

Przepływ cieczy i gazów (czyli płynów)

Opis przepływu cieczy

Idealizacja cieczy rzeczywistej

- nieściśliwa
- nie posiada lepkości

Gazy – gdy przepływają powoli można nie brać pod uwagę ich ściśliwości i traktować je jak nieściśliwe ciecze.

Euler: znajomość prędkości przepływu w każdym punkcie cieczy o współrzędnych x, y, z

$$v_x = f_1(x, y, z, t) \quad v_y = f_2(x, y, z, t) \quad v_z = f_3(x, y, z, t)$$

Lagrange: znajomość losów określonej cząstki cieczy

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}$$

$$v_z = \frac{dz}{dt}$$

równanie toru



$$dx = v_x dt = f_1(x, y, z, t) dt$$

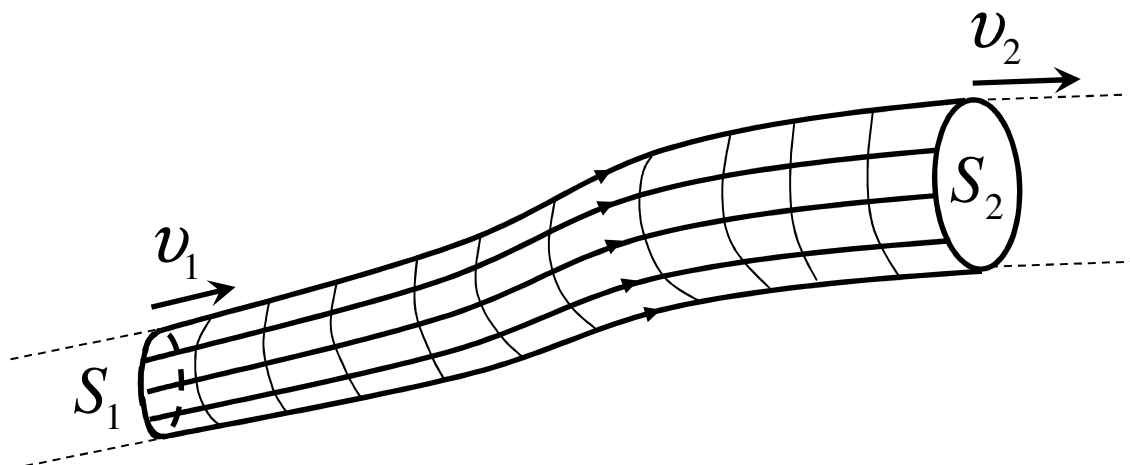
$$dy = v_y dt = f_2(x, y, z, t) dt$$

$$dz = v_z dt = f_3(x, y, z, t) dt$$

Linia prądu: krzywa w każdym punkcie styczna do prędkości cieczy przepływającej przez ten punkt.

Przepływ stacjonarny – układ linii prądu nie zależy od czasu, a więc charakteryzuje równocześnie tory przebiegane przez poszczególne cząstki...

Wiązka przylegających do siebie linii prądu tworzy „**rurkę prądu**”



W **przepływie stacjonarnym** masa ciecży zawarta w pewnej objętości jest stała, tzn. przez każdy przekrój poprzeczny rurki prądu w jednostce czasu przepływa taka sama masa ciecży:

$$m = Sv\rho = const$$

gdzie S – powierzchnia przekroju poprzecznego rurki (w dowolnym miejscu),
 v - średnia szybkość przepływu ciecży dla tego przekroju,
 ρ - gęstość ciecży

Dla nieściśliwej ciecży idealnej:

