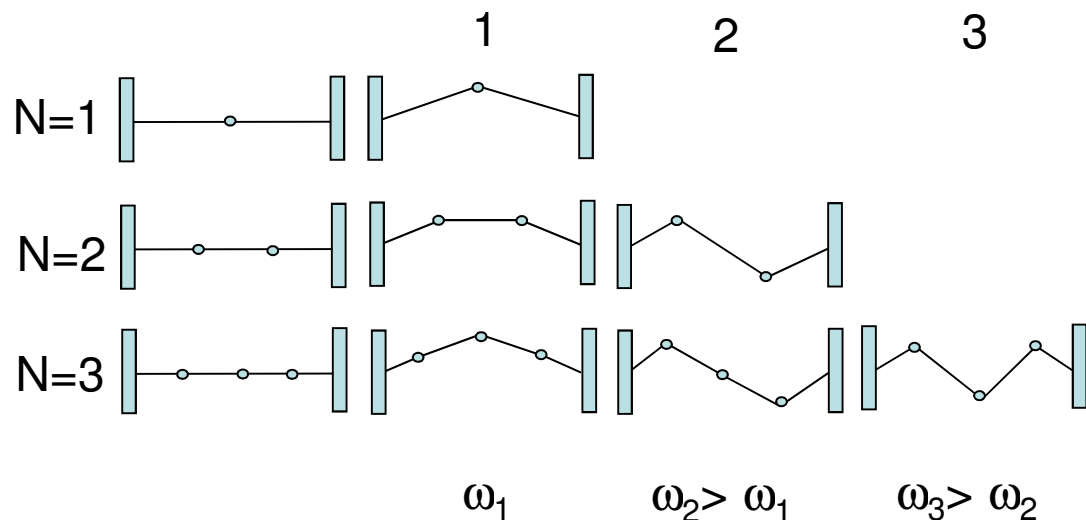
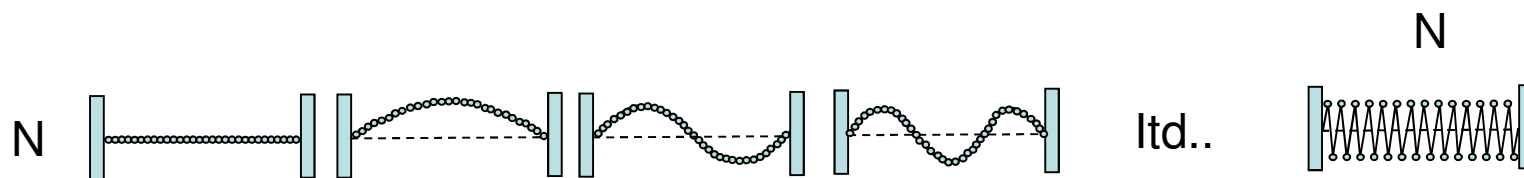


# Drgania układów o wielu stopniach swobody

# Jak zmieniają się postacie drgań...



Im większy kąt nachylenia  
pomiędzy sąsiednimi  
„sprężynkami” tym  
większa siła kierująca,  
tym większa częstość drgań...



- Liczba konfiguracji = N
- Pierwsza postać: brak węzłów (oprócz zamocowania)
- Ostatnia postać (o najwyższej częstości) N-1 węzłów (oprócz zamocowania)

# Cechy układu o N stopniach swobody

- istnieje dokładnie  $N$  postaci drgań własnych
- każda z postaci drgań normalnych ma własną częstość i „kształt” (określony przez stosunki amplitud)

Gdy układ wykonuje drganie normalne

$$\psi_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi)$$

- wszystkie elementy mają tę samą częstość,
- wszystkie elementy mają to samo przesunięcie fazowe (mijają punkt równowagi w tym samym momencie!)
- każdy element masy doznaje takiej samej siły kierującej na jednostkę masy

$$\psi = -\frac{k}{m} \psi$$

Jeśli więc układ ma trzy stopnie swobody i dla danego modu drgań własnych stosunki amplitud wynoszą (1):(-1):(3), to jeśli

$$\psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \implies \psi_2(t) = -\psi_1(t) \quad \psi_3(t) = 3\psi_1(t)$$

Czasami używa się zapisu

wektorowego opisującego dany mod drgań.

Rozwiązanie ogólne jest sumą takich wektorów własnych...

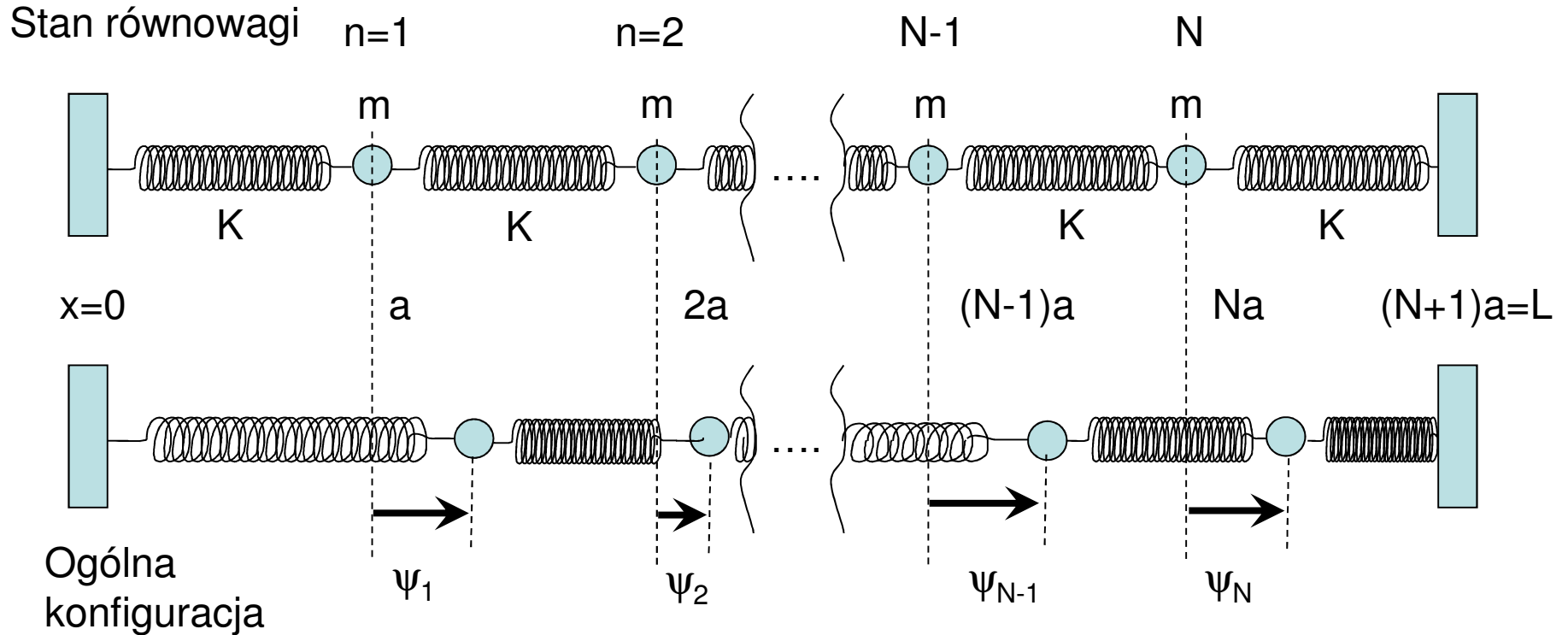
$$\psi_1(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Przykład układu o wielu stopniach swobody -  
drgania sieci krystalicznej  
(fonony)...

