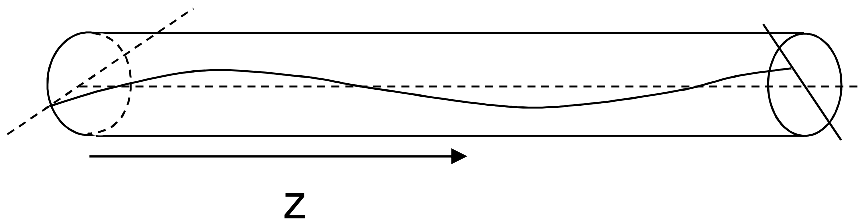
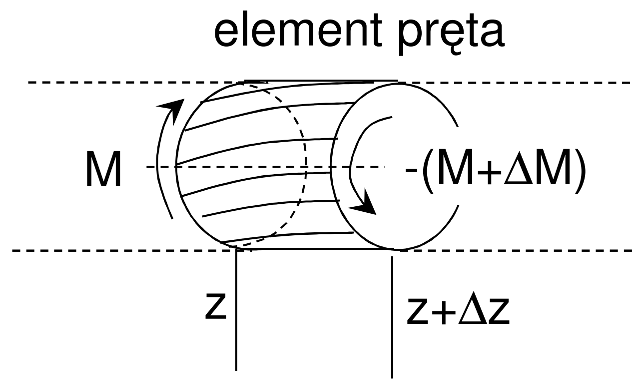
Fale skrętne w pręcie





$$M = G\frac{\pi R^4}{2}\frac{\varphi}{l} \xrightarrow{l \to dz} M = G\frac{\pi R^4}{2}\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}$$

Lokalne skręcenie o $\frac{\partial\varphi}{\partial z} \Rightarrow M(z) = G\frac{\pi r^4}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$

M(z) –moment skręcający
G – moduł sztywności
r – promień pręta

$$M(z+\Delta z) = M(z) + \frac{\partial M}{\partial z}\Delta z \Rightarrow \Delta M(z) = G\frac{\pi r^4}{2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Delta z$$

Pod wpływem wypadkowego momentu element pręta uzyskuje przyspieszenie kątowe i spełniony jest zawiązek:

$$\Delta I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \Delta M$$

gdzie, ΔI moment bezwładności plasterka o szerokości Δz

Zatem:
$$\frac{\pi}{2}\rho r^4 \Delta z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G\frac{\pi}{2} r^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\Delta z$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0}$$

Równanie falowe dla fal skręceń w pręcie

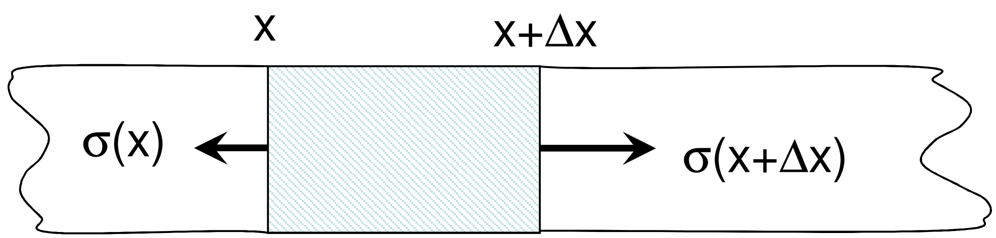
Prędkość fal skrętnych (fal ścinania):

$$\boxed{u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}$$

Prędkość fali nie zależy od promienia pręta! Nie ma różnicy pomiędzy prędkością fal skrętnych w pręcie i „dużym” ośrodku. Przy falach skrętnych występuje szczególny rozkład naprężeń, ale dla każdego rozkładu naprężeń fale będą rozchodzić się z taka sama prędkością. Ma to duże znaczenie w sejsmologii…

Fale podłużne

Rozważmy element pręta metalowego znajdujący się pomiędzy dwoma przekrojami w punktach x oraz x+ Δx



σ(x) - naprężenie

$\psi(x,t) \quad \psi(x+\Delta x,t)$ (wychylenia względem położenia równowagi)

Poddajmy pręt odkształceniu (naciskamy, uderzamy pręt) w kierunku x. Odkształcenie to będzie propagować się w pręcie dzięki powstającym w nim naprężeniom…

Można przyjąć, że średnie przemieszczenie jakiego doznaje środek masy elementu pręta zawartego pomiędzy x oraz x+ Δx wynosi $\psi(x,t)$

Zatem równanie ruchu tego elementu ma postać:

$$\rho S\Delta x \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = S\sigma(x+\Delta x) - S\sigma(x)$$