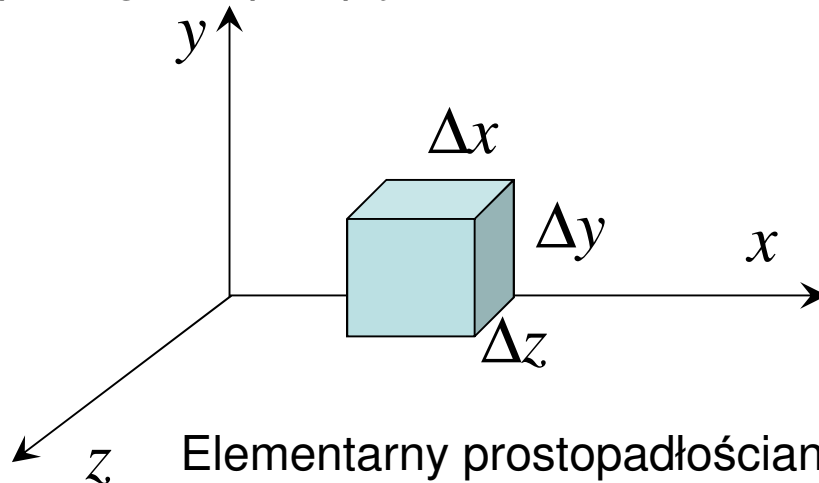
$$Sv = const \quad \longrightarrow$$

Szybkość stacjonarnego przepływu jest większa, tam gdzie rurki skupiają się zaś mniejsza, gdy się rozszerzają...

Jeśli podzielić cały przepływ cieczy na rurki o jednakowej (np. jednostkowej) wartości Sv .



Szybkość przepływu (objętość na jednostkę czasu) proporcjonalna do liczby rurek, przecinających jednostkę powierzchni przekroju prostopadłego do przepływu.



Elementarny prostopadłościan o krawędziach $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

W kierunku osi x przez tylną ściankę prostopadłościanu przepływa w czasie Δt objętość:

$$V(x) = v_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Przez ściankę przednią prostopadłościanu wypływa w czasie Δt objętość:

$$V(x + \Delta x) = \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \Delta z \Delta t$$

Wypadkowy wypływ wzdłuż x:

$$\Delta V_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Analogicznie wzdłuż kierunków y i z dostaniemy:

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \quad \Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Dla cieczy nieściśliwej objętość cieczy wpływającej do prostopadłościanu, musi być równa objętości cieczy wypływającej z niego, zatem:

$$\Delta V_x + \Delta V_y + \Delta V_z = 0$$



$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

**Hydrodynamiczne
równanie ciągłości**

Analogicznie dla cieczy ściśliwej byłoby:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho v_z) = \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0$$

Przyspieszenie elementu ciecchy

Równanie Newtona dla elementu o jednostkowej objętości można zapisać w postaci:

$$\rho \cdot \vec{a} = \vec{f}$$

\vec{a} – przyspieszenie elementu ciecchy
 \vec{f} – siła na jednostkę objętości
 ρ – gęstość

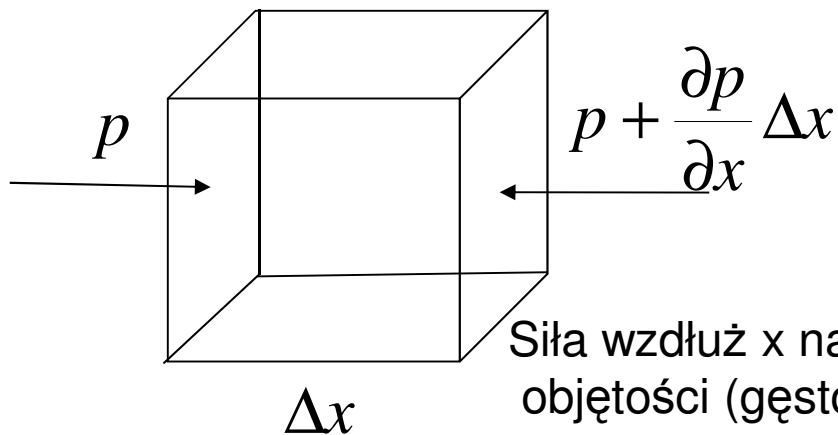
Jakie siły mogą działać na element ciecchy?

- pochodzące od ciśnienia, a właściwie zmiany ciśnienia na przestrzeni elementu ciecchy

Wypadkowa siła wzdłuż x:

$$\Delta F_x = [p(x + \Delta x) - p(x)]\Delta y\Delta z$$

$$\Delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$



Siła wzdłuż x na jednostkę objętości (gęstość siły):

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta F_x}{\Delta V} = f_x = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Biorąc pod uwagę trzy kierunki gęstość siły wyniesie:

$$\vec{f} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z} \right] = -\vec{\nabla} p$$

- zewnętrzne siły zachowawcze działające na odległość (siła grawitacji, siła Coulomba) - można je opisać za pomocą potencjału $\varphi(x,y,z)$ na jednostkę masy:

$$\vec{f}_{zp} = -\rho \left[\frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z}, \right] = -\rho \vec{\nabla} \varphi$$

