

# Oscylator harmoniczny tłumiony – drgania wymuszone

Oscylator swobodny tłumiony

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-1/2\Gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2$$

Jeśli  $\frac{1}{2}\Gamma \ll \omega_0$   $\longrightarrow$

**Słabe tłumienie:**

$$e^{-1/2\Gamma t}$$

Praktycznie stałe dla jednego okresu, to energia układu praktycznie stała...

Po wielu okresach, zanik wykładniczy :

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Czas zaniku

(czas życia oscylatora)

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

Czy badając drgania wymuszone oscylatora można uzyskać informacje o czasie życia oscylatora? Tak! Zbadajmy drgania stacjonarne pod wpływem harmonicznej siły wymuszającej...

# Drgania stacjonarne oscylatora tłumionego – harmoniczna siła wymuszająca

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t) \quad *$$

Szeroką klasę funkcji  $F(t)$  możemy przedstawić jako:

$$F(t) = \sum F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

a potem skorzystać z zasady superpozycji...

Drgania stacjonarne (założenia):

- drgania niestacjonarne wytłumione po czasie kilku  $\tau$
- amplituda oscylacji proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej  $F_0$
- przesunięcie fazowe wyznaczone przez przesunięcie fazowe siły wymuszającej

$$x_s(t) = C \cos(\omega t + \varphi) = -C \sin(\varphi) \sin(\omega t) + C \cos(\varphi) \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Bezpośrednie podstawienie do równania \* daje warunki na  $A$  i  $B$ :

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{ab}$$

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{el}$$

$A_{ab}$  – amplituda absorpcyjna,

$A_{el}$  – amplituda elastyczna:

# Jak absorbowana jest energia?

Rozważmy uśrednioną w czasie (jednego okresu) moc pobieraną przez oscylator:

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \frac{dx_s}{dt} dt$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A_{ab} \sin(\omega t) + A_{el} \cos(\omega t) \quad \frac{dx_s(t)}{dt} = \omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_0 \cos(\omega t) [\omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)] dt$$

$$\langle P_s \rangle = F_0 \omega A_{ab} \langle \cos^2(\omega t) \rangle - F_0 \omega A_{el} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] dt = \frac{1}{2}$$

Gdyż  $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t) dt = 0$     Podobnie:  $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$

# Jak absorbowana jest energia?

Za absorpcję energii odpowiedzialna jest część przesunięta w fazie o  $90^\circ$  (lub  $\pi/2$ )!

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}$$

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$P_0 = \frac{F_0^2}{2m\Gamma}$$

Szukamy  $\omega$  dla których:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} P_0$$

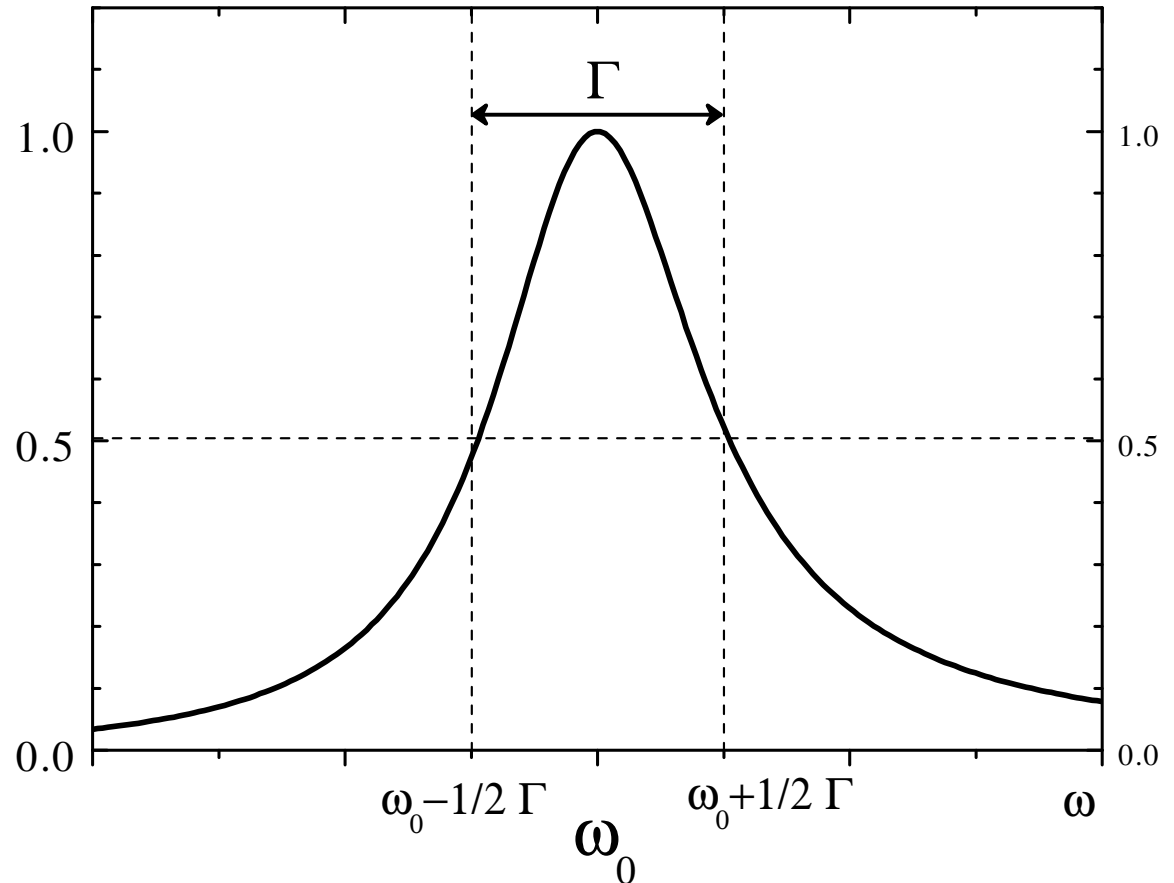


$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega$$



$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma$$

$P(\omega)/P(\omega_0)$



$$(\Delta\omega)_{rez} = \Gamma \text{ lub } (\Delta\omega)_{rez} \tau = 1$$

Szerokość krzywej ma związek ze średnim czasem życia tłumionych drgań swobodnych! Ważne dla spektroskopii (rozkład Lorentzowski...)

# Amplituda i przesunięcie fazowe

$$A_{ab} = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$A_{el} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega}$$

Daleko od rezonansu...