# MODEL KRYSZTAŁU

## Drgania podłużne układu mas i sprężynek

Rozpatrzmy  $N$  ciężarków połączonych  $N+1$  sprężynek



Równanie ruchu dla  $n$ -tego ciężarka

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1})$$

# Postacie drgań normalnych

$$\psi_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

...

$$\psi_{n-1} = A_{n-1} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_n = A_n \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_{n+1} = A_{n+1} \cos(\omega t + \varphi)$$

Obliczmy:

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = -\omega^2\psi_n = -\omega^2 A_n \cos(\omega t + \varphi)$$

Po podstawieniu do równania:

$$m \frac{d^2\psi_n}{dt^2} = K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1})$$

...i pozbyciu się czynnika  $\cos(\omega t)$ , dostajemy

$$-m\omega^2 A_n = K(A_{n+1} - 2A_n + A_{n-1})$$

Stąd równanie wyznaczające konfigurację drgań własnych o częstości  $\omega$

$$(A_{n+1} + A_{n-1}) = A_n \left(2 - \frac{m}{K} \omega^2\right)$$

Poszukajmy rozwiązań postaci:

$$A_n = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} na\right) = A \sin(kna)$$

$\lambda$  - długość fali     $k$  - liczba falowa

$$A_n = A \sin(kna)$$

$$A_{n+1} = A \sin(k(n+1)a) = A \sin(kna + ka) = A[\sin(kna) \cos(ka) + \cos(kna) \sin(ka)]$$

$$A_n = A \sin(kna)$$

$$A_{n-1} = A \sin(k(n-1)a) = A \sin(kna - ka) = A[\sin(kna) \cos(ka) - \cos(kna) \sin(ka)]$$

po dodaniu stronami:

$$A_{n+1} + A_{n-1} = 2A \sin(kna) \cos(ka) = 2A_n \cos(ka)$$

Stąd

$$2A_n \cos(ka) = A_n \left(2 - \frac{m}{K} \omega^2\right) \implies 2 \cos(ka) = 2 - \frac{m}{K} \omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{2K}{m} (1 - \cos(ka)) = \frac{2K}{m} \left\{1 - \left[\cos^2\left(\frac{ka}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)\right]\right\} = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Czyli ostatecznie:

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Warto przećwiczyć użycie liczb zespolonych, badając rozwiązania postaci:

$$A_n^* = C e^{ikna}$$

Zależność pomiędzy częstością  $\omega$  a liczbą falową  $k$  (czy też długością fali  $\lambda$ ) wyraża **związek dyspersyjny** dla układu mas połączonych sprężynkami.

# Rozwiązanie ogólne

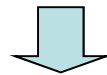
$$A_n = A \sin(kna)$$

$$\psi_n(t) = A \sin(kna) \cos[\omega(k)t + \varphi] \quad \leftarrow$$

Warunek znikania dla  $z=0$  spełniony  
(zerowy ciężarek jest unieruchomiony)

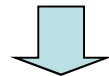
$$A_{N+1} = A \sin(k(N+1)a) = A \sin(kL) = 0$$

Warunek znikania wychylenia  
dla  $z=L=(N+1)a$ ,  
(unieruchomienie  $N+1$  ciężarka...)



Istnieje  $N$  rozwiązań tego równania:

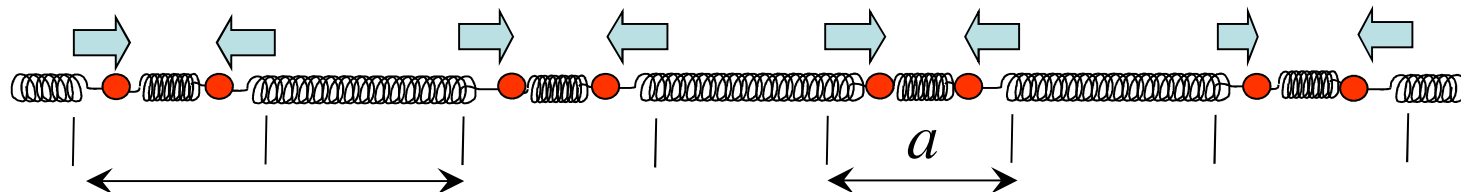
$$k_1 L = \pi, \quad k_2 L = 2\pi, \quad \dots, \quad k_m L = m\pi, \quad \dots, \quad k_N L = N\pi$$



**Istnieje ograniczenie!**

$$k_{\max} = \frac{N}{L} \pi$$

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi}{k_{\max}} = \frac{2\pi}{N\pi} L = \frac{2L}{N} \cong 2a$$