- zewnętrzne siły niezachowawcze
- „wewnętrzne” siły niezachowawcze np. siła lepkości \vec{f}_{lep} (prowadzi do występowania naprężeń ścinających w przepływającej cieczy)

Sumując przyczynki od różnych czynników dostajemy:

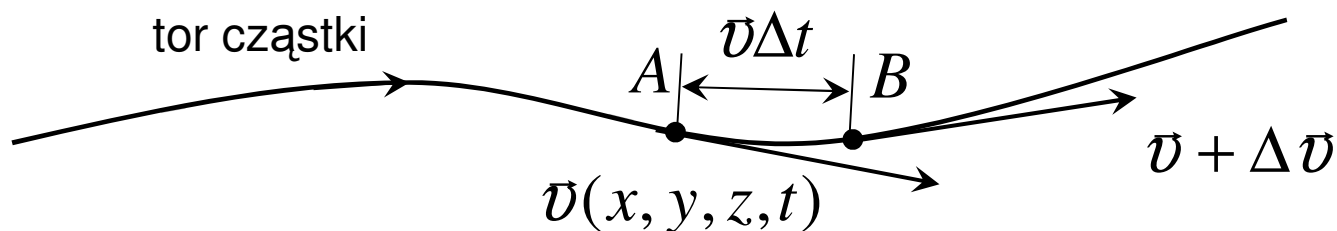
$$\rho \vec{a} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \varphi + \vec{f}_{lep}$$

Zajmijmy się teraz przybliżeniem nielepkiej cieczy („sucha woda”...)

$$\rho \vec{a} = -\vec{\nabla} p - \rho \vec{\nabla} \varphi$$

Spróbujmy znaleźć przyspieszenie \mathbf{a} elementu cieczy. Z pozoru jest to łatwe...

Jak zmienia się prędkość wybranej cząstki cieczy?



$\frac{\partial v}{\partial t}$ - szybkość z jaką prędkość $\vec{v}(x, y, z, t)$ zmienia się w pewnym ustalonym punkcie przestrzeni (x, y, z)

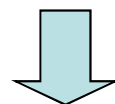
Jeśli element cieczy, w czasie Δt przemieści się od punktu A do punktu B, to przesunie się o $v_x \Delta t$ w kierunku x , $v_y \Delta t$ w kierunku y i $v_z \Delta t$ w kierunku z .

Prędkość cząstki chwili t w punkcie (x, y, z) $\vec{v}(x, y, z, t)$

Prędkość cząstki w chwili $t + \Delta t$ $\vec{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t)$

Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu:

$$\vec{v}(x + v_x \Delta t, y + v_y \Delta t, z + v_z \Delta t, t + \Delta t) = \vec{v}(x, y, z, t) + \frac{\partial v}{\partial x} v_x \Delta t + \frac{\partial v}{\partial y} v_y \Delta t + \frac{\partial v}{\partial z} v_z \Delta t + \frac{\partial v}{\partial t} \Delta t$$



Stąd zmiana prędkości cząstki przy przejściu z punktu *A* do *B*:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Można to zapisać w postaci:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = (\vec{v} \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Zatem równanie ruchu cząstki cieczy (przy pominięciu lepkości) ma postać:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \varphi$$

Jeśli skorzystamy z tożsamości wektorowej:

$$(\vec{v} \nabla) \vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \quad \vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} \quad \begin{array}{l} \text{rotacja} \\ \text{wektora } \vec{v} \end{array}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla} \varphi$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) \quad \text{lub} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right)$$

Dla przepływu stacjonarnego (ustalonego) – **w każdym punkcie cieczy prędkość się nie zmienia** (w każdym punkcie ciecz zostaje zastępowana nową cieczą, linie prądu są ustalone w czasie). Czyli: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Zatem równanie ruchu $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right)$ (**)

przyjme postać:

Pomnóżmy je skalarnie
(z lewej strony) przez wektor \vec{v}

Ponieważ wektor $(\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v}$ **jest prostopadły do wektora** \vec{v}

to lewa strona równania (**) przyjmuje wartość zero co oznacza, że dla przepływu stacjonarnego


$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = 0$$

Czyli dla małego przesunięcia w kierunku ruchu cieczy wielkość w nawiasie nie ulega zmianie...

