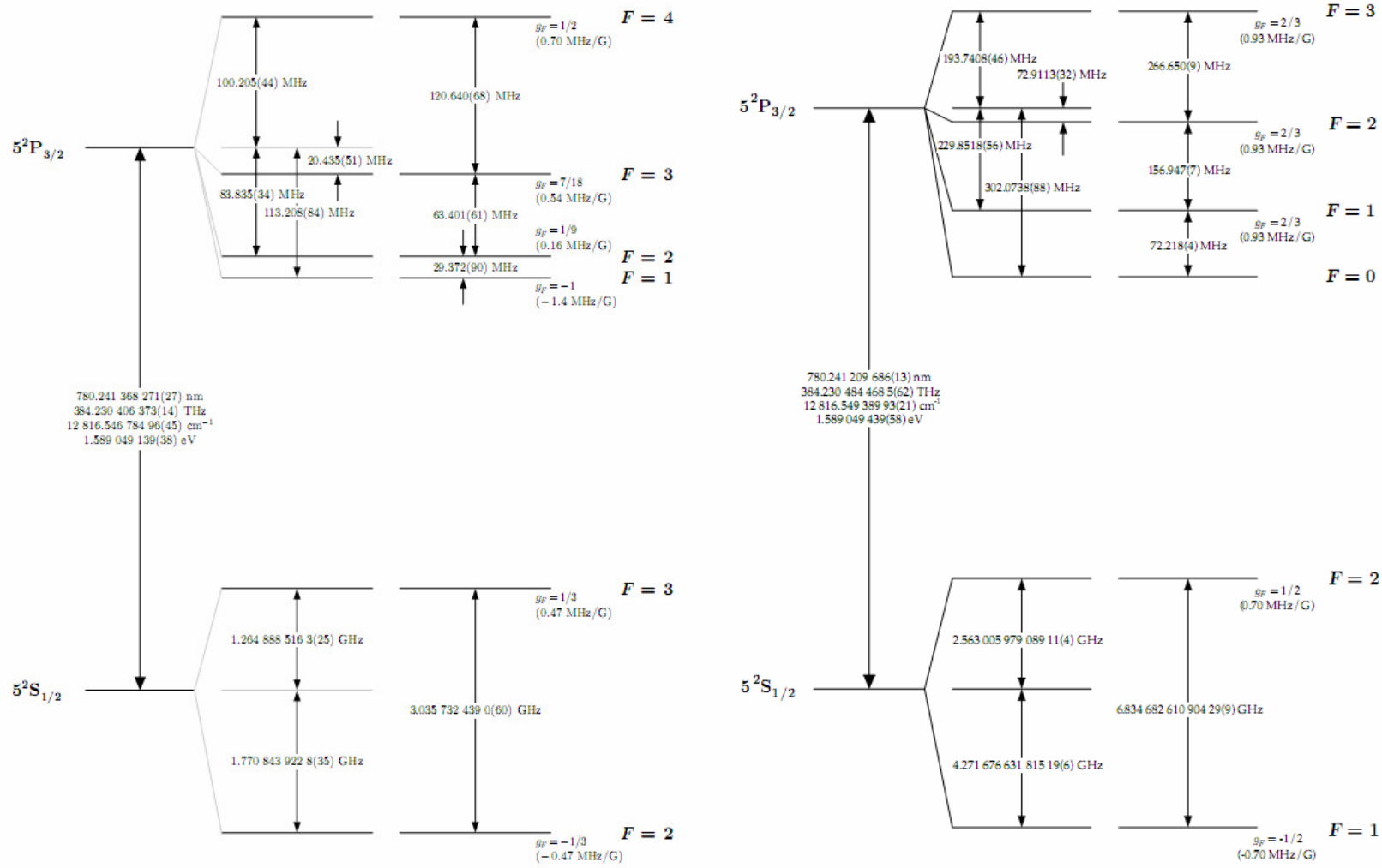
Wynik

- J – całkowity moment pędu elektronów
- I – jądra
- Wzajemne ustawienie charakteryzuje F – całkowity moment pędu

$$H_{int} \propto \hat{\vec{J}} \cdot \hat{\vec{I}} = \frac{1}{2} [F(F + 1) - J(J + 1) - I(I + 1)]$$