$$\lambda_{\min} = 2a$$

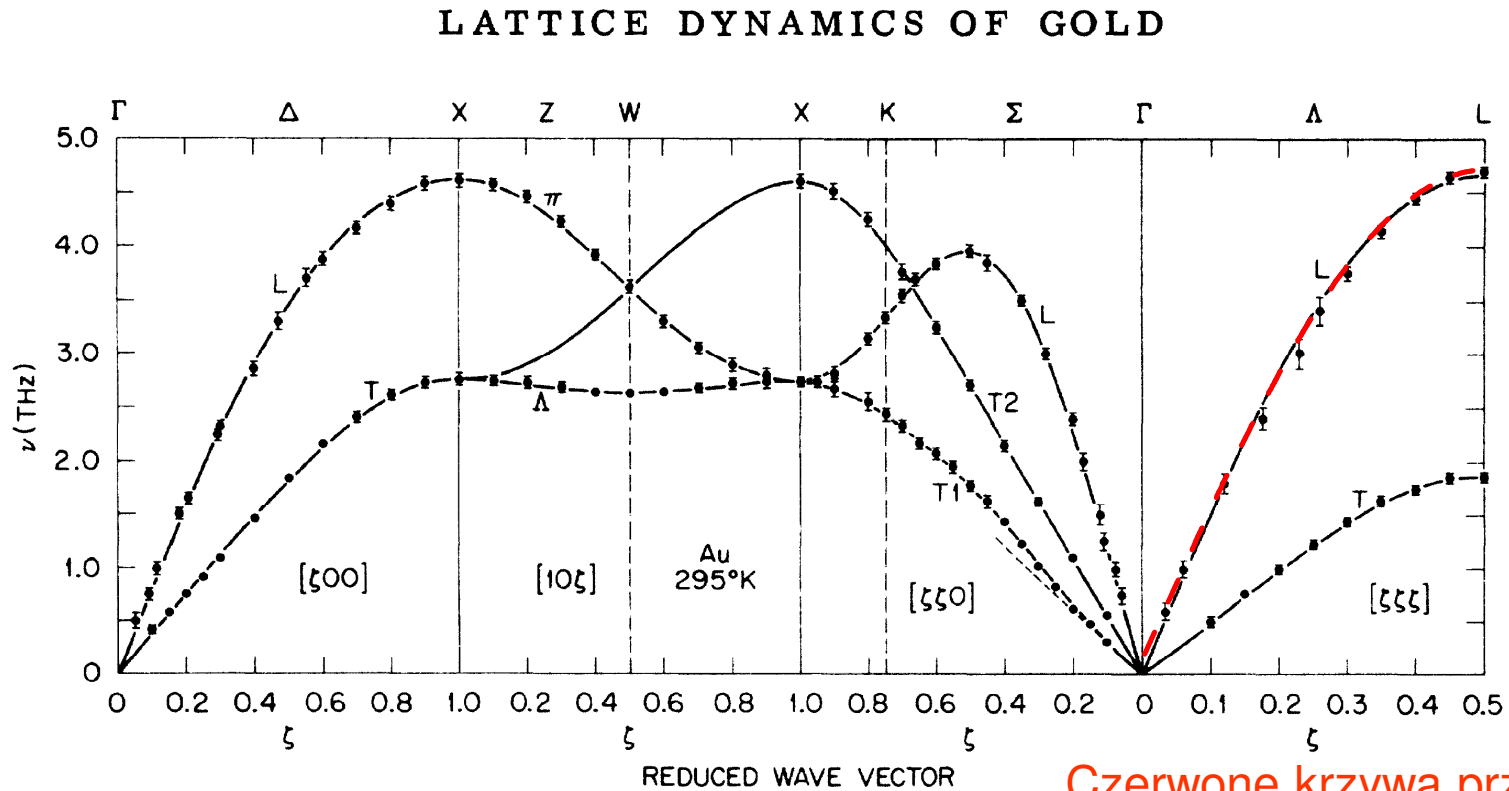
**To cecha układów dyskretnych!**

# Dyspersja dla fononów w złocie

$$\omega^2 = \frac{4K}{m} \sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Model kryształu – atomy (masy) połączone sprężynkami

Drgania sieci – fonony (drżania własne, czy też fale propagujące się w kryształach)



Czerwone krzywa przerywana:

J. W. Lynn, H. G. Smith, and R. M. Nicklow  
Phys. Rev. B **8**, 3493 (1973)

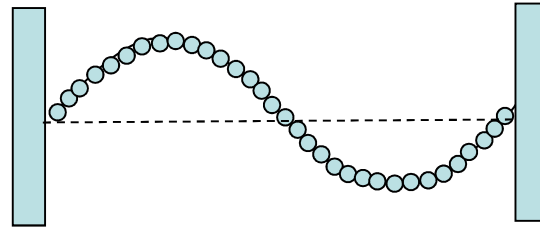
Prosty model  
nieźle pracuje...

$$\omega = \omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

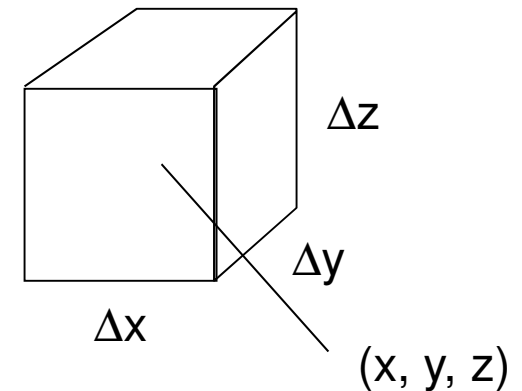
# Granica ciągłości układu...

Jeśli liczba elementów układu  $N$  jest bardzo duża (np.  $10^6$ ) to odległości pomiędzy elementami są małe, to układ staje się „ciągły”.

Dla pierwszych kilku tysięcy modów drgań o najniższych częstościach blisko siebie leżące elementy poruszają się praktycznie tak samo...



Pojawiają się fale!



Zamiast używać położeń każdego elementu

$$\psi_1(t), \psi_2(t), \psi_3(t) \dots \psi_N(t)$$

Używać funkcji ciągłej położenia

$$\vec{\psi}(x, y, z, t)$$

gdzie,  $x, y, z$  – położenia rozważanego elementu układu  
(bliskiego otoczenia tego punktu)

$$\vec{\psi}(x, y, z, t) = \psi_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + \psi_y(x, y, z, t)\vec{e}_y + \psi_z(x, y, z, t)\vec{e}_z$$

# Drgania (fale) podłużne i poprzeczne

Rozważmy strunę rozciągniętą wzdłuż osi  $z$ ,  
dla położenia równowagi dla wszystkich punktów  $x=0, y=0$

$$\vec{\psi}(x, y, z, t) = \psi_x(z, t)\vec{e}_x + \psi_y(z, t)\vec{e}_y + \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

Drgania podłużne:

$$\vec{\psi}(z, t) = \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

$$\psi_L(z, t) = \psi_z(z, t)\vec{e}_z$$

chwilowe  
wychylenia z położenia  
równowagi wzdłuż  $z$

Drgania poprzeczne:

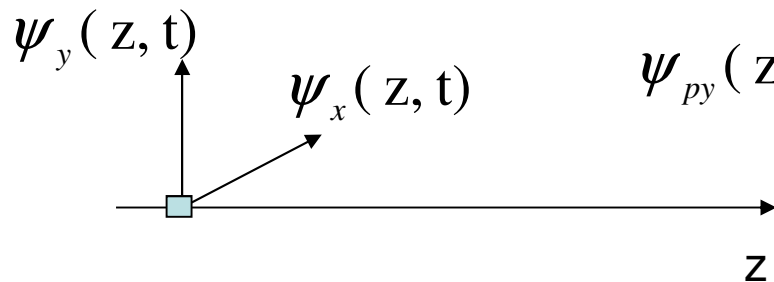
$$\vec{\psi}_p(z, t) = \psi_x(z, t)\vec{e}_x + \psi_y(z, t)\vec{e}_y$$