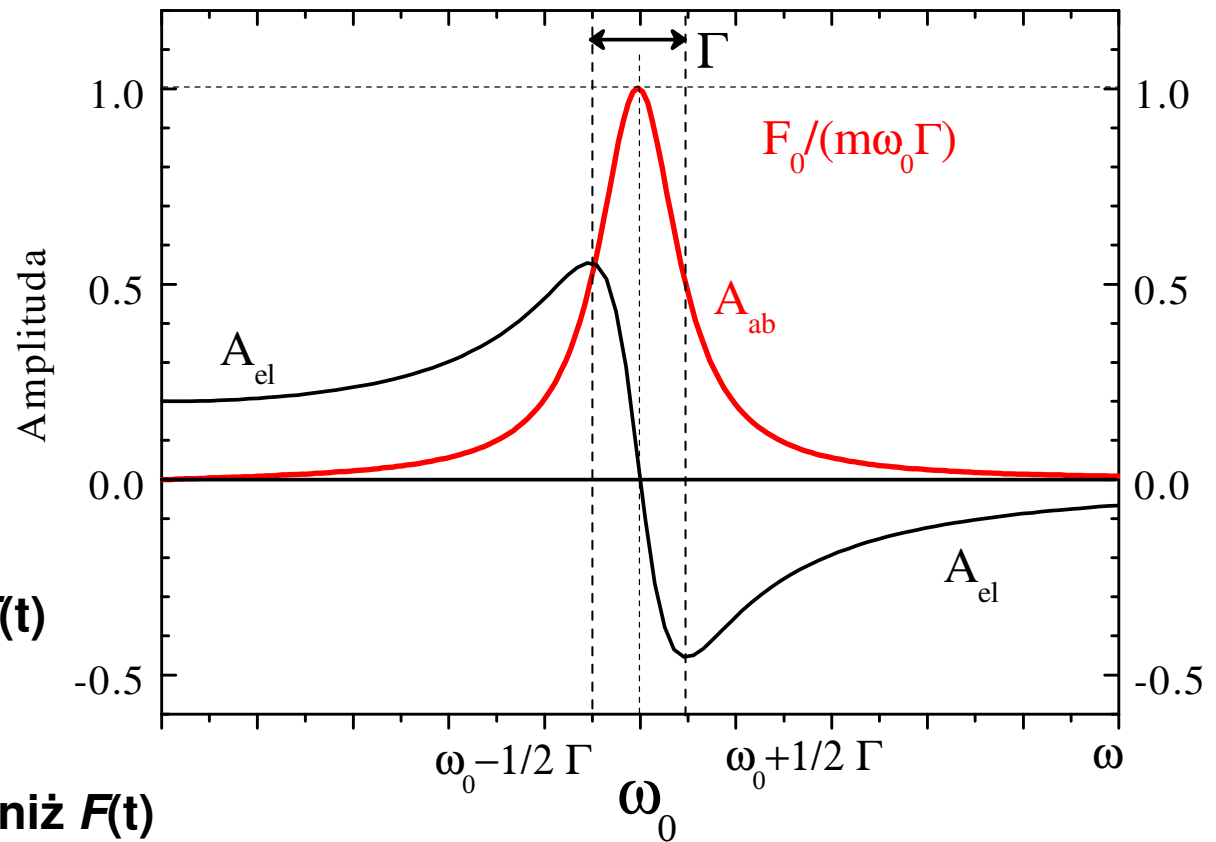
$$x_s(t) \approx A_{el} \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) \approx \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow$  zgodnie z  $F(t)$   
( $\varphi=0$ )

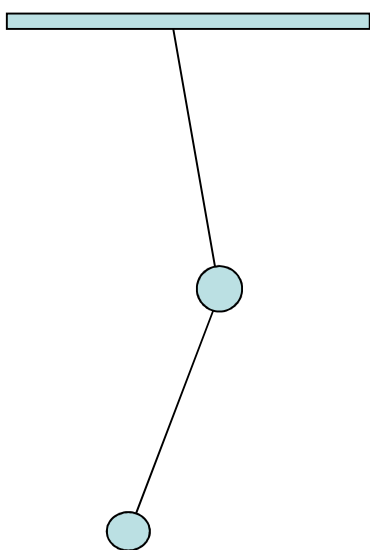
$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$

$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow$  Przeciwnie niż  $F(t)$   
 $\varphi = \pi$

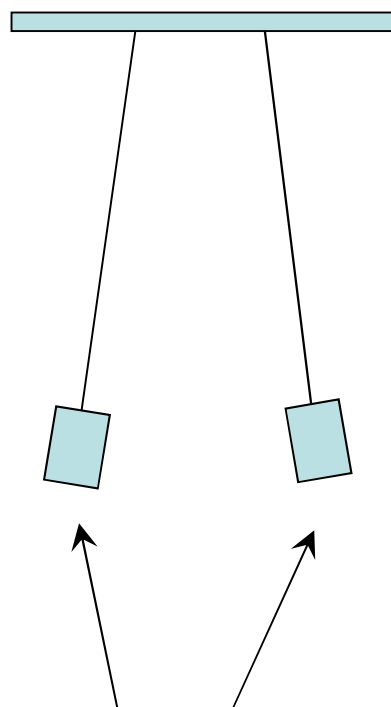


Sprawdźmy to w doświadczeniu...

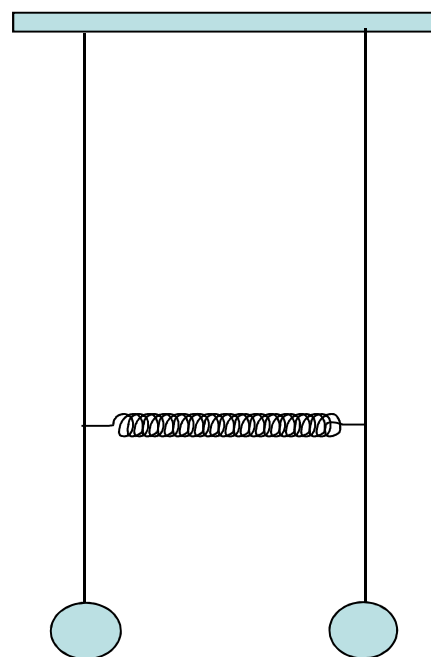
# Drgania swobodne układu o dwóch stopniach swobody



Wahadło podwójne  
(płaskie)



Magnesy  
(odpychające się)  
na prętach



Wahadła sprzężone

# Liniowość i zasada superpozycji

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + \beta\psi^2 + \gamma\psi^3 + \dots$$

Liniowe, tylko wtedy gdy  $\beta = 0, \gamma = 0, \dots itd.$  Dlaczego?

Czyli równanie (jednorodne)  $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi$  lub równanie niejednorodne  $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + F(t)$

Przypomnienie:

- **suma dwu dowolnych rozwiązań równania liniowego i jednorodnego jest również rozwiązaniem tego równania.**
- **dla sumy rozwiązań równania liniowego, warunki początkowe są sumą warunków początkowych**
- **suma sił wymuszających dla dwóch rozwiązań, jest siłą wymuszającą dla rozwiązania będącego sumą rozwiązań...**

Najbardziej ogólny ruch układu o dwu stopniach swobody, opisanego równaniami liniowymi stanowi superpozycję dwu niezależnych, jednoczesnych ruchów harmonicznyc – **drgań własnych** lub inaczej **drgań normalnych** układu.

Jak je znaleźć?

# Dygresja – układy nieliniowe

Niech reakcja pewnego fizycznego układu będzie nieliniową funkcją zaburzenia...

$$\psi(t) = \alpha\varphi(t) + \beta\varphi^2(t) + \gamma\varphi^3(t)$$

Założmy, że zaburzenie jest sumą dwóch oscylacji harmoniczných:

$$\varphi(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi(t) = \alpha(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \beta(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 + \gamma(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3$$

Jeśli  $\beta = \gamma = 0$  to odpowiedź układu będzie superpozycją dwóch fal harmoniczných o częstościach  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Jeśli  $\beta \neq 0$  oraz  $\gamma \neq 0$  to odpowiedź układu będzie bardziej skomplikowana...

Przedstawmy teraz  $\psi(t)$  jako superpozycję oscylacji harmoniczných.