Ale w przepływie stacjonarnym (ustalonym), wszystkie przesunięcia zachodzą wzdłuż linii prądu! **Zatem wzdłuż linii prądu zachodzi związek:**

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const} \quad \text{Twierdzenie Bernoulliego}$$

Jeśli ruch jest bezwirowy,
to już wcześniej
moglibyśmy napisać:

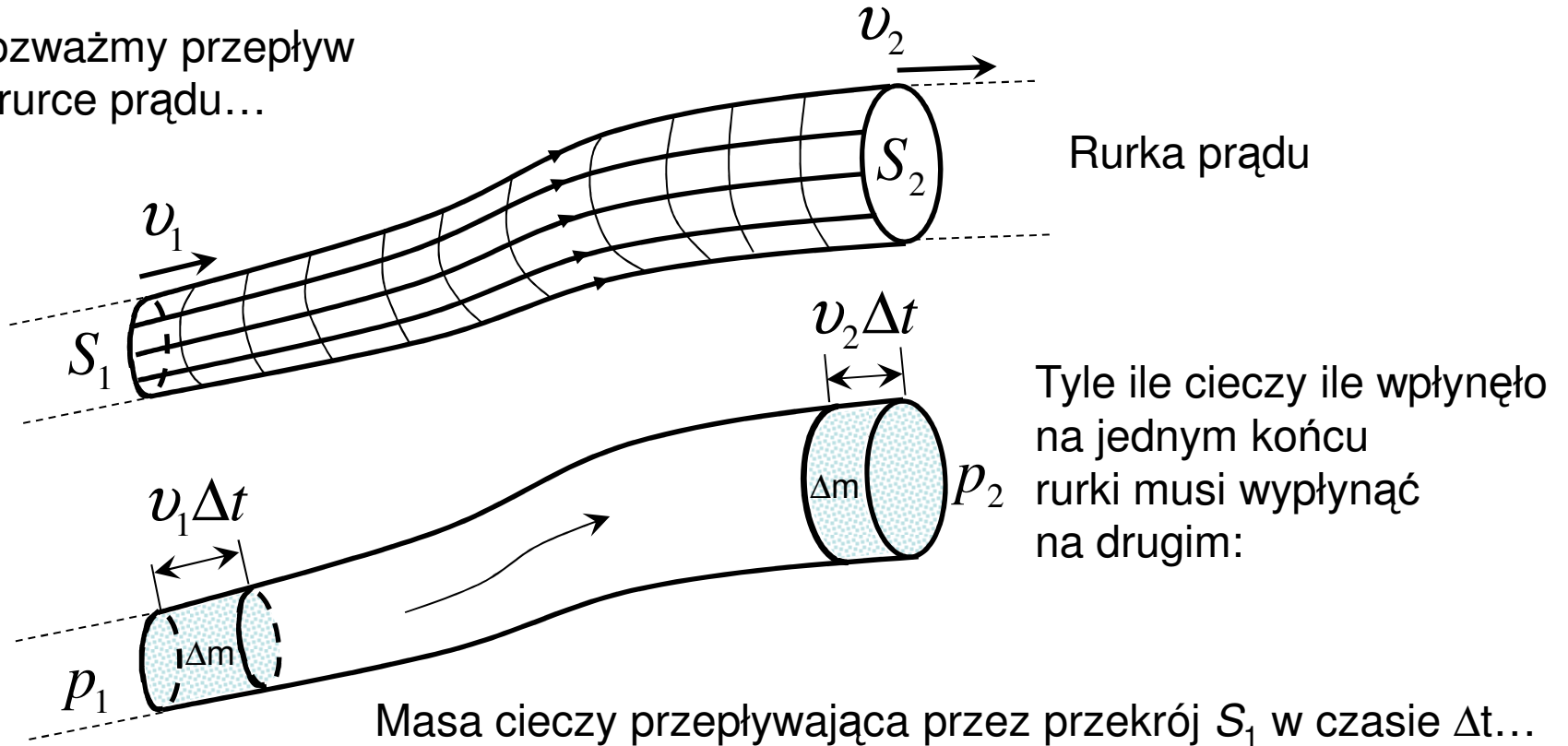
$$\vec{\Omega} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$
$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = 0$$


$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const} \quad \text{zachodzi w całej cieczy!}$$

Równanie Bernoulliego można też wyprowadzić inaczej korzystając z zasady zachowania energii...