Polaryzacja

$$\psi_{px}(z, t) = \psi_x(z, t)$$

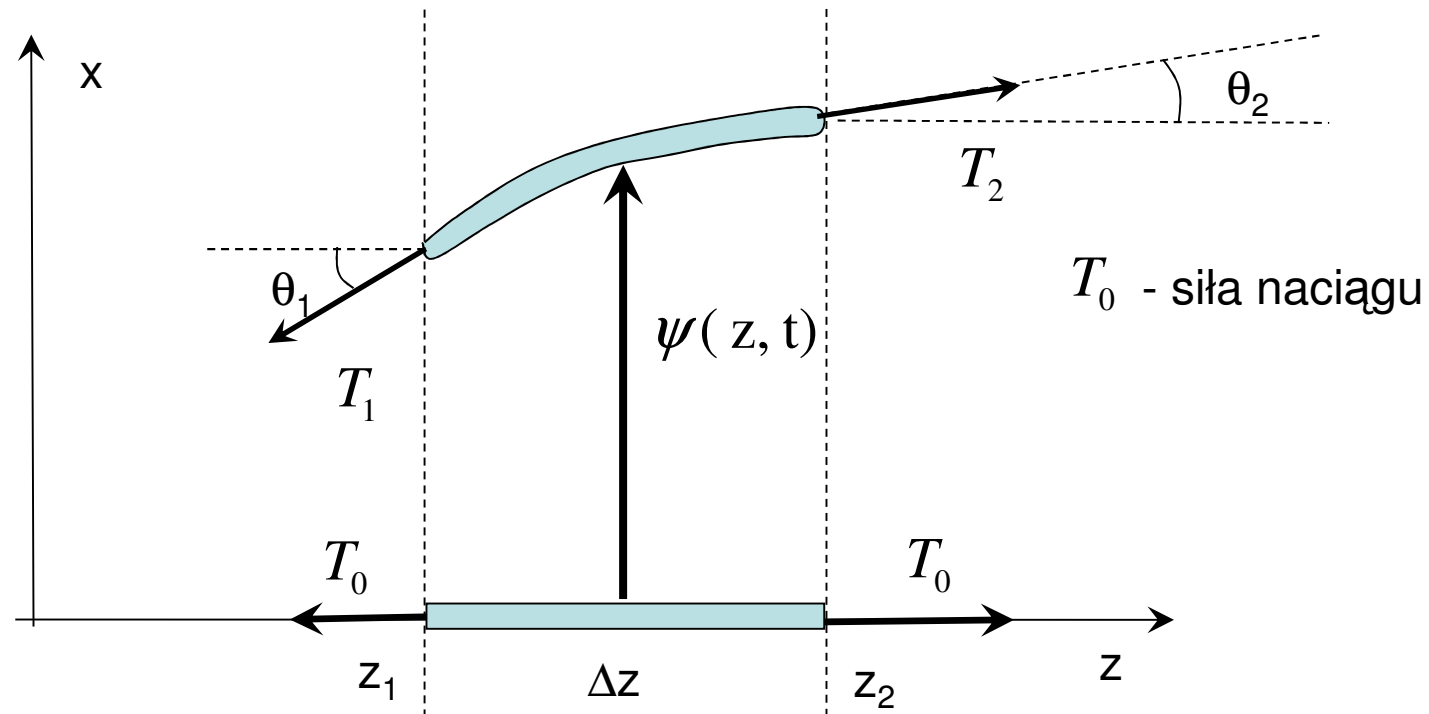
$$\psi_{py}(z, t) = \psi_y(z, t)$$

chwilowe  
wychylenia z położenia  
równowagi wzdłuż  $x$  lub  $y$



# Równanie falowe dla struny (fale poprzeczne)

Drgania poprzeczne  
spolaryzowane



Rozważmy ruch niewielkiego elementu długości  $\Delta z$ ,  
Równanie Newtona

$$\Delta m \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = F_x(z, t)$$

$$\Delta m = \rho_0 \Delta z$$

$\rho_0$  - gęstość liniowa

$$F_x(z, t) = T_2 \sin(\theta_2) - T_1 \sin(\theta_1)$$

## Dwa różne podejścia:

- przybliżenie małej długości swobodnej

$T = (1/\cos\theta) T_0$ , czyli pozioma siła napinająca strunę  $T \cos\theta = T_0$

- przybliżenie małych drgań:  $\cos\theta \approx 1$ , pozioma siła napinająca  $T \cos\theta = T_0$

$$F_x(z, t) = T_2 \sin(\theta_2) - T_1 \sin(\theta_1) = T_2 \cos(\theta_2) \operatorname{tg}(\theta_2) - T_1 \cos(\theta_1) \operatorname{tg}(\theta_1)$$

$$F_x(z, t) = T_0 \operatorname{tg}(\theta_2) - T_0 \operatorname{tg}(\theta_1) = T_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - T_0 \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1$$

$$F_x(z, t) = (z_2 - z_1) T_0 \frac{\left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_2 - \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)_1}{z_2 - z_1} \cong \Delta z T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

Równanie ruchu:  $\rho_0 \Delta z \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \Delta z T_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$

Klasyczne równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad \text{- prędkość fali}$$

# Fale stojące w strunie

Drgania normalne: **każdy** element struny wykonuje drgania postaci:

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \quad *$$

niezależna od czasu amplituda  $A(z)$

ta sama częstość  $\omega$

to samo przesunięcie fazowe  $\varphi$

Różniczkujemy \*

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi)$$

Podstawiamy do równania falowego...

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} = \cos(\omega t + \varphi) \frac{d^2 A(z)}{dz^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Równanie oscylatora harmonicznego!

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\omega^2 \frac{\rho_0}{T_0} A(z)$$

To ma być ze sobą zgodne...

$$A(z) = A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) + B \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right)$$

różniczkujemy dwukrotnie

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 A(z)$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \omega^2 \frac{\rho_0}{T_0}$$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = (2\pi\nu)^2 \frac{\rho_0}{T_0}$$

$$\lambda\nu = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = v_0 = \text{const}$$

# Warunki brzegowe

$$\psi(z,t) = \cos(\omega t + \varphi) \left[ A \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) + B \cos\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right) \right]$$

Struna zamocowana w  $z=0$  oraz  $z=L$ , stąd

$$\psi(0,t) = 0 \implies B = 0 \quad \psi(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(2\pi \frac{z}{\lambda}\right)$$

$$\psi(L,t) = 0 \implies \sin\left(2\pi \frac{L}{\lambda}\right) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$2\pi \frac{L}{\lambda_n} = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi$$

$$\lambda_1 = 2L, \quad \lambda_2 = L = \frac{1}{2} \lambda_1, \quad \lambda_3 = \frac{2}{3} L = \frac{1}{3} \lambda_1, \dots, \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{1}{n} \lambda_1,$$

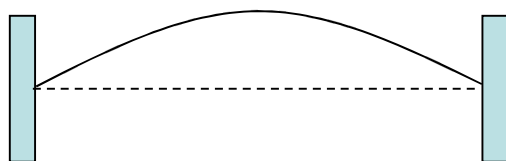
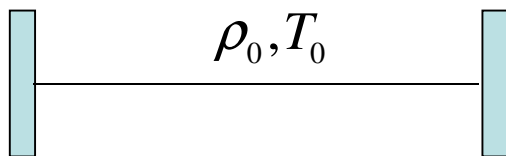
$$\lambda v = v_0$$



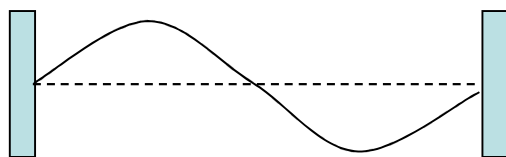
$$v_1 = \frac{v_0}{\lambda_1}, \quad v_2 = \frac{2v_0}{\lambda_1} = 2v_1, \quad v_3 = 3v_1, \dots, v_n = nv_1$$

**Częstości harmoniczne!**

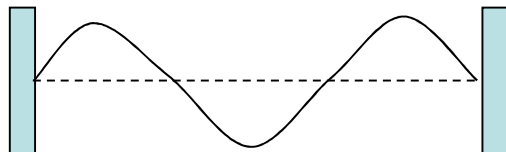
## Postacie drgań struny (zamocowanej z dwóch końców)



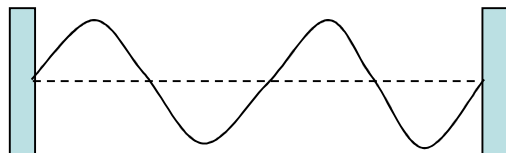
$$\lambda_1 = 2L, v_1 = v_0 \frac{1}{\lambda_1}$$



$$\lambda_2 = L, v_2 = 2v_1$$



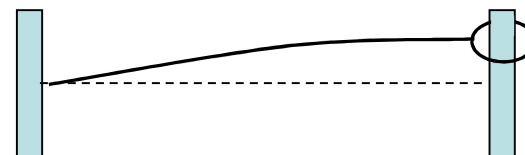
$$\lambda_3 = \frac{2}{3}L, v_3 = 3v_1$$



$$\lambda_4 = \frac{1}{2}L, v_4 = 4v_1$$

Częstości strun zamocowanych np. z jednego końca, lub z dwoma końcami swobodnymi są inne.