Przykład

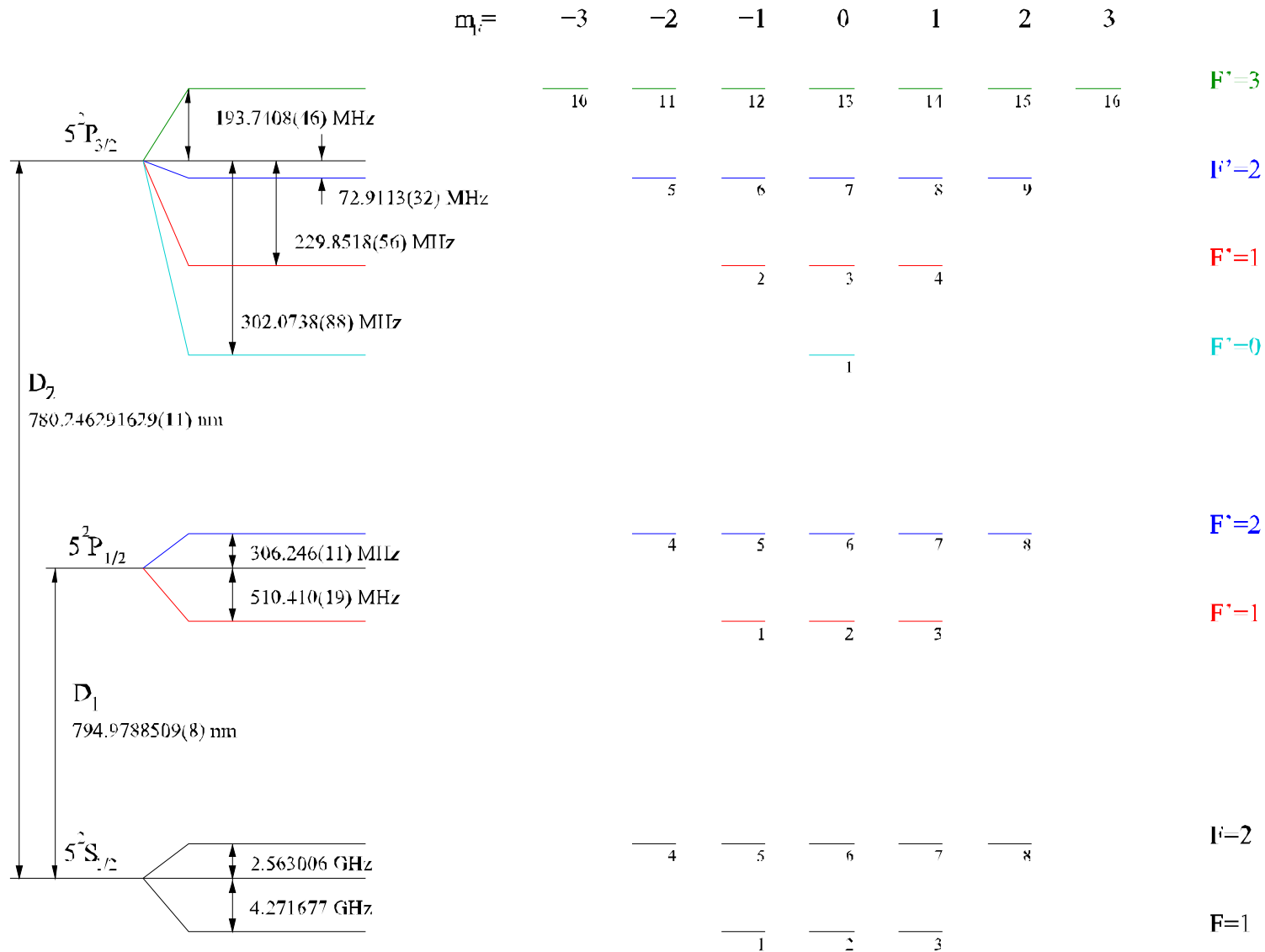


Rb-85

Steck, Rb D-Line data

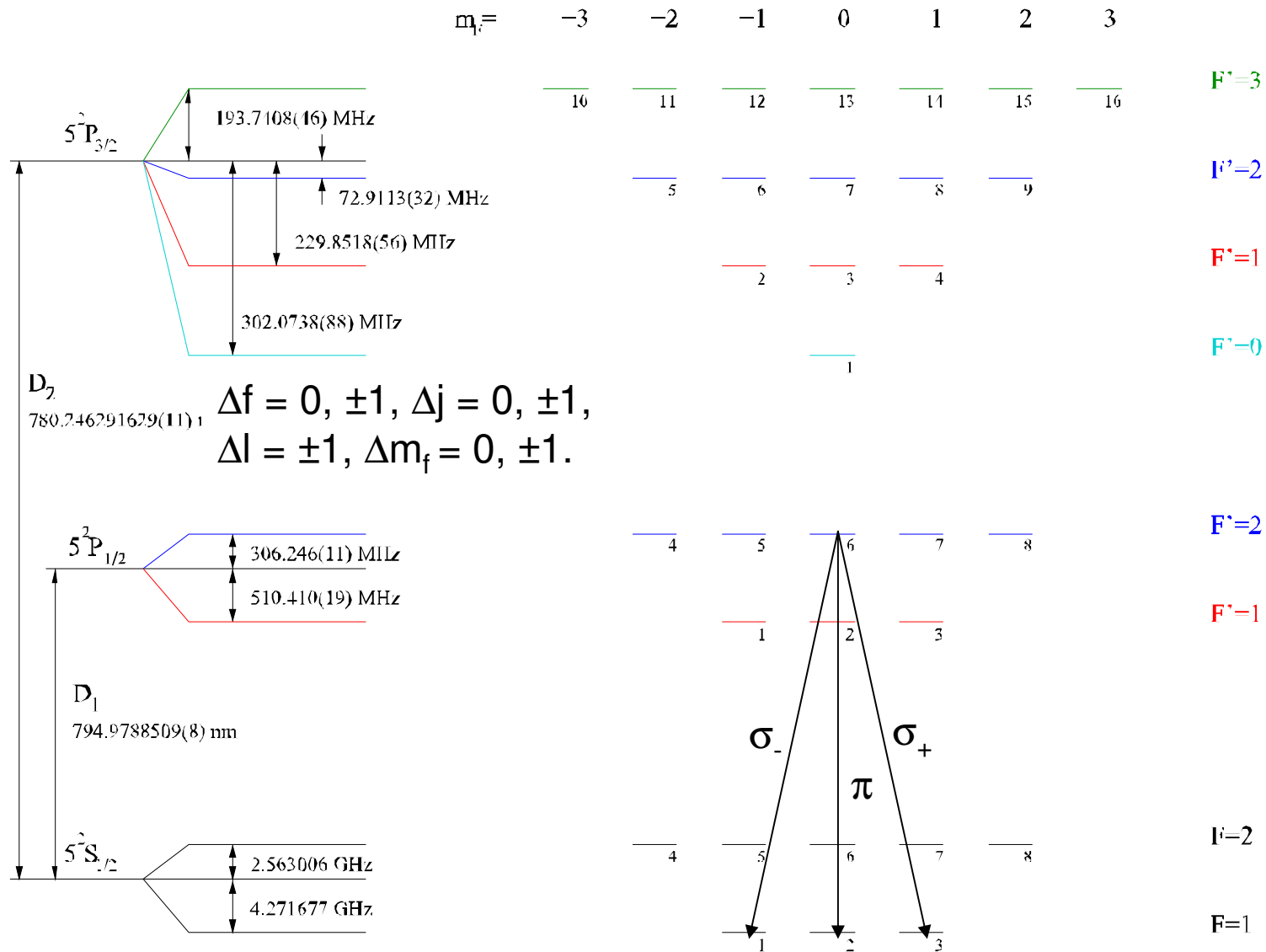
Rb-87

Przykład



Rb-87

Reguły wyboru



Rb-87

W domu

1. Rozpisać rachunek prowadzący do ostatniej linii na slajdzie “Hamiltonian oddziaływania z polem wielomodowym”
2. Zapisać stan $5^2P_{3/2} F=0$ (Rb-87) w bazie funkcji o określonym $L=1$, L_z , $S=1/2$, S_z , $I=3/2$, I_z