Twierdzenie Bernoulliego – przejaw zasady zachowania energii

Rozważmy przepływ w rurce prądu...



$$\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$



$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$$

Praca wykonana przez ciśnienie
w cieczy (siła razy przesunięcie):

$$\Delta W = p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t$$

Zmiana energii masy Δm przy
przejściu z od powierzchni S_1
do powierzchni S_2

$$p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t = \Delta m (E_2 - E_1) (*)$$

gdzie, E_1 , E_2 – energia przypadająca na
jednostkę masy, odpowiednio
na powierzchni S_1 oraz S_2 .

Całkowitą energię na jednostkę masy cieczy można przestawić w postaci sumy
energii kinetycznej, potencjalnej φ i pewnej energii wewnętrznej cieczy U :

$$E = \frac{1}{2} v^2 + \varphi + U$$

Korzystając z tego związku wyrażenie (*) można zapisać w postaci

$$\frac{p_1 S_1 v_1 \Delta t - p_2 S_2 v_2 \Delta t}{\Delta m} = \frac{1}{2} v_2^2 + \varphi_2 + U_2 - \frac{1}{2} v_1^2 + \varphi_1 + U_1$$

ale $\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$ więc:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}v_1^2 + \varphi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}v_2^2 + \varphi_2 + U_2$$

Dla cieczy nieściśliwej i bez lepkości wyraz z energią wewnętrzną jest taki sam po obu stronach równania i wzdłuż rurki mamy:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \varphi = \text{const}$$

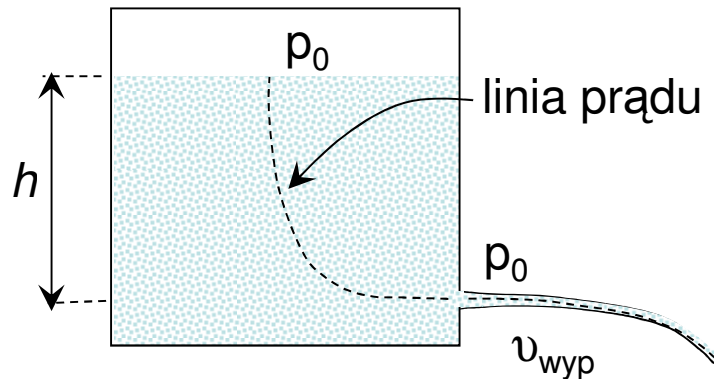
Prawo Bernoulliego

Wyływ ciecchy z naczynia

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho \varphi = \text{const}$$

Na górze: $v = 0$, $p = p_0$, $\varphi = 0$

Przy otworze: v_{wyp} , $p = p_0$, $\varphi = -gh$



Zatem:
$$p_0 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_{\text{wyp}}^2 - \rho gh$$

Stąd:

$$v_{\text{wyp}} = \sqrt{2gh}$$

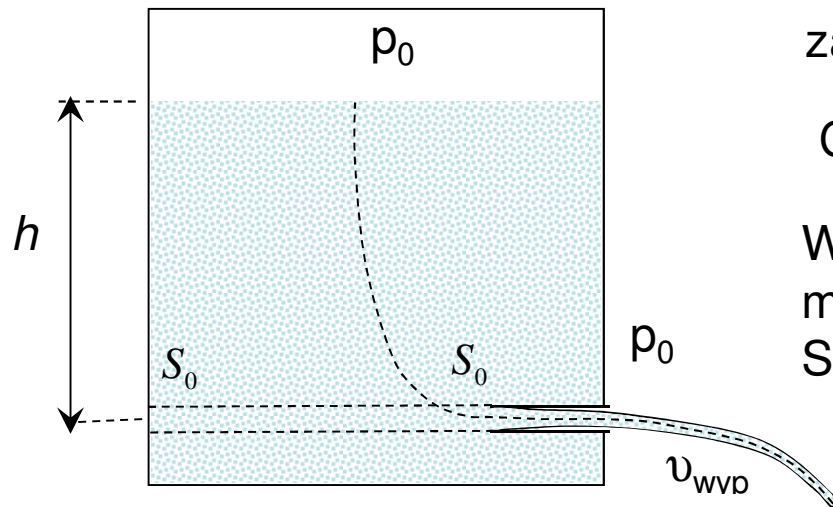
Tak jak przy spadku swobodnym!