Warto to sprawdzić samodzielnie...



# Związek dyspersyjny

$$\lambda v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad \Rightarrow \quad 2\pi v = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}$$

Biorąc pod uwagę, że liczba falowa

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} k$$

$$\omega(k) = v_0 k$$

Wartość  $k$  zależna od **warunków brzegowych** – dla struny zamocowanej z dwóch końców mamy  $\lambda_1 = 2L$  stąd:

Fale stojące nie biegną, ale można je traktować jako złożenie fal biegnących w przeciwną stronę ....

prędkość fazowa

$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{\pi}{L}$$

# Od drgań struny do analizy Fourierowskiej

Najogólniejsze równanie ruchu struny ciągłej, otrzymujemy przez superpozycję wszystkich drgań normalnych:

$$\psi(z, t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(k_1 z) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \sin(k_2 z) + \dots$$

Częstość i liczba falowa są ze sobą związane:

$$\omega_n(k) = v_0 k_n$$

Rozważmy warunek początkowy:

$$\psi(z, 0) = f(z)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(z, 0) = 0, \text{ dla } t = 0$$

**Kształt struny w chwili początkowej opisany funkcją  $f(z)$**

**Prędkość początkowa struny równa zero**

Warunek znikania prędkości dla  $t=0$  oznacza, że przesunięcia fazowe spełniają warunek  $\varphi=0, \varphi=\pi$  (jest to równoważne dopuszczeniu zmiany znaku poszczególnych amplitud,  $A_1, A_2, \dots$ ) **Możemy więc zapisać:**

$$\psi(z, t) = A_1 \sin(k_1 z) \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 z) \cos(\omega_2 t) + \dots$$

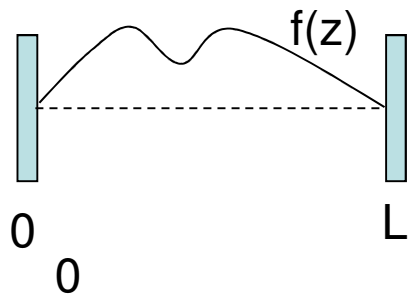
Stąd dla  $t=0$ :  $f(z) = \psi(z, 0) = A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + \dots$

Rozwinięcie Fouriera (szereg Fouriera) funkcji  $f(z)$ !

# Rozwinięcie funkcji okresowej $F(z)$

Przypadek szczególny dla struny zamocowanej w  $z=0$  oraz  $z=L$ :

$$f(z) = \psi(z,0) = A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + \dots$$



$f(z)$  – okresowa z okresem  $k_1, k_2, k_3 \dots$

Uogólnienie – konstruujemy funkcję  $F(z)$ ...



$F(z)$  – okresowa z okresem  $k_1, k_2, k_3 \dots$

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \sin(nk_1 z) + B_n \cos(nk_1 z)]$$

## Rozwinięcie w szereg Fouriera („rozsądnej”) funkcji $F(z)$

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z)$$

Współczynniki rozwinięcia określone są następująco:

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin(nk_1 z) dz$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos(nk_1 z) dz$$

**Spróbujmy to udowodnić....**

# Wyznaczenie współczynników

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z) \quad **$$

Współczynnik  $B_0$

Całkujemy obustronnie równanie\*\* od  $z_1$  do  $z_2=z_1+\lambda_1$  (czyli po okresie  $\lambda_1=2L$ )

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz = \lambda_1 B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin(nk_1 z) dz + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos(nk_1 z) dz$$

Pierwszy element sumy:  $\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_0 dz = B_0 \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} dz = B_0 \lambda_1$

Pozostałe dwa elementy sumy:

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} A_n \sin(nk_1 z) dz = 0$$

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos(nk_1 z) dz = 0$$

bo całkujemy  
funkcje okresowe  
po wielokrotności okresu  
**( $\lambda_1$  – najdłuższy okres!!!)**

Stąd rzeczywiście:

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz$$

# Wyznaczenie współczynników c.d.

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z) \quad **$$

## Współczynniki $A_n$

Mnożymy obustronnie przez  $\sin(mk_1 z)$  równanie\*\* i całkujemy od  $z_1$  do  $z_2 = z_1 + \lambda_1$  (czyli po okresie  $\lambda_1 = 2L$ ).

1) całka z  $B_0$  znika, bo całkujemy funkcję okresową po okresie...

2) dla  $n=m$

$$\int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} A_n \sin^2(nk_1 z) dz = A_n \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2nk_1 z) \right) dz = \frac{A_n}{2} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} dz - \frac{A_n}{2} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} \cos(2nk_1 z) dz = \frac{1}{2} A_n \lambda_1$$

~~$= 0$~~

bo funkcja okresowa  
całkowana po okresie...

3) Dla  $n \neq m$

$$\int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} A_n \sin(mk_1 z) \sin(nk_1 z) dz = 0$$

Wyrażenie podcałkowe można przedstawić w postaci:

$$\sin(mk_1 z) \sin(nk_1 z) = \frac{1}{2} \cos((n - m)k_1 z) - \frac{1}{2} \cos((m + n)k_1 z)$$

Każdy z dwóch wyrazów po prawej stronie jest równie często dodatni jak i ujemny, więc całka po okresie  $\lambda_1$  znika!

#### 4) Całkowanie wyrażenia

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos(nk_1 z) \sin(mk_1 z) dz = 0$$

daje zero, gdyż wyrażenie

podcałkowe można przedstawić w postaci:

$$\cos(nk_1 z) \sin(mk_1 z) = \frac{1}{2} \sin((n+m)k_1 z) + \frac{1}{2} \sin((m-n)k_1 z)$$

...bo każdy z dwóch wyrazów po prawej stronie jest równie często dodatni jak i ujemny, więc całka po okresie  $\lambda_1$  znika!

Zatem:

$$\frac{1}{2} A_n \lambda_1 = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin(nk_1 z) dz$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin(nk_1 z) dz$$

# Wyznaczenie współczynników $B_n$

Mnożymy wzór \*\* obustronnie przez  $\cos(mk_1z)$  i całkujemy od  $z_1$  do  $z_2=z_1+\lambda_1$  (czyli po okresie  $\lambda_1=2L$ ) i dalej podobnie jak z  $A_m$

Dla  $m \neq n$  korzystamy z tego, że :

$$\cos(nk_1z)\cos(mk_1z) = \frac{1}{2}\cos((m+n)k_1z) + \frac{1}{2}\cos((m-n)k_1z)$$

Każdy z dwóch wyrazów po prawej stronie równości jest równie często dodatni jak i ujemny, więc całka po okresie  $\lambda_1$  znika!