Gdzie *S* – powierzchnia przekroju poprzecznego pręta, ρ - gęstość pręta

σ(x), σ(x+Δx) – naprężenia, odpowiednio w punktach x oraz x+Δx

Stąd: $$\rho S \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = S\frac{\sigma(x+\Delta x)-\sigma(x)}{\Delta x}$$

W granicy $\Delta x \to 0$ ⇓

dostajemy $$\rho \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a gdzie *E* - moduł Younga,

$$\sigma = \varepsilon E$$

Względna zmiana długości elementu Δx $$\varepsilon = \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}$$

Zatem : $$\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}$$

Równanie analogiczne do równania falowego opisującego drgania struny.

Prędkość fal podłużnych w pręcie : $$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Fale podłużne– fale akustuczne

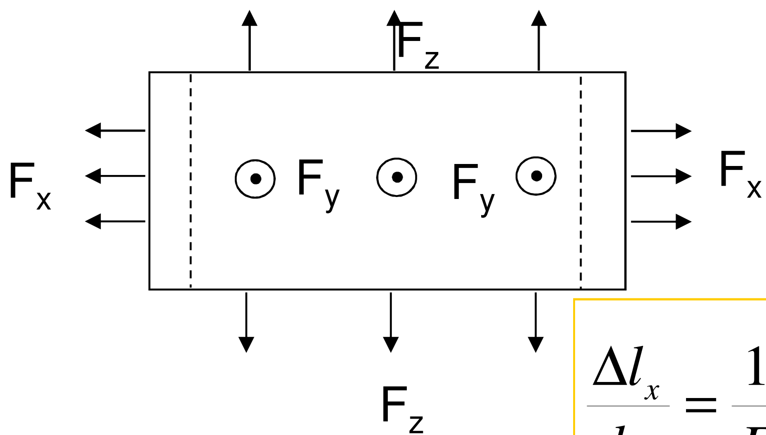
Materiał	u_l (m/s)
ołów	1200
cyna	2730
mosiądz	3710
cynk	3810
szkło flint	4000
szkło crown	5300
żelazo	5100

Prędkość dźwięku w powietrzu ~ 330m/s. Wiadomo więc dlaczego Indianie przykładali uszy do szyn kolejowych…

Prędkość fal podłużnych w dużym ciele (np.. w Ziemi)

Przez ciało *duże* lub *grube* rozumiemy ciało, którego wymiary poprzeczne są dużo większe od długości fali dźwiękowej.

Nacisk nie może rozszerzać się na boki, dochodzi do ściskania w jednym wymiarze, tak jak w belce z uwięzionymi bokami…



Rozpatrzmy belkę, którą rozciągamy wzdłuż osi x, dbając o to, aby nie nastąpiło przewężenie w kierunkach y, z – odpowiada to przykładaniu sił prostopadłych do x…

Wydłużenie wzdłuż kierunku x

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E}\frac{F_x}{A_x} - \frac{\mu}{E}\frac{F_y}{A_y} - \frac{\mu}{E}\frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{E}\left(\frac{F_x}{A_x} - \mu\left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right)$$

Wydłużenia wzdłuż y, z

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{E}\left(\frac{F_y}{A_y} - \mu\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right) \qquad \frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{E}\left(\frac{F_z}{A_z} - \mu\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y}\right)\right)$$

Boki „zamocowane” więc:

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{\Delta l_z}{l_z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\mu}{1-\mu}\frac{F_x}{A_x}$$

Stąd: $$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right)\frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{E}\left(\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu}\right)\frac{F_x}{A_x}$$

$$\Downarrow$$

Naprężenie
Wzdłuż osi x $$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} = \left(\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}\right)E\frac{\Delta l_x}{l_x}$$ E – moduł Younga

$$\Downarrow$$

$$E' = \left(\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}\right)E$$

E'- efektywny moduł Younga dla ciała „grubego”…

Sprężyste fale podłużne w ośrodku „dużym” : $$u_l^\infty = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$$

Sprężyste fale podłużne w pręcie : $$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Fale poprzeczne skręceń w pręcie: $$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$ G – moduł sztywności

Ponieważ $G = \dfrac{E}{2(1+\mu)}$ $\Rightarrow$ $G < E < E'$ $\Rightarrow$ $u_l > u_t$