Ile wody wypływa ze zbiornika w jednostce czasu?

Zdziwiłby się ten kto by myślał, że wystarczy pomnożyć prędkość wypływu przez czas i rzeczywistą powierzchnię otworu. Strumień ciecchy zawęża się i w efekcie wypływ ciecchy zmniejsza się - dla otworu o przekroju kołowym do ok. 60%...

Dlaczego?

Rozważmy sytuację, w której do środka naczynia wstawimy rurkę o pewnym (małym) przekroju S_0 ...



Dotychczas korzystaliśmy z zasady zachowania energii.

Co z zasadą zachowania pędu?

Wypływająca ciecz unosi pewien pęd, a zatem musi na nią działać pewna siła...
Skąd się bierze?

Siła pochodzi od ścianek naczynia...

Niech przekrój strumienia wyniesie: $S_{eff} = \alpha S_0$

W czasie Δt z otworu wypłynie masa Δm :

$$\Delta m = \alpha S_0 \rho v_{wyp} \Delta t$$

Unoszony przez ciecz pęd wyniesie:

$$\Delta \tilde{p} = (\alpha S_0 \rho v_{wyp} \Delta t) v_{wyp} = \alpha S_0 \rho v_{wyp}^2 \Delta t$$

Zatem na element ścianki naczynia naprzeciwko rurki działa siła:

$$F = \frac{\Delta \tilde{p}}{\Delta t} = \alpha S_0 \rho v_{wyp}^2$$

Siła reakcji działająca na strumień jest równa sile parcia jaki wywiera ciecż na powierzchnię ścianki S_0 naprzeciwko otworu (zakładamy, że przy ściankach ciecż się praktycznie nie rusza):