Dla  $m=n$  dostajemy podobnie jak dla całek  $A_m$  korzystamy z tego, że:

$$\begin{aligned} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} B_n \cos^2(nk_1z) dz &= B_n \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2nk_1z) \right) dz = \\ &= \frac{1}{2} B_n \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} dz + \frac{1}{2} B_n \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos(2nk_1z) dz = \frac{1}{2} B_n \lambda_1 \end{aligned}$$

Stąd:

$$B_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos(nk_1z) dz$$

# Czyli to działa!

Rozwinięcie w szereg Fouriera („rozsądnej”) funkcji  $F(z)$

$$F(z) = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nk_1 z) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(nk_1 z)$$

Współczynniki rozwinięcia określone są następująco:

$$B_0 = \frac{1}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) dz$$

$$A_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \sin(nk_1 z) dz$$

$$B_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) \cos(nk_1 z) dz$$

# Wygoda obliczeń (warto skorzystać...)

Ponieważ  $e^{ink_1z} = \cos(nk_1z) + i \sin(nk_1z)$

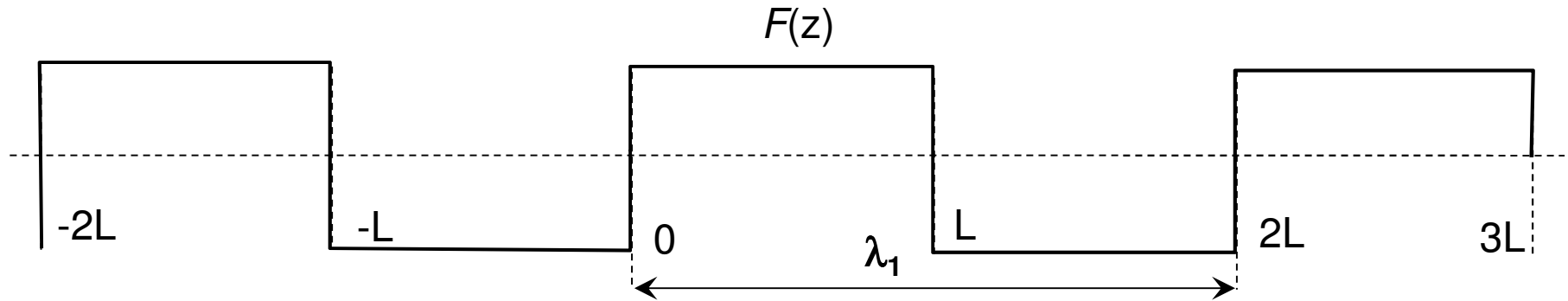
$$B_n + iA_n = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) e^{ink_1z} dz$$

$$A_n = \text{Im} \left( \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) e^{ink_1z} dz \right)$$
$$B_n = \text{Re} \left( \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z) e^{ink_1z} dz \right)$$

Sprawdźmy jak to działa w praktyce...

Czy mając generator fal sinusoidalnych o dowolnych częstościach można wytworzyć przebieg prostokątny, albo trójkątny, o dowolnym kształcie...

# Przykład: przebieg prostokątny



$$B_m + iA_m = \frac{2}{\lambda_1} \int_{z_1}^{z_1 + \lambda_1} F(z) e^{imk_1 z} dz = \frac{1}{L} \int_0^{2L} F(z) e^{imk_1 z} dz$$

$$F(z) = \begin{cases} +1 & 0 \leq z < L \\ -1 & L \leq z < 2L \end{cases}$$

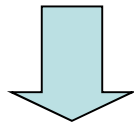
$$k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{2L} = \frac{\pi}{L}$$

$$B_m + iA_m = \frac{1}{L} \int_0^{2L} F(z) e^{im\pi \frac{z}{L}} dz = \frac{1}{L} \int_0^L (+1) e^{im\pi \frac{z}{L}} dz + \frac{1}{L} \int_L^{2L} (-1) e^{im\pi \frac{z}{L}} dz$$

$$B_m + iA_m = \frac{1}{im\pi} \left( e^{im\pi \frac{z}{L}} \Big|_0^L - e^{im\pi \frac{z}{L}} \Big|_L^{2L} \right) = \frac{1}{im\pi} (2e^{im\pi} - 1 - e^{i2m\pi})$$

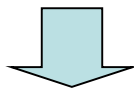
$$B_m + iA_m = \begin{cases} \frac{1}{im\pi} (2 - 1 - 1) = 0 & \text{dla } m \text{ parzystych} \\ \frac{1}{im\pi} (-4) = i \frac{4}{m\pi} & \text{dla } m \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

Niezerowa tylko część urojona:



$$B_m = 0$$

$$A_m = \begin{cases} 0 & \text{dla } m \text{ parzystych} \\ \frac{4}{\pi m} & \text{dla } m \text{ nieparzystych} \end{cases}$$



Ostatecznie otrzymujemy szereg:

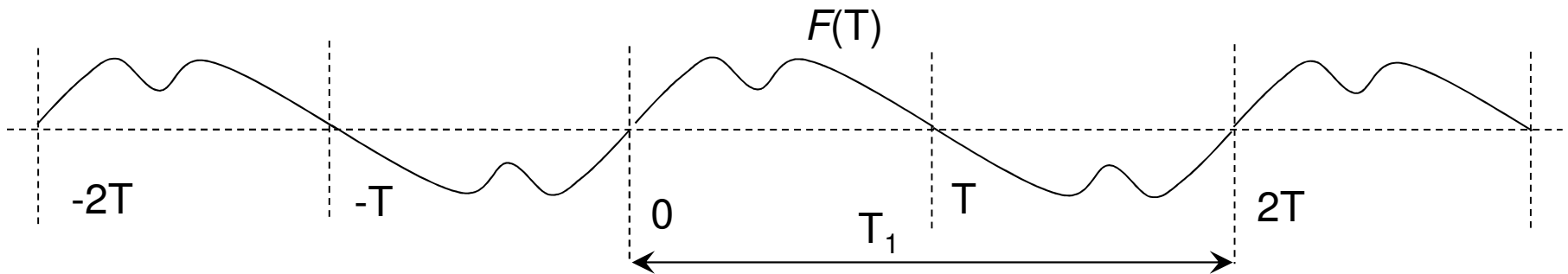
$$F(z) = \frac{4}{\pi} \left[ \sin \frac{\pi z}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi z}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi z}{L} \dots \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{L} \right]$$

$$F(z) = 1,273 \sin \frac{\pi z}{L} + 0,424 \sin \frac{3\pi z}{L} + 0,255 \sin \frac{5\pi z}{L} + \dots$$