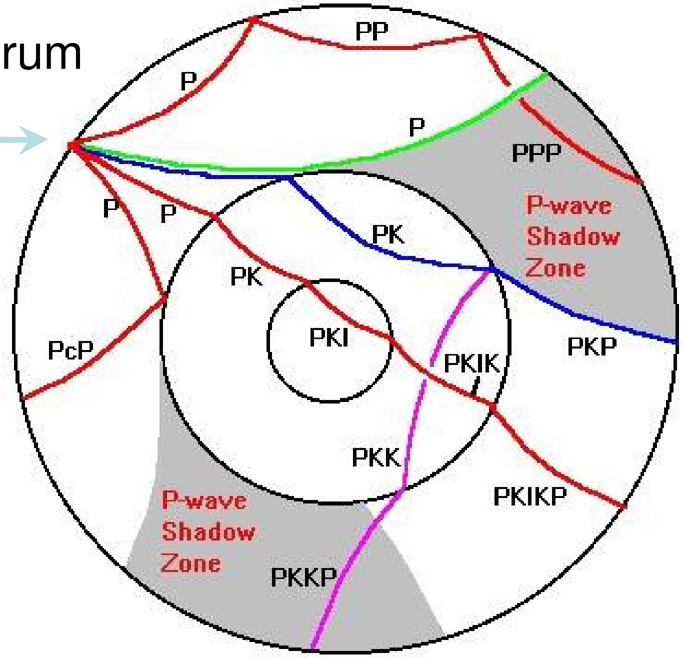
Fale podłużne są szybsze niż fale poprzeczne!

Fale sejsmiczne

Ziemia

Stacja obserwacyjna

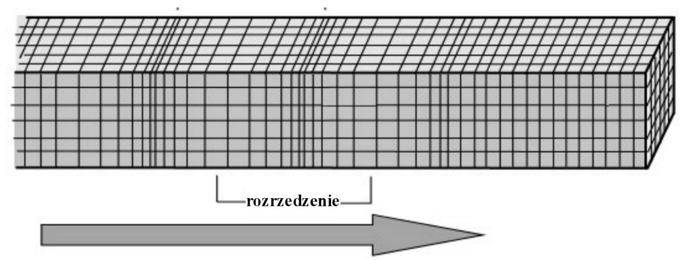
Epicentrum



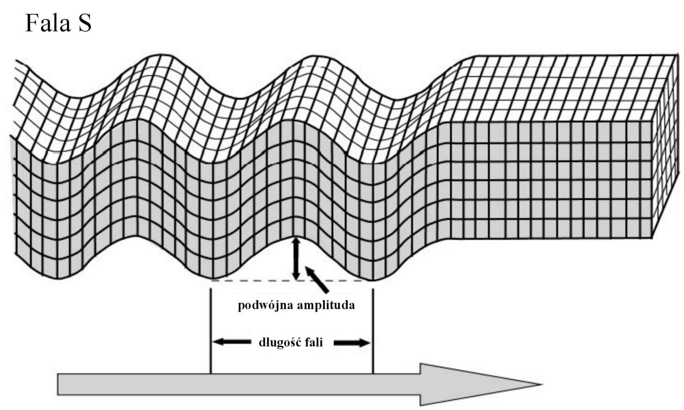
K- fale podłużne, które przeszły przez jądro (z niem. *kern)*

Fale powierzchniowe (Rayleigha i Love'a) podłużno-poprzeczne…

Fale podłużne P (primary)



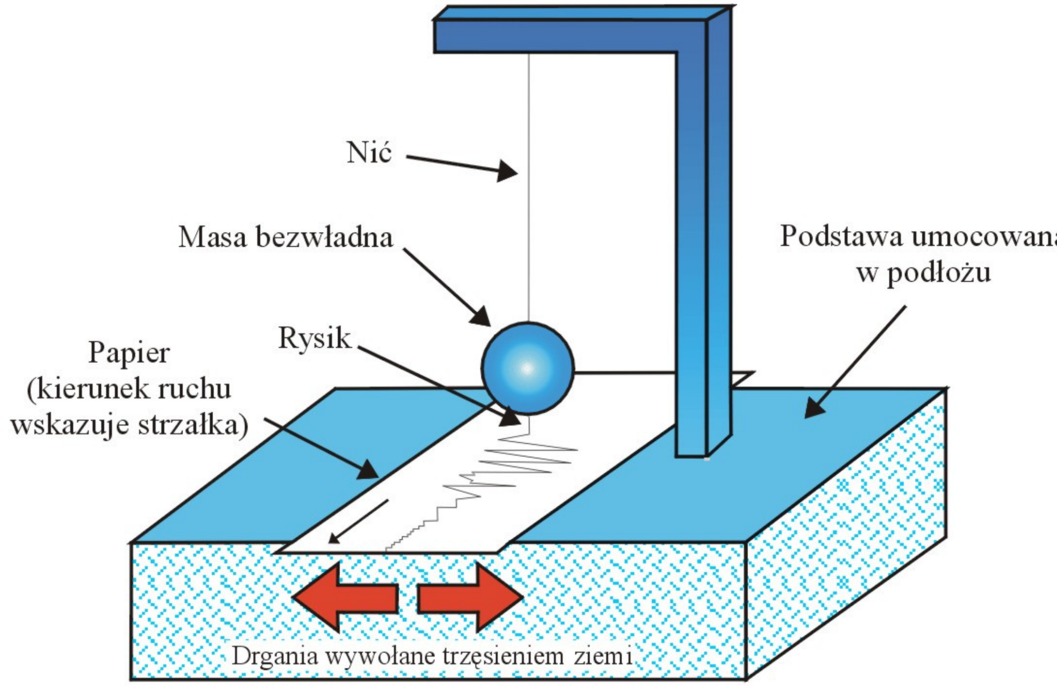
Fale poprzeczne S (secondary)