**Skorzystajmy z tożsamości dla funkcji  $f(x)=\cos(x)$**

**Ponieważ**  $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$

$\Rightarrow f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y)$

**Jeśli mamy iloczyn trzech funkcji:**

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z) &= \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)]f(z) = \\ &= \frac{1}{2}f(x+y)f(z) + \frac{1}{2}f(x-y)f(z) = \\ &= \frac{1}{4}f(x+y+z) + \frac{1}{4}f(x+y-z) + \frac{1}{4}f(x-y+z) + \frac{1}{4}f(x-y-z) \end{aligned}$$

## Nieliniowość kwadratowa:

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 &= (f(\omega_1 t) + f(\omega_2 t))^2 = \\ &f(\omega_1 t)f(\omega_1 t) + 2f(\omega_1 t)f(\omega_2 t) + f(\omega_2 t)f(\omega_2 t) = \\ &= \frac{1}{2} f(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} f(0) + f(\omega_1 t + \omega_2 t) + f(\omega_1 t - \omega_2 t) + \frac{1}{2} f(2\omega_2 t) + \frac{1}{2} f(0)\end{aligned}$$

Człon kwadratowy odpowiedzi układu jest superpozycją oscylacji o częstościach:  **$2\omega_1$ ,  $0$ ,  $2\omega_2$ ,  $\omega_1 + \omega_2$ ,  $\omega_1 - \omega_2$** . Nazywamy je częstościami kombinacyjnymi.

Dla  $\beta \neq 0$  nawet w sytuacji gdy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , odpowiedź układu będzie zawierać **oscylacje o częstości  $2\omega$  (generacja drugiej harmoniczej)**.

**Zjawisko to wykorzystuje się w optyce do generacji światła o dwukrotnie większej częstości – tak działa np. wskaźnik laserowy emitujący zielone Promieniowanie o długości fali 532nm (1064/2 nm)...**

**Mamy tu do czynienia z procesem dwufotonowym – dwa fotony zamieniają się w ośrodku nieliniowym w jeden foton o dwukrotnie większej energii...**

## Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia:

$$(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3 = (f(\omega_1 t) + f(\omega_2 t))^3 = \\ f(\omega_1 t)^3 + 3f^2(\omega_1 t)f(\omega_2 t) + 3f(\omega_1 t)f^2(\omega_2 t) + f^3(\omega_2 t)$$

Zbadajmy poszczególne człony w sumie:

$$f(\omega_1 t)^3 = f(\omega_1 t)f(\omega_1 t)f(\omega_1 t) = \frac{1}{2}(f(2\omega_1 t) + f(0))f(\omega_1 t) =$$

$$= \frac{1}{4}f(3\omega_1 t) + \frac{3}{4}f(\omega_1 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstości } 3\omega_1 \text{ oraz } \omega_1$$

$$f^2(\omega_1 t)f(\omega_2 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstości } 2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2 \text{ oraz } \omega_2$$

$$f(\omega_1 t)f^2(\omega_2 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstości } 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1 \text{ oraz } \omega_1$$

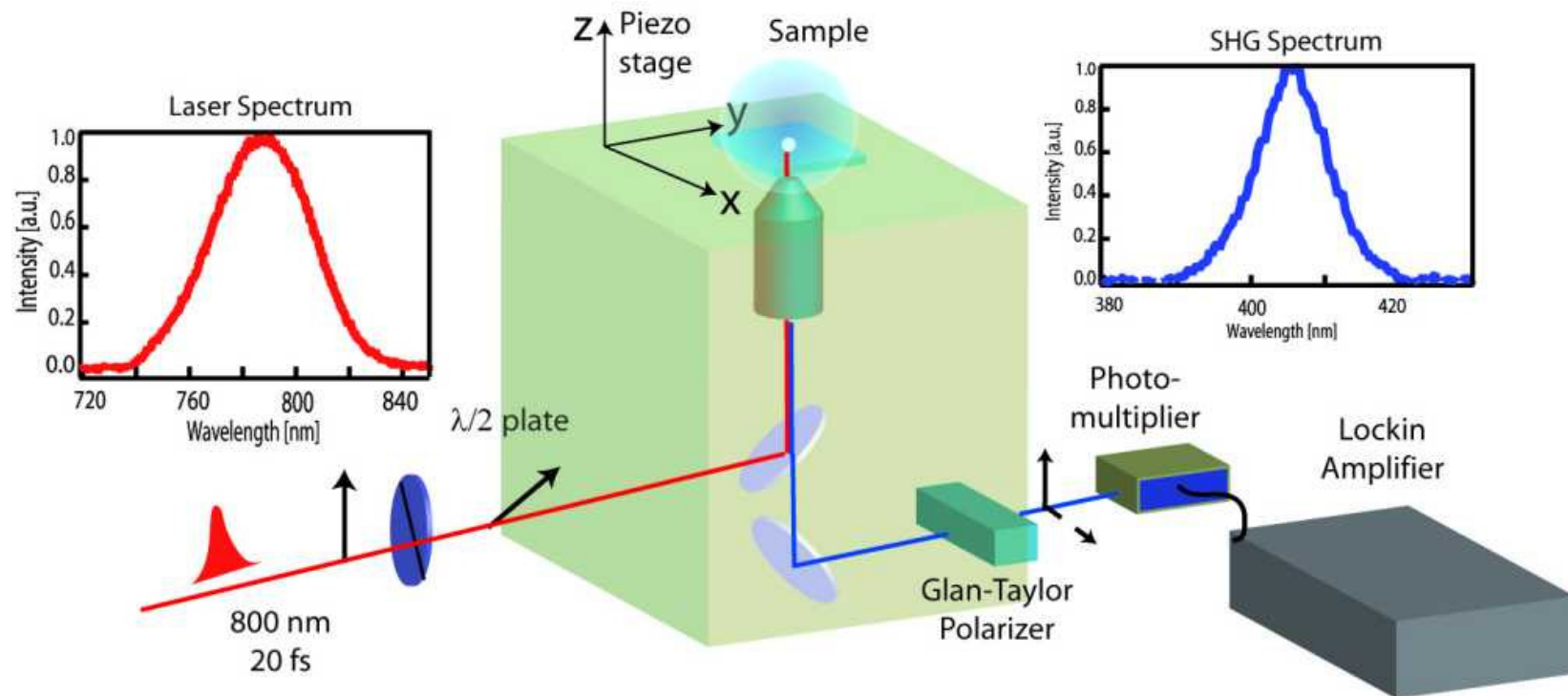
$$f(\omega_2 t)^3 \quad \text{Zawiera oscylacje o częstości } 3\omega_2 \text{ oraz } \omega_2$$

Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia jest superpozycją oscylacji harmoniczných o częstościach:

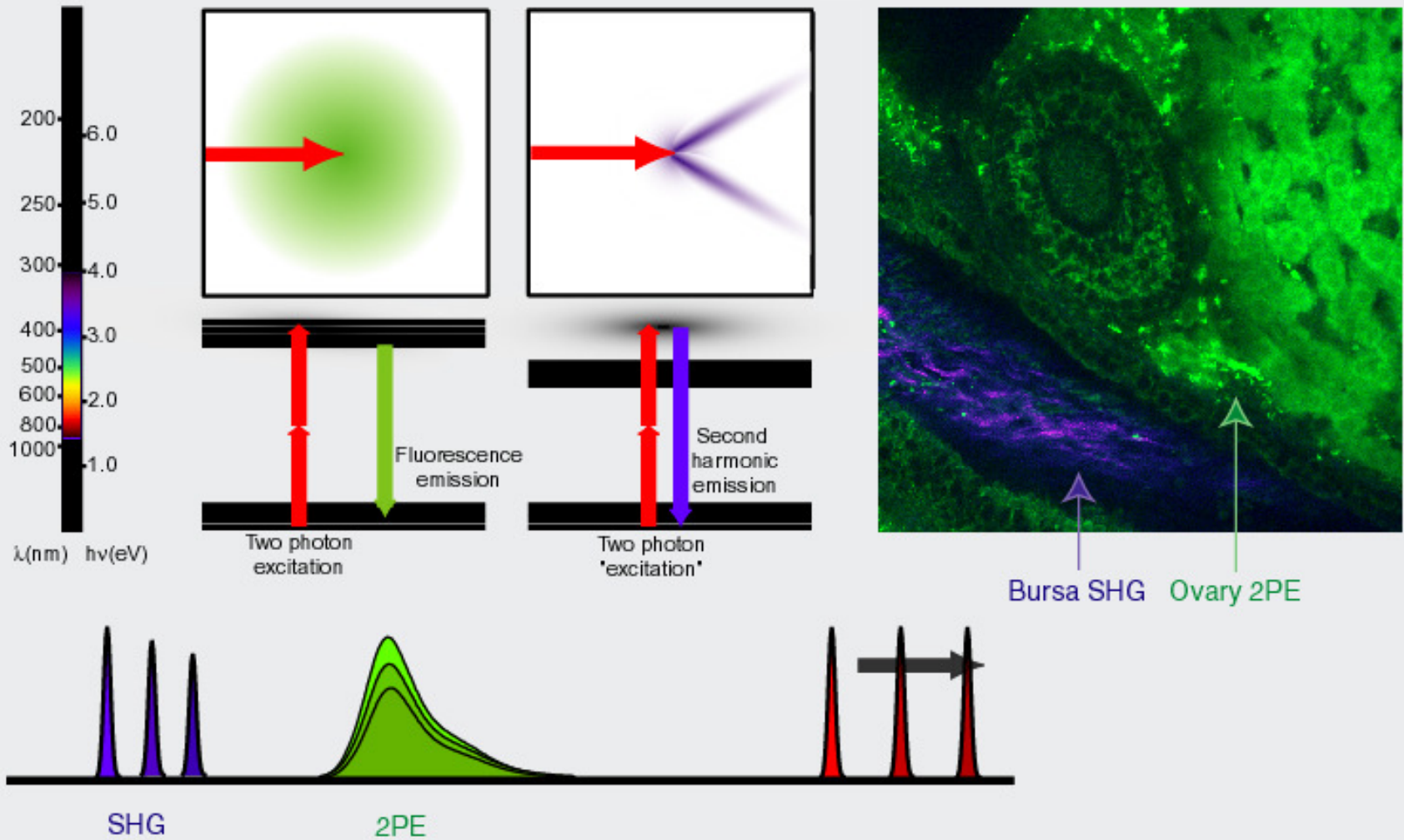
$$3\omega_1, \omega_1, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1, 3\omega_2, \omega_2,$$

*Gdy  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  mamy tylko nieparzyste harmoniczne:  $3\omega, \omega$*

*Na dokładniejsze badania zjawisk nieliniowych przyjdzie czas na optyce...*



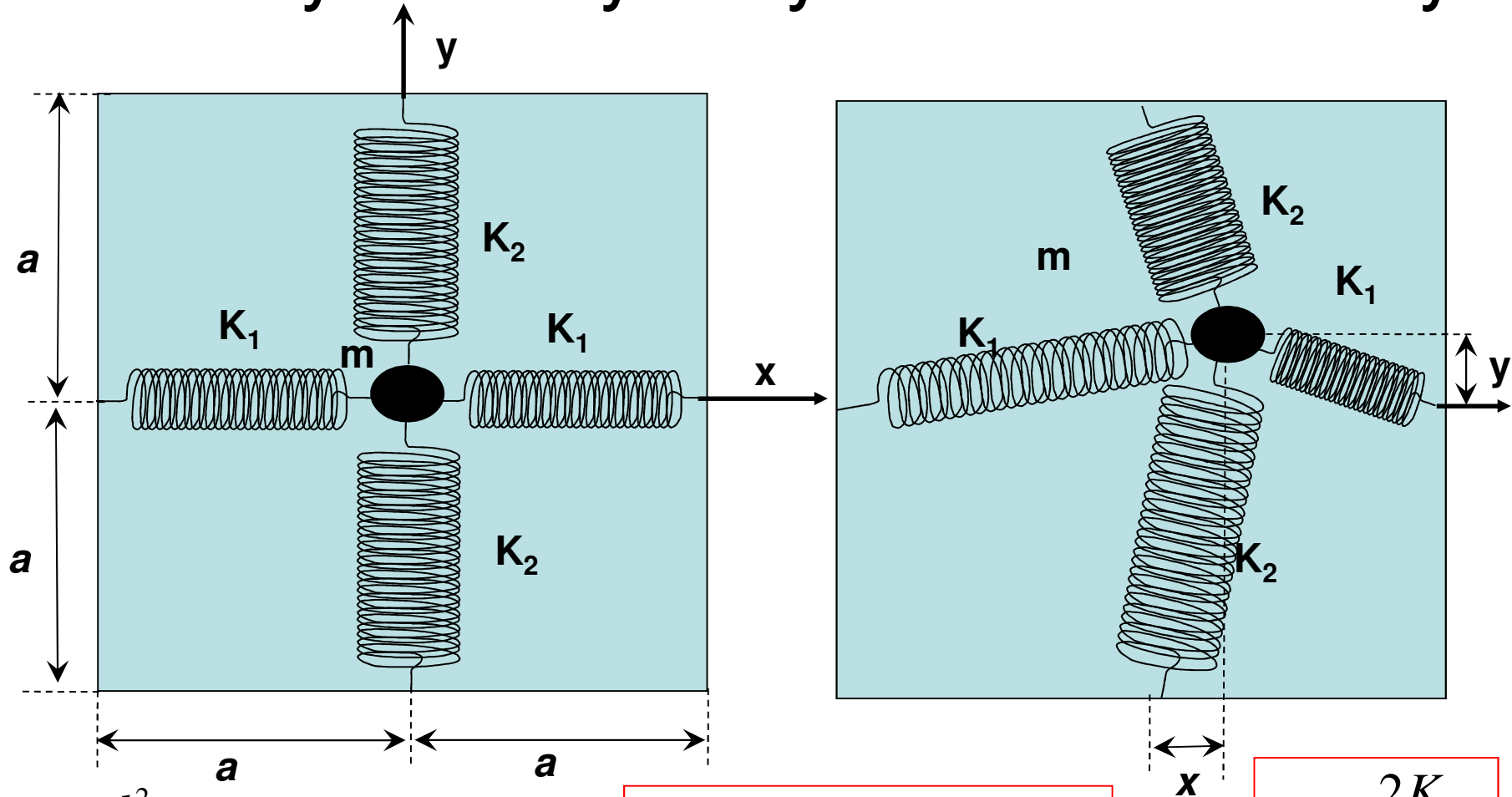
<http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration>



<http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration>

Wracamy do układów liniowych o dwóch stopniach swobody...

# Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2K_1 x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2K_2 y$$



$$x(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

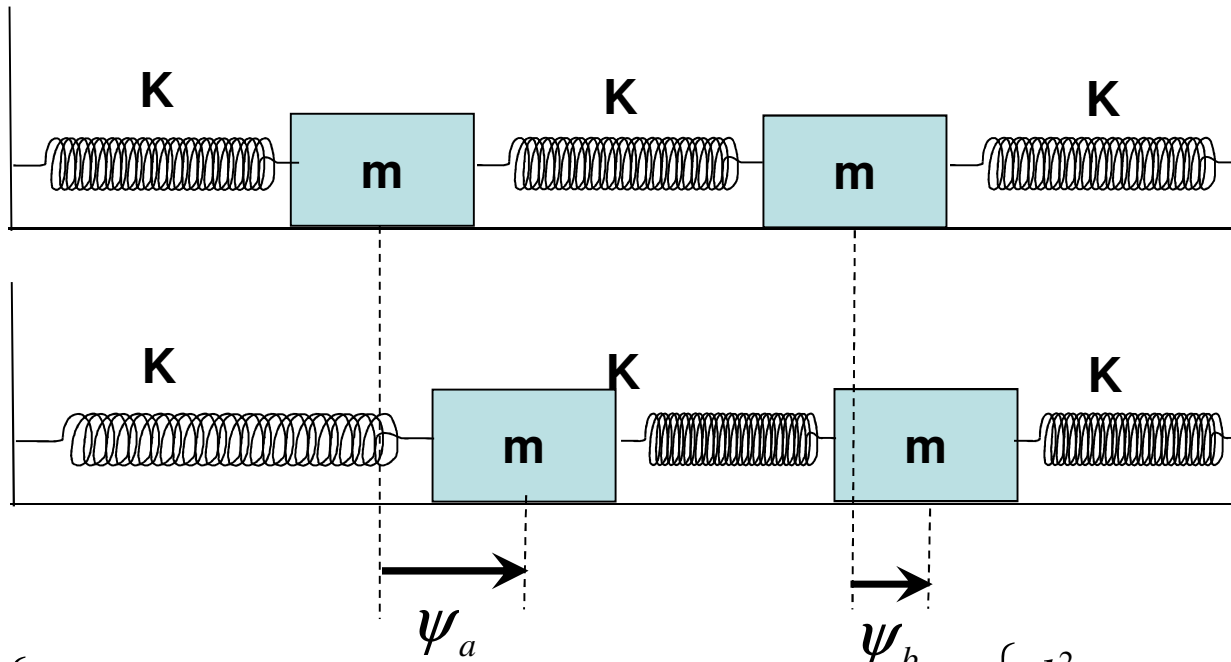
$$y(t) = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\omega_1^2 = \frac{2K_1}{m}$$

$$\omega_2^2 = \frac{2K_2}{m}$$

**Drgania normalne!**  
**Niezależne ruchy w dwóch kierunkach,**  
**charakterystyczne częstości...**

# Równania ruchu



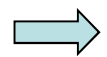
$$\begin{cases} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K \psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K \psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -\frac{2K}{m} \psi_a + \frac{K}{m} \psi_b \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = +\frac{K}{m} \psi_a - \frac{2K}{m} \psi_b \end{cases}$$

**Szukamy:**

$$\begin{cases} \psi_a = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_b = B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -\omega^2 \psi_a \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -\omega^2 \psi_b \end{cases}$$

**Oznaczmy:**

$$\begin{cases} a_{11} = \frac{2K}{m}, & a_{12} = -\frac{K}{m} \\ a_{21} = -\frac{K}{m}, & a_{22} = \frac{2K}{m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \psi_a = -a_{11} \psi_a - a_{12} \psi_b \\ -\omega^2 \psi_b = -a_{21} \psi_a - a_{22} \psi_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2) \psi_a + a_{12} \psi_b = 0 \\ a_{21} \psi_a + (a_{22} - \omega^2) \psi_b = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \\ \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \end{cases}$$



**lub inaczej**

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

**pamiętamy, że**

$$\psi_a = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_b = B \cos(\omega t + \varphi)$$

**Stąd:**

$$\left( \frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\left( \frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} \psi_b &= B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ &= \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

**$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  – z warunków początkowych**

# Częstości własne

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \frac{4K}{m}\omega^2 + \frac{3K^2}{m^2} = 0$$



$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$



Postać 1  $\Rightarrow$

$$\psi_b = \psi_a$$

Postać 2  $\Rightarrow$

$$\psi_b = -\psi_a$$

Pamiętamy, że:

$$a_{11} = \frac{2K}{m}, \quad a_{12} = -\frac{K}{m}$$

$$a_{21} = -\frac{K}{m}, \quad a_{22} = \frac{2K}{m}$$



$$\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix}_{\text{postać1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} \psi_b \\ \psi_a \end{pmatrix}_{\text{postać2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = -1$$

Popatrzmy jeszcze raz na równania...

**Dodajmy je i odejmijmy stronami...**

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K \psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K \psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2(\psi_a + \psi_b)}{dt^2} = -K(\psi_a + \psi_b) \\ m \frac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b) \end{array} \right.$$

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

**Łatwo wyznaczyć  
częstości drgań normalnych  
układu, a potem znaleźć drgania  
poszczególnych elementów...**

**Stąd:**

$$\psi_a = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

$$\psi_b = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

**Czyli znowu widzimy, że  
dla drgań normalnych z  
częstością  $\omega_1$**

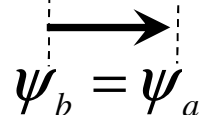
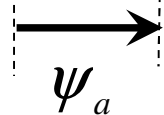
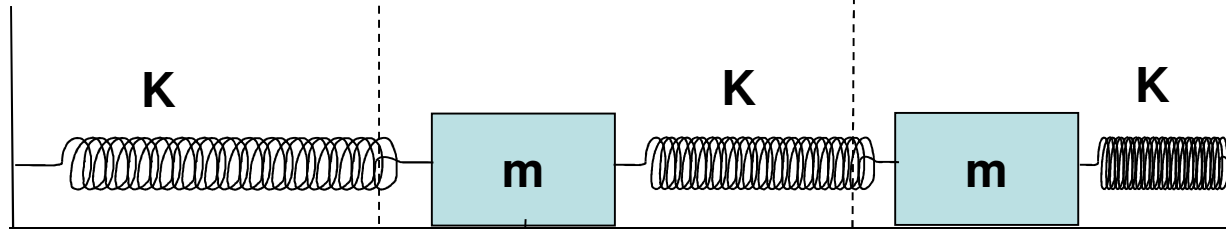
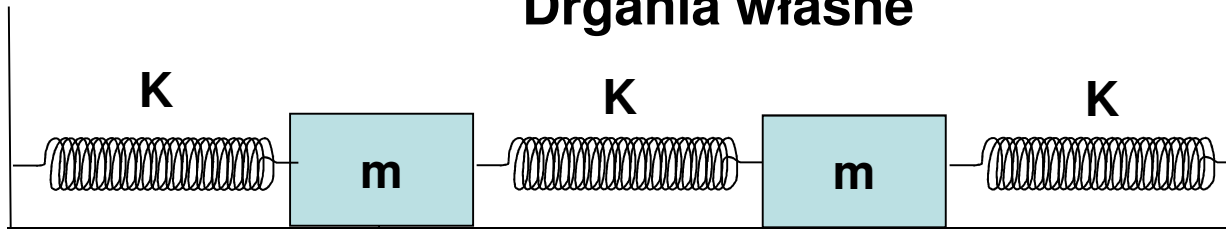
$$\psi_b = \psi_a$$