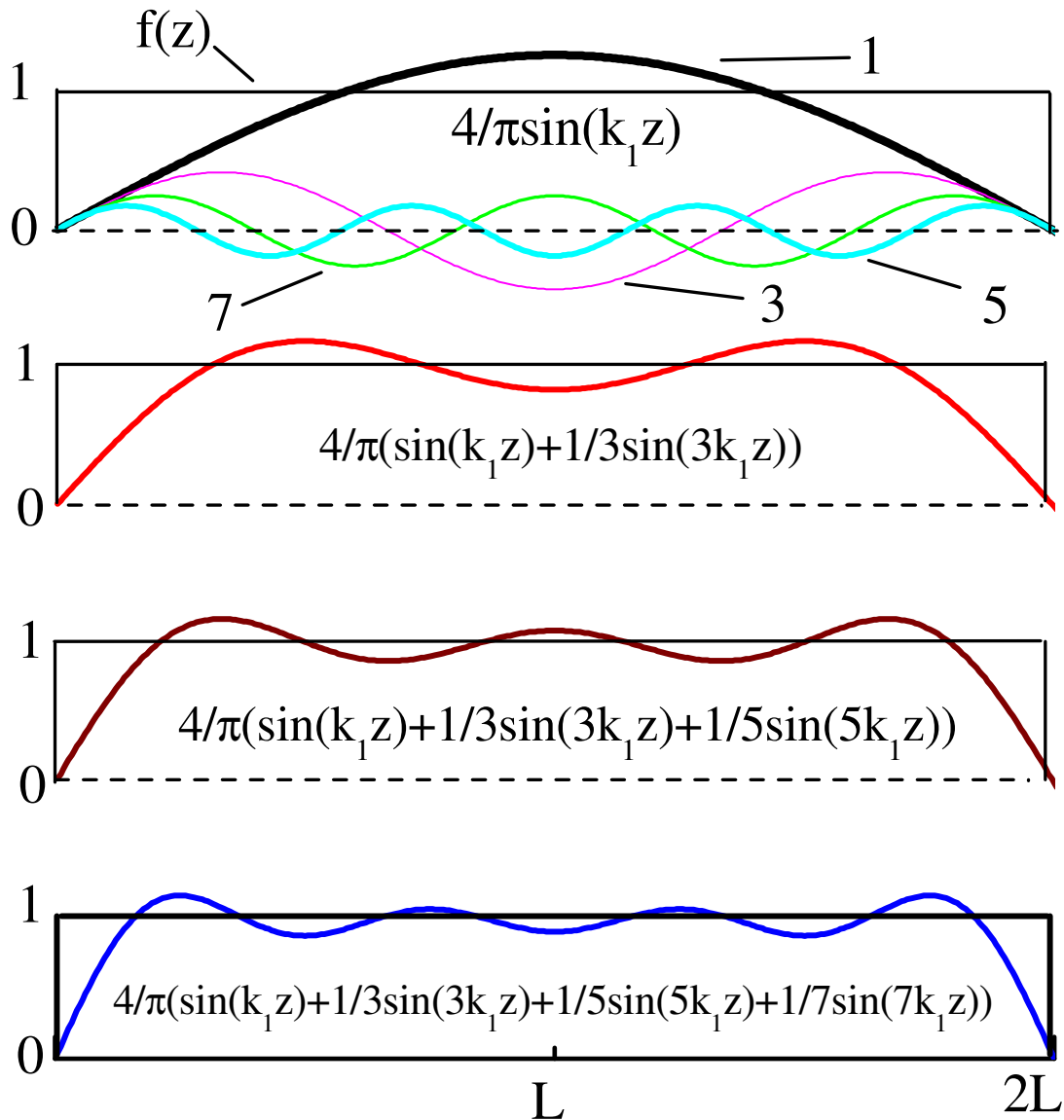
**Kolejne współczynniki maleją powoli...**

# Analiza Fourierska funkcji zależnej od czasu

Wystarczy zastąpić:  $k_1 z \leftrightarrow \omega_1 t$        $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$