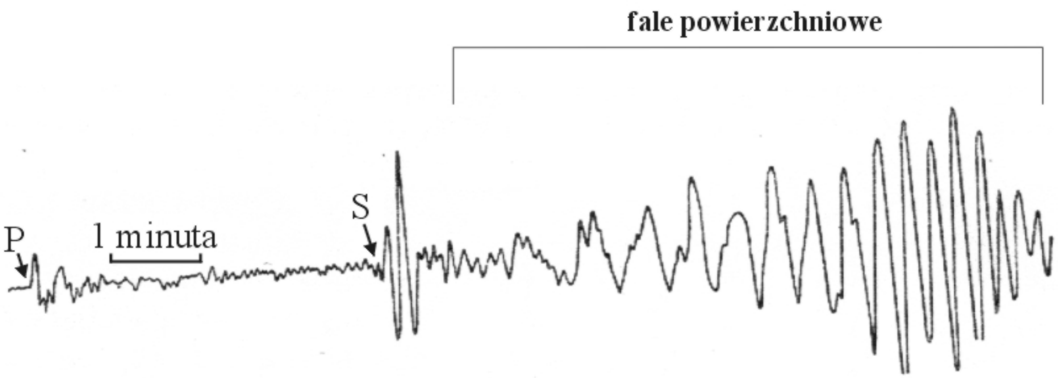


http://www.pgi.gov.pl/

Rejestracja fal sejsmicznych

- składowa pionowa - Z
- składowa pozioma wzdłuż kierunku N-S (północ-południe)
- składowa pozioma wzdłuż kierunku W-E





Sejsmogram trzęsienia ziemi w Turcji (1909) na stacji Pułkowo w Rosji

Zasada działania sejsmografu do rejestracji drgań poziomych.
Przy rejestracji drganiach pionowych używa się ciężarka na sprężynie…

http://www.pgi.gov.pl/

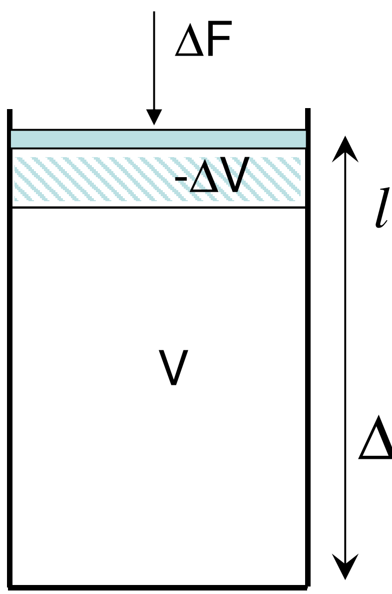
Fale dźwiękowe w powietrzu

Fale dźwiękowe w powietrzu to fale podłużne, w których mamy do czynienia z przemieszczającymi się zagęszczeniami i rozrzedzeniami gazu…

Sytuacja jest więc bardzo podobna do tej z jaką mamy do czynienia w przypadku poznanych już sprężystych fal podłużnych…

Prędkość fal podłużnych: $u_l = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$

Aby skorzystać z analogii należy wyznaczyć efektywny moduł Younga dla gazu…



$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} \qquad l = \frac{V}{S} \qquad \Delta l = \frac{\Delta V}{S} \qquad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} = -E_{eff}\frac{\Delta l}{l} = -E_{eff}\frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta p = -E_{eff}\frac{\Delta V}{V} \Longrightarrow E_{eff} = -\frac{\Delta p}{\Delta V}V \qquad E_{eff} = -\frac{dp}{dV}V = K$$