**dla drgań normalnych z  
częstością  $\omega_2$**

$$\psi_b = -\psi_a$$

**To można zgadnąć!**

## Drgania własne

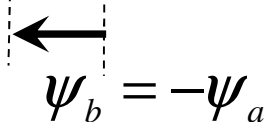
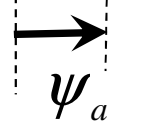
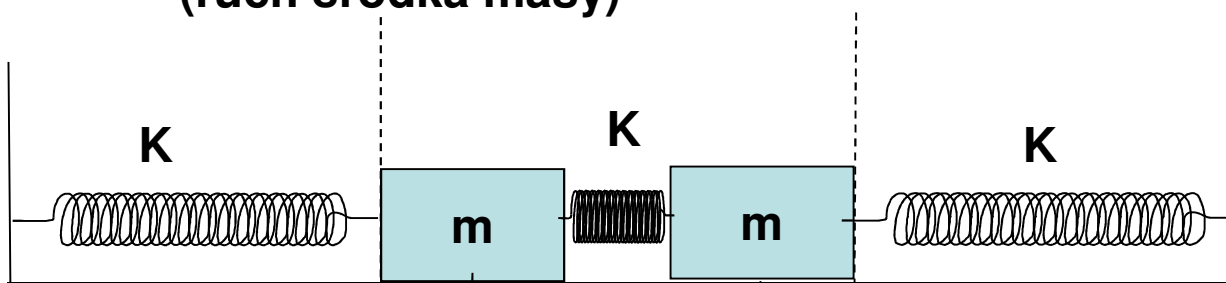


**Postać 1: Sprężynka środkowa nie napięta  
(ruch środka masy)**

**Siła  
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$$



**Postać 1: Sprężynka środkowa ściśnięta podwójnie  
(ruch wewnętrzny układu)**

**Siła  
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a - 2K\psi_a$$

$$\omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$

# Dudnienia

- dwa kamertony o bliskiej częstotliwości,
- brzeszczoty w imadle,
- struny gitary (np.. gdy ją stroimy)
- dźwięk dzwonu...

Ruch błony bębenkowej jest superpozycją dwu drgań harmoniczných....

Przyjmijmy, że  $A_1=A_2=A$ ,  $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t), \quad \psi_b(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

Ich suma:  $\psi(t) = \psi_a(t) + \psi_b(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$

Korzystając z tego, że  $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

dostajemy:  $\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$

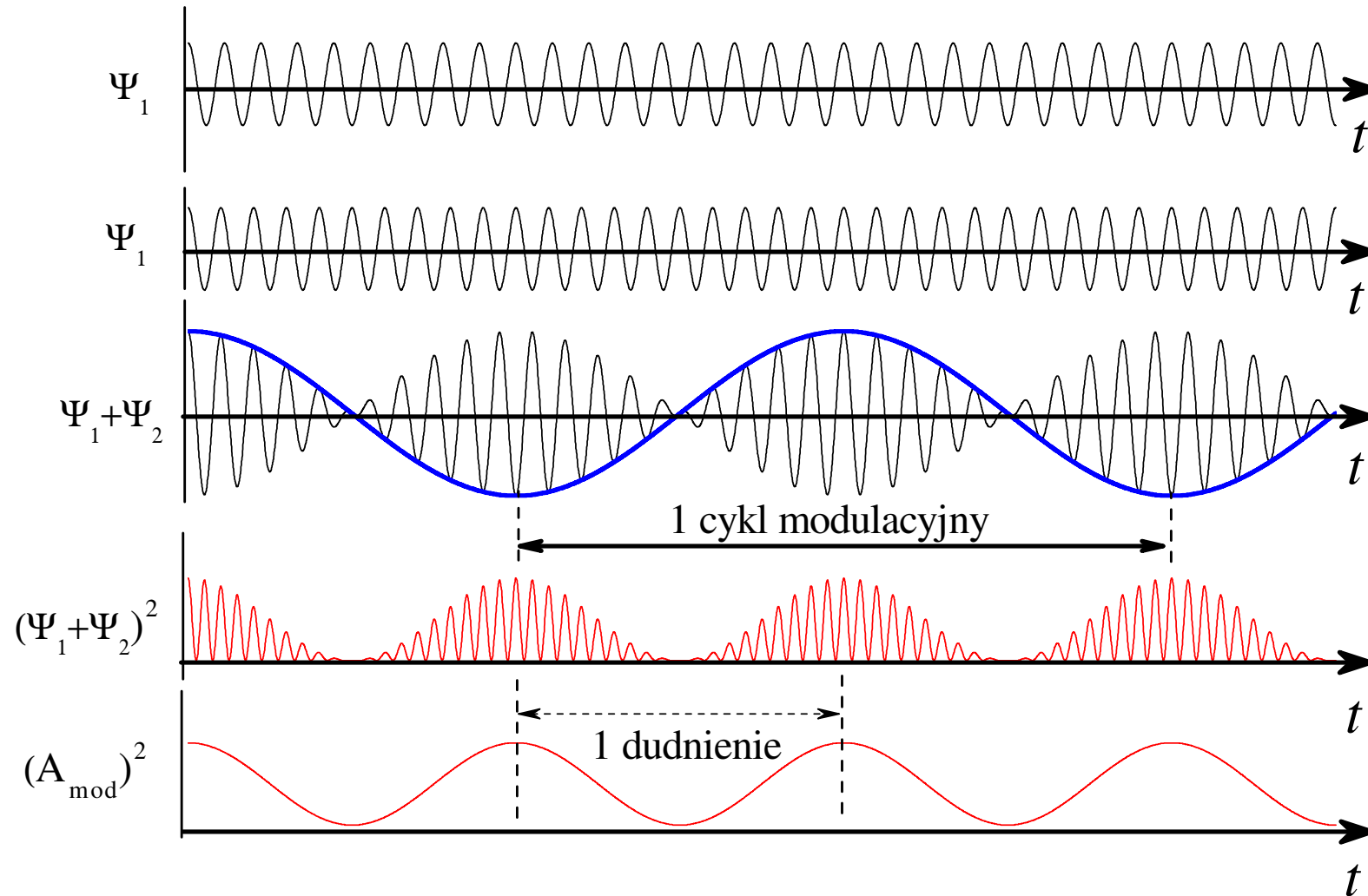
gdzie:  $\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$        $\omega_{\text{sr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{sr}}$   $\Rightarrow$   $\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$

amplituda wolno  
zmienna

część  
szybkoszmienna

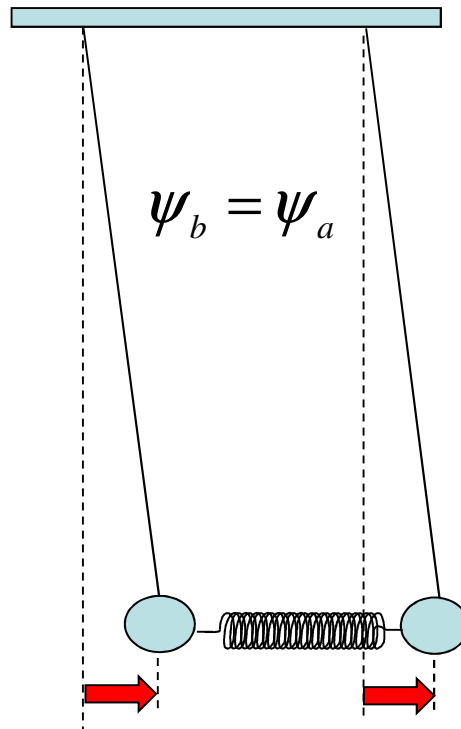
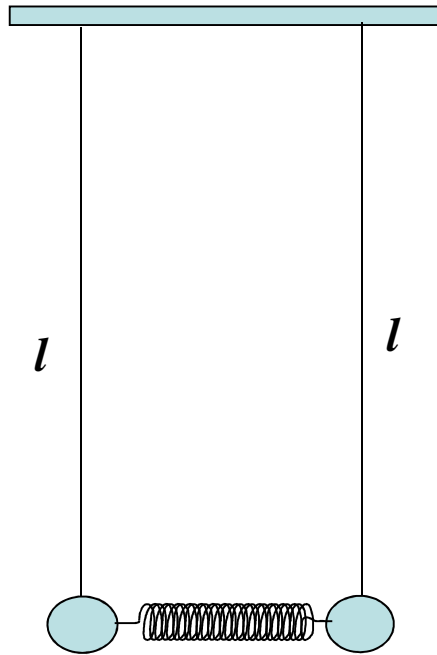
# Dudnienia łatwo zasymulować...