$$F = S_0 \rho g h$$



$$S_0 \rho g h = \alpha S_0 \rho v_{wyp}^2$$

Ale wiemy, że $v_{wyp} = \sqrt{2gh}$



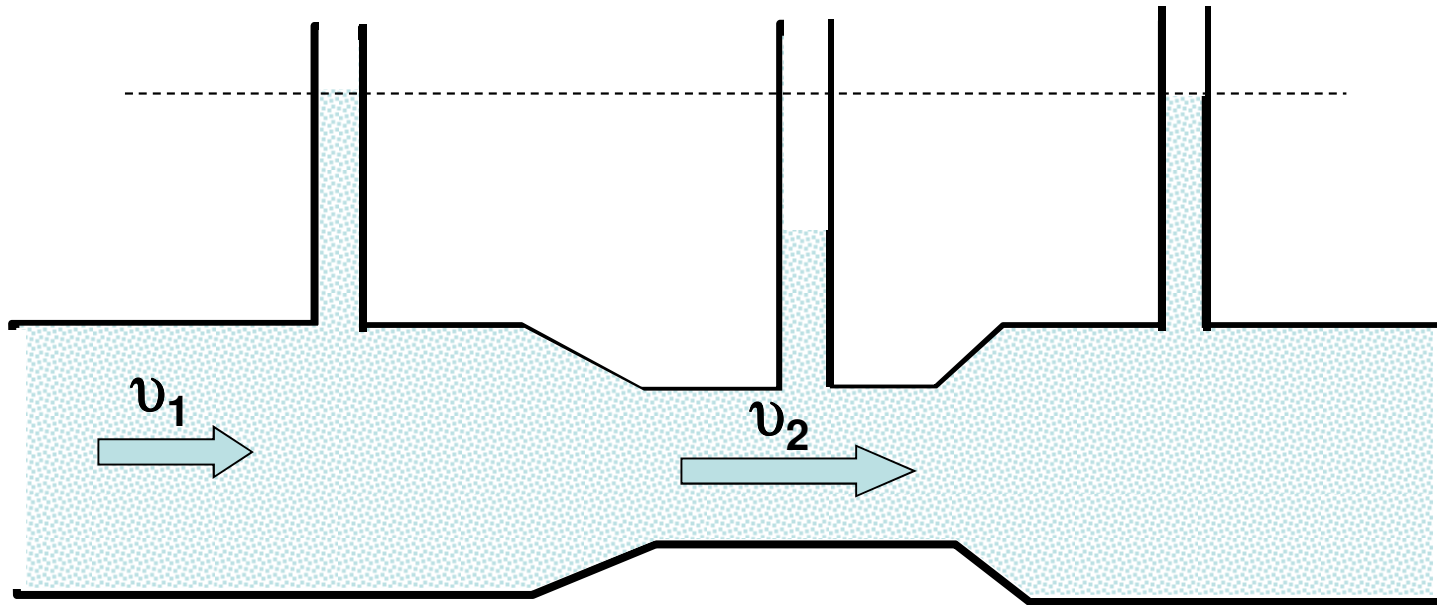
$$S_0 \rho g h = \alpha S_0 \rho 2gh$$



$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem z takiego otworu wypłynie o połowę mniej ciecży, niż by się można spodziewać! Ma to znaczenie, jeśli chce się wiedzieć ile wody może wypłynąć z beczkowitzu przez otwór o znanej średnicy...

Ciśnienie statyczne i dynamiczne



$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + \varphi = const$$

Na tym samym poziomie mamy ten sam potencjał ...

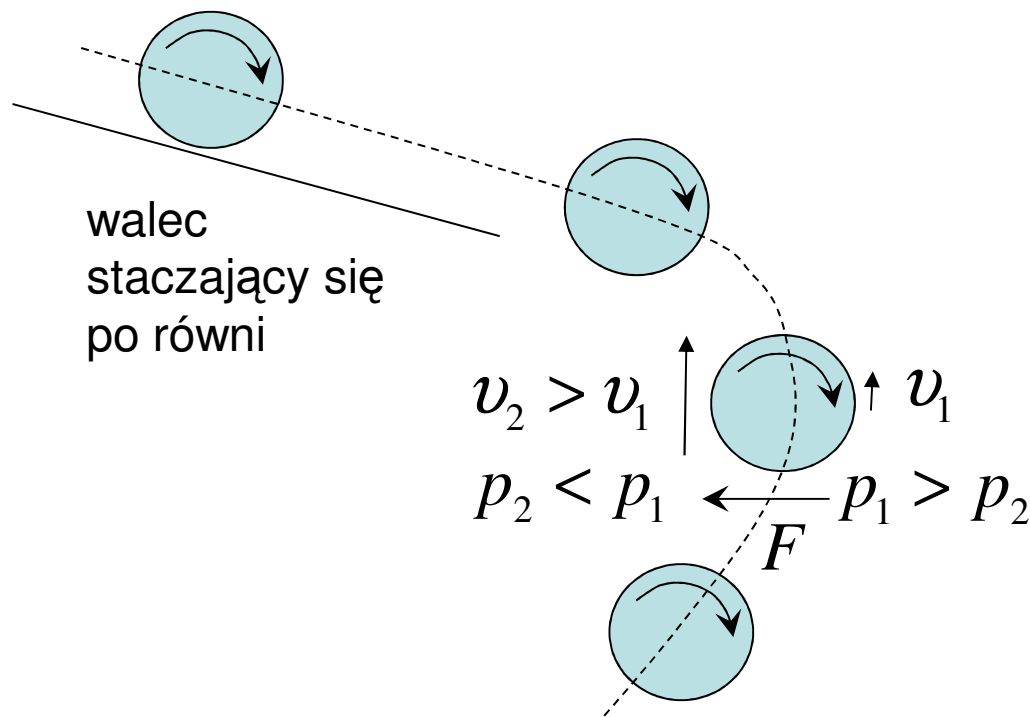
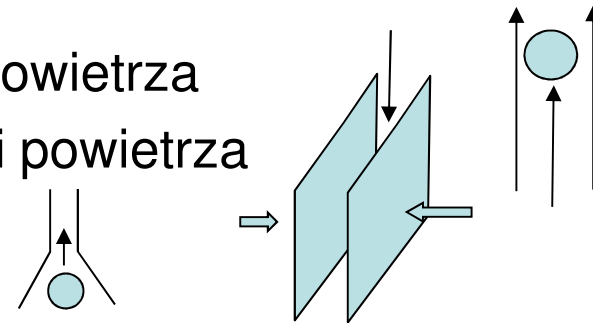
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \implies p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$$

Ale z równania
ciągłości:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 \implies p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)$$

Trochę doświadczeń ilustrujących prawo Bernoulliego

- kuleczka ping