Dla słupa gazu (cieczy) rolę modułu Younga przejmuje moduł ściśliwości *K !!!*

Prędkość dźwięku w powietrzu

Przemiana izotermiczna (Newton…)
(wymiana ciepła z otoczeniem)

$$pV = const$$

$$\Downarrow$$

$$Vdp + pdV = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{dp}{dV}V = p \equiv E_T$$

$$\Downarrow$$

$$u_l = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Przemiana adiabatyczna
(brak wymiany ciepła z otoczeniem)

$$pV^{\kappa} = const$$

$$\Downarrow$$

$$V^{\kappa}dp + p\kappa V^{\kappa-1}dV = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{dp}{dV}V = \kappa p \equiv E_A$$

Efektywny moduł Younga

$$\Downarrow$$

$$u_l = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$$

Warunkach normalnych:

$$u_{lT} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 280\frac{m}{s}$$

$$\boxed{u_l = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = 332\frac{m}{s}}$$

Zgodne
z doświadczeniem!

Proces przewodnictwa jest za wolny aby ciepło przepłynęło z obszarów zagęszczeń do rozrzedzeń (czyli żeby wyrównać temperaturę)....

Prędkość dźwięku w helu

Dla powietrza:

$$\kappa_p = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}4$$

$$\rho_p = 1{,}29 \frac{kg}{m^3}$$

Dla helu:

$$\kappa_{He} = \frac{c_p}{c_V} = 1{,}66$$

$$\rho_{He} = 0{,}1785 \frac{kg}{m^3}$$

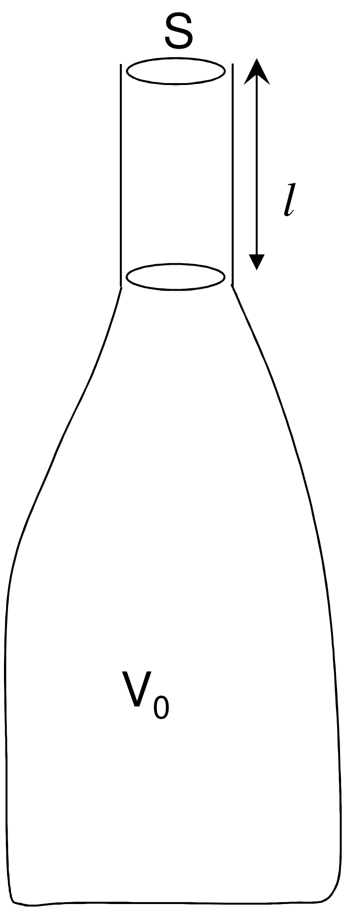
$$\boxed{u_{He} = \sqrt{\frac{\kappa_{He} p}{\rho_{He}}} = 971 \frac{m}{s}}$$

Po wciągnięciu do płuc helu częstotliwość emitowanych przez nas dźwięków rośnie! (wymiary strun głosowych nie zmieniają się…)

$$\nu_p = \frac{u_p}{\lambda} \qquad \nu_{He} = \frac{u_{He}}{\lambda} \Rightarrow \frac{\nu_{He}}{\nu_p} = 2.92$$

Dlatego wdychając hel, możemy mówić „wysokim” głosem…

Częstotliwość drgania podstawowego dla butelki



Rozważamy ruch powietrza w szyjce o długości l
Pod wpływem zmian ciśnienia w środku butelki (objętość V_0). Jeśli przesunąć powietrze w szyjce o Δx, to zmiana ciśnienia w środku wyniesie (dla procesu adiabatycznego):

$$\Delta p = -\frac{\kappa p}{V_0}\Delta V = -\frac{\kappa p}{V_0} S\Delta x$$

Pojawi się siła zwrotna:

$$F_x = \Delta p S \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\kappa p}{V_0} S^2 \Delta x$$

Będzie ona działać na powietrze w szyjce, stad równanie ruchu:

$$\rho l S \frac{\partial^2(\Delta x)}{\partial t^2} = -\frac{\kappa p}{V_0} S^2 \Delta x$$

Stąd częstość drgań (dla modu podstawowego) :

$$\omega^2 = \frac{\kappa p}{\rho}\frac{S}{V_0 l} = u^2 \frac{S}{V_0 l}$$

Dobrze to sprawdzić doświadczanie!