$$\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

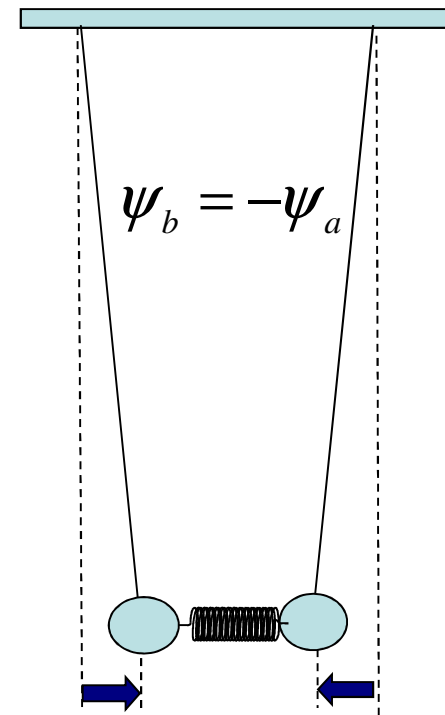
# Przykład: wahadła słabo sprzężone

## MODY WŁASNE



Sprężynka luźna

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$



Sprężynka napięta „podwójnie”

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}$$

Różnicę częstości możemy regulować zmieniając  $K$  lub  $m$ !

# Rozwiązanie ogólne

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

**Przyjmijmy, że  $A_1=A_2=A$ ,  $\varphi_1=\varphi_2=0$ , wtedy wychylenia ciężarków:**

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$$

**Jak takie drgania wzbudzić?**

**Trzeba odpowiednio dobrać warunki początkowe – dobieramy wychylenia i prędkości dla  $t=0$**

**Prędkości ciężarków**

$$\frac{d\psi_a(t)}{dt} = -A \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$

$$\frac{d\psi_b(t)}{dt} = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$



$$\psi_a(0) = 2A$$

$$\psi_b = 0$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d\psi_b}{dt}(0) = 0$$

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_a(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t) = 2A \sin(\omega_{\text{mod}} t) \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = B_{\text{mod}}(t) \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

W ciągu jednego szybkiego cyklu „szybkich drgań” traktujemy wahadła jak oscylatory harmoniczne o stałej amplitudzie ( $A_{\text{mod}}$  oraz  $B_{\text{mod}}$ ) i częstotści  $\omega_{\text{sr}}$

$$E_a = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 A_{\text{mod}}^2 = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 \cos^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_b = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 B_{\text{mod}}^2 = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

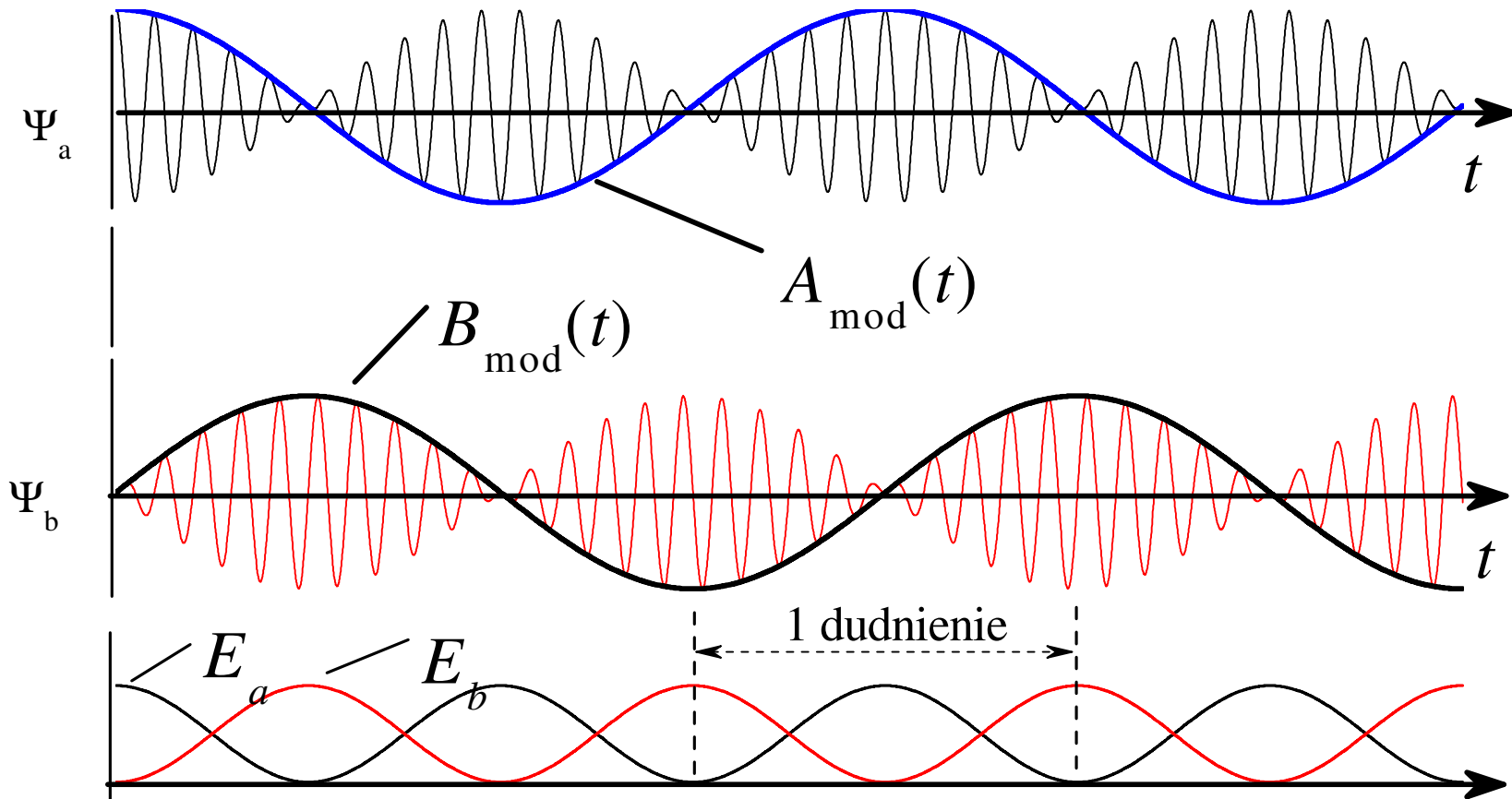
$$E_a + E_b = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 = E$$

$$E_a - E_b = E(\cos^2(\omega_{\text{mod}} t) - \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)) = \\ = E \cos(2\omega_{\text{mod}} t) = E \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$$