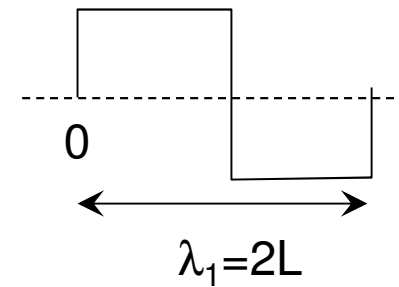


# Prostokąt...

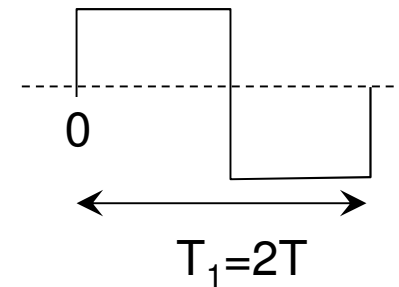


Analiza przebiegów  
periodycznych w przestrzeni

$$k_1 z \leftrightarrow \omega_1 t$$

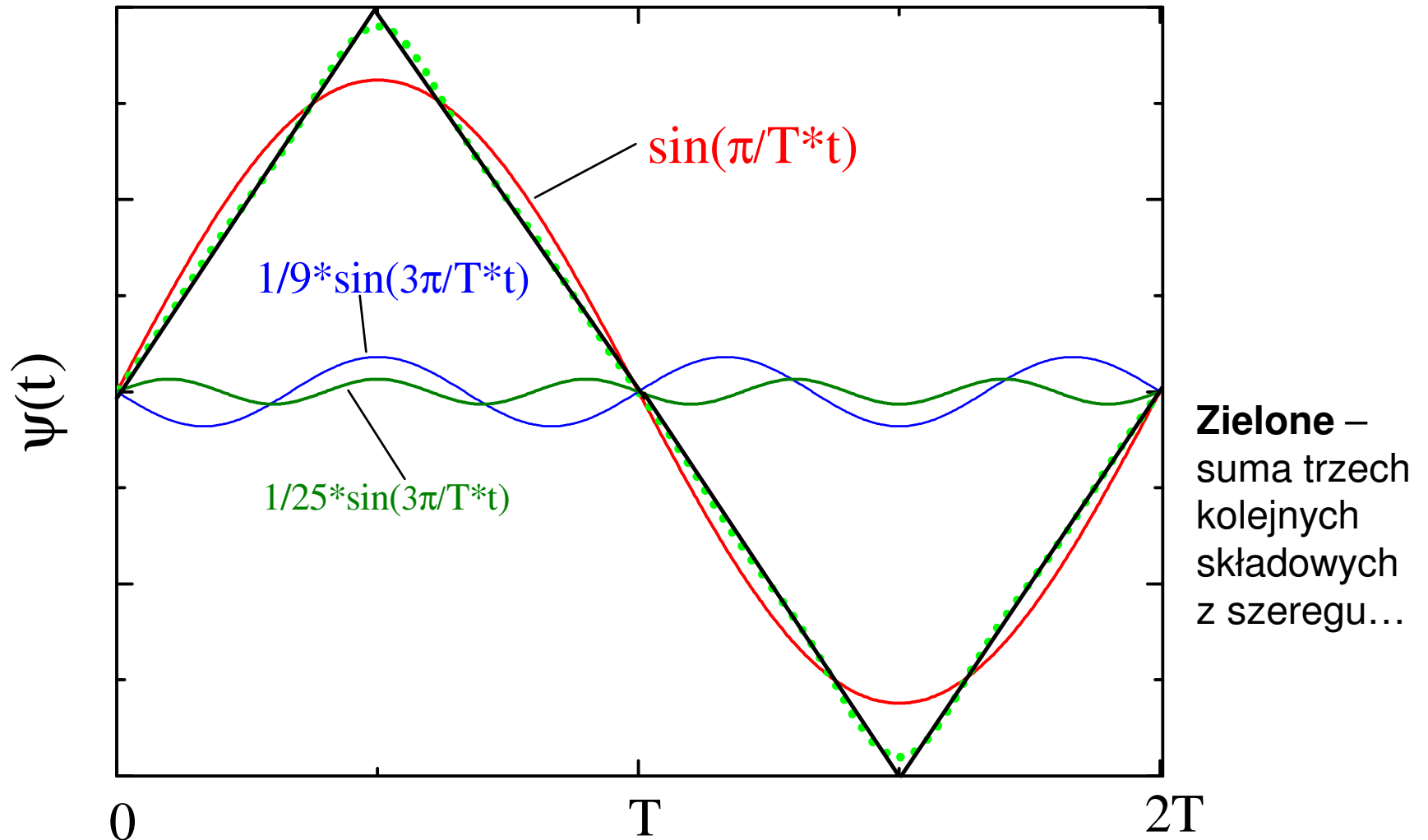


Analiza przebiegów  
periodycznych w czasie



**Żeby dobrze odtworzyć  
kształt trzeba bardzo dużo  
harmoniczych!**

# Przebieg trójkątny

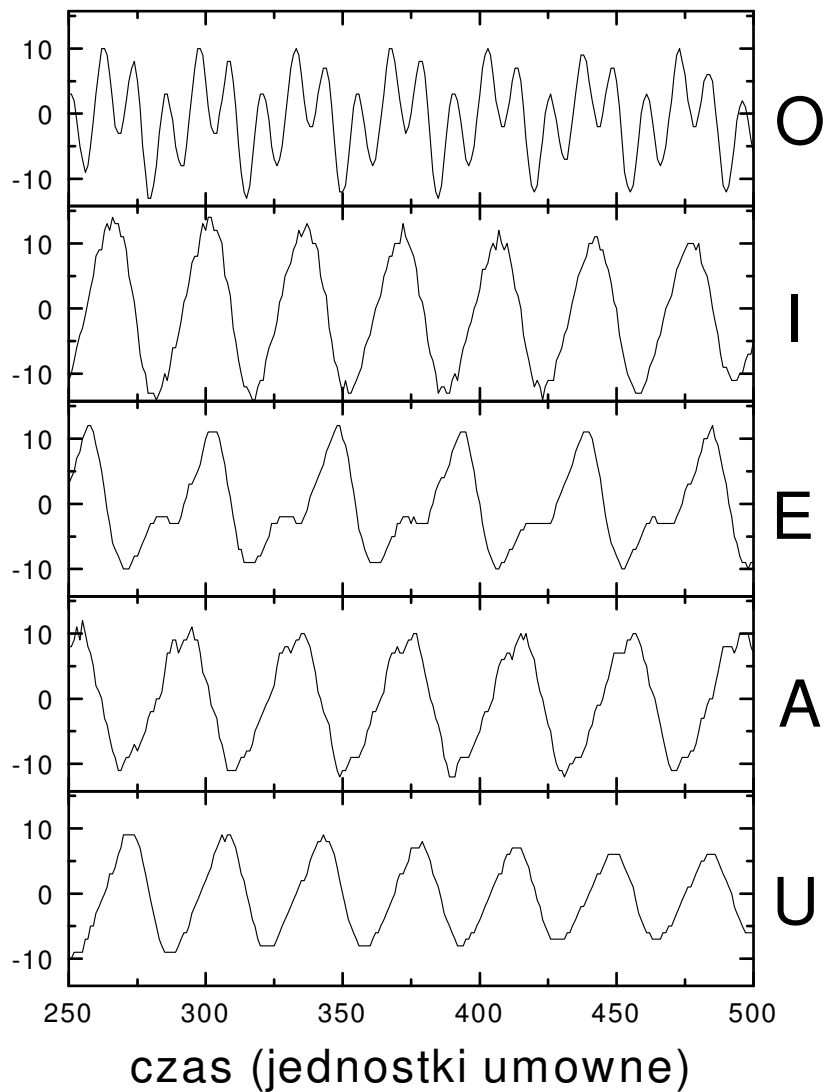


$$F(t) = A\left(\sin\left(\frac{\pi}{T}t\right) - \frac{1}{9}\sin\left(\frac{3\pi}{T}t\right) + \frac{1}{25}\sin\left(\frac{5\pi}{T}t\right) - \dots\right)$$

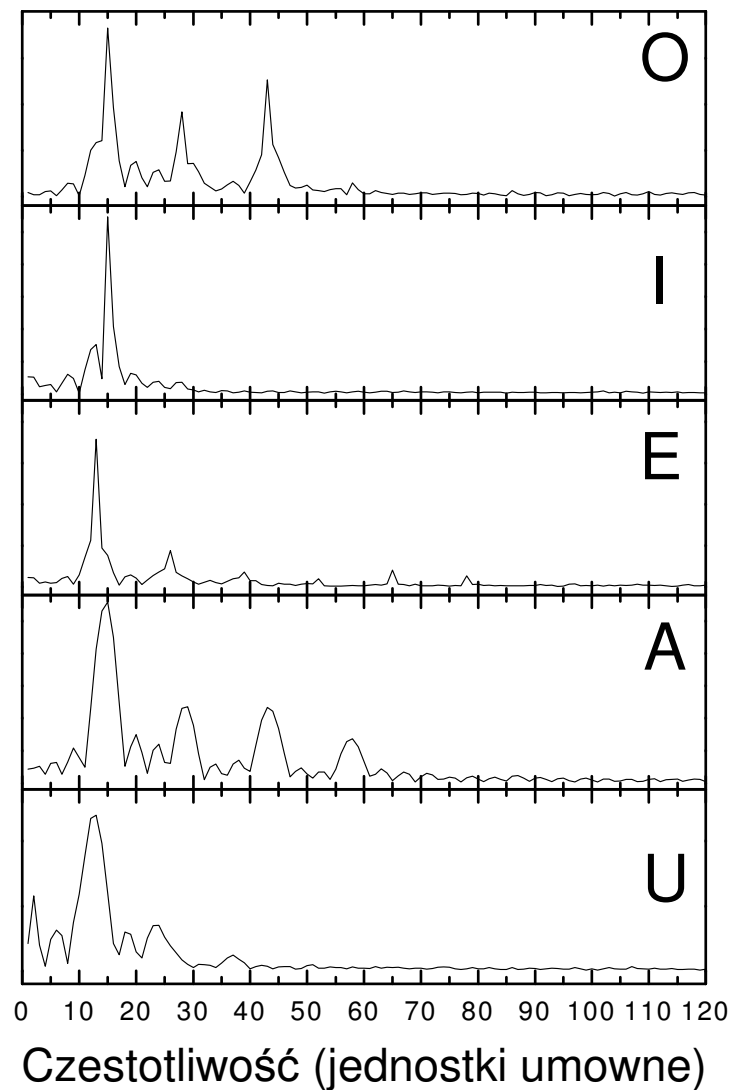
Już trzy składowe dają dobry rezultat!  
To można usłyszeć...

# Przykładowe zastosowanie analizy Fourierskiej - badanie sygnałów dźwiękowych

Przebiegi czasowe samogłoski



Widmo częstości samogłoski



# Ewolucja czasowa struny

Znając współczynniki w szeregu Fouriera dla kształtu struny w chwili  $t=0$ ,

$$f(z) = \psi(z,0) = A_1 \sin(k_1 z) + A_2 \sin(k_2 z) + \dots$$

**możemy określić ewolucję czasową drgań struny.  
Wystarczy dołożyć odpowiednie czynniki czasowe!!!**

$$\psi(z,t) = A_1 \sin(k_1 z) \cos(\omega_1 t) + A_2 \sin(k_2 z) \cos(\omega_2 t) + \dots$$

**Dla struny, której wychylenie w chwili początkowej miało kształt trójkąta będziemy mieć:**

$$\psi(z,t) = A \left[ \sin \frac{\pi z}{L} \cos(\omega_1 t) - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi z}{L} \cos(3\omega_1 t) + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi z}{L} \cos(5\omega_1 t) + \dots \right]$$

**Najlepiej zasymulować to samodzielnie na komputerze!**