**Energia przepływa z jednego do drugiego wahadła z częstotścią dudnień**

$$E_a = \frac{1}{2} E [1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)] \\ E_b = \frac{1}{2} E [1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

# Zagadnienie energii w układzie drgań sprzężonych



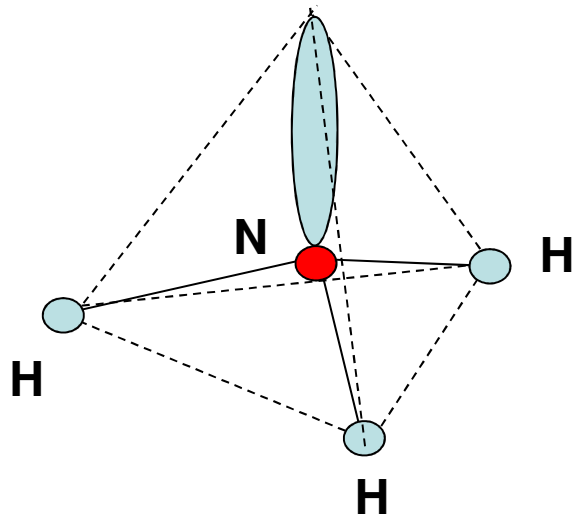
Przeptyw energii pomiędzy wahadłami

W mechanice kwantowej energia jest „skwantowana” - pomiędzy różnymi stopniami swobody przepływa prawdopodobieństwo posiadania energii wzbudzenia...(F.C. Crawford)

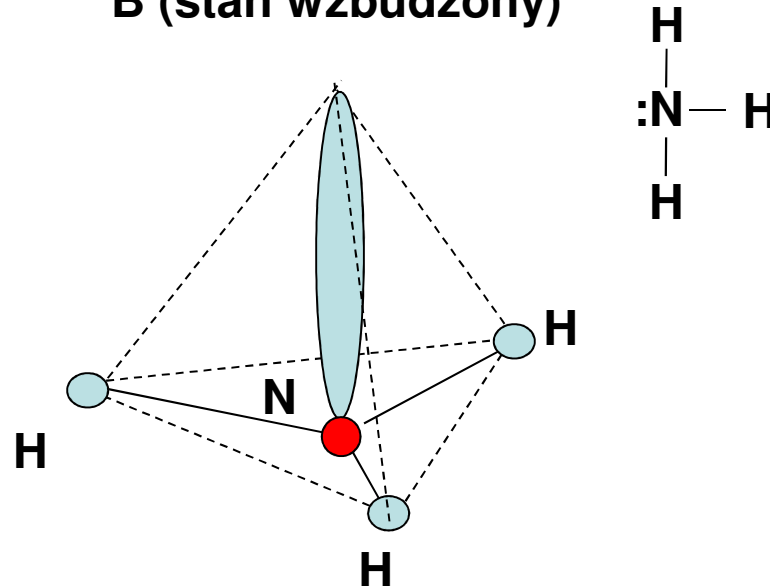
$$E_a = \frac{1}{2} E [1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$
$$E_b = \frac{1}{2} E [1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

# Cząsteczka amoniaku jako przykład słabo sprzężonych oscylatorów

A (stan podstawowy)



B (stan wzbudzony)



Dwa położenia azotu względem płaszczyzny wyznaczonej wodory.

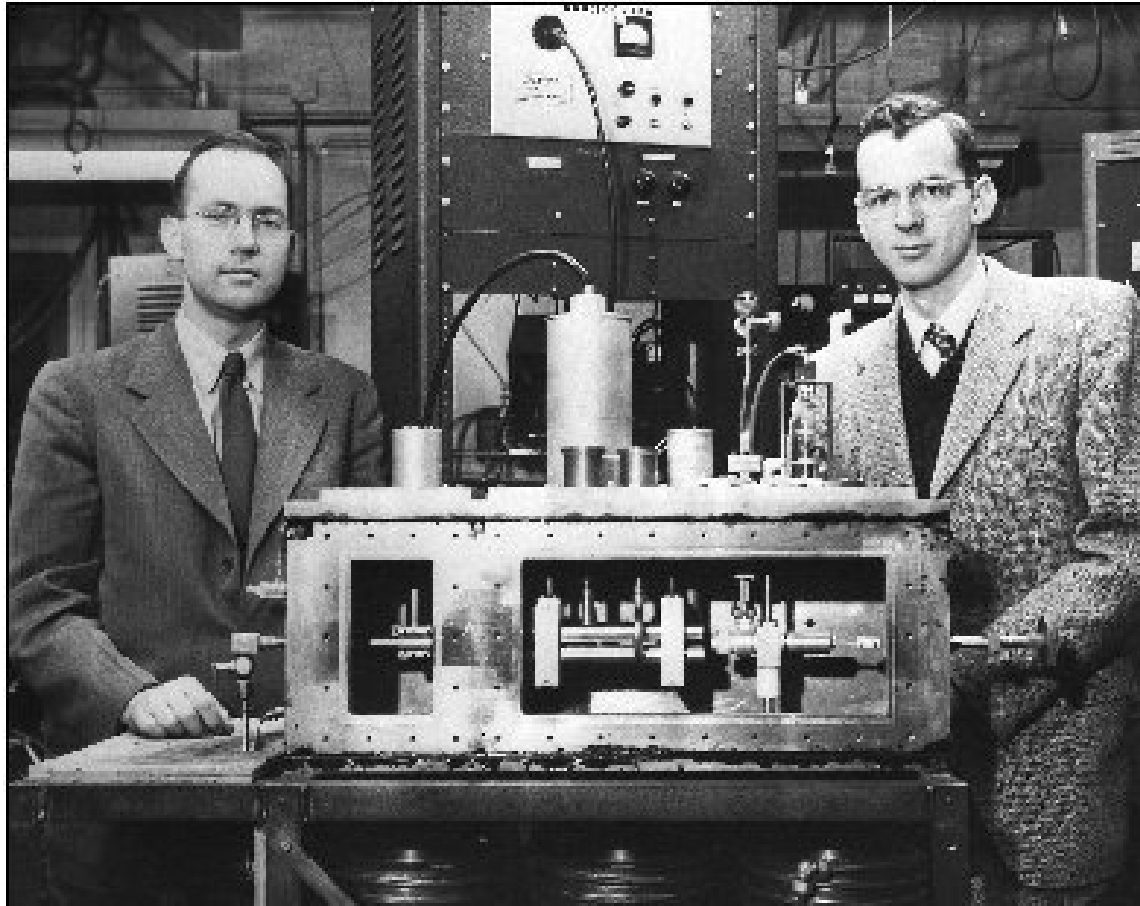
$$\nu_{dud} = \omega_{dud} / 2\pi = (\omega_2 - \omega_1) / 2\pi \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\psi_a = \frac{1}{2} [1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

$$\psi_b = \frac{1}{2} [1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

Maser amoniakalny (emitujący mikrofałe) – prekursor lasera...

Inny przykład oscylacji – układ mezonów  $K^0$ ...



*The first maser Charles H. Townes (left), winner of the 1964 Nobel Prize for Physics, and associate James P. Gordon in 1955 with the first maser.  
Bettmann/Corbis*

<http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/601072/92025/The-first-maser-Charles-H-Townes-winner-of-the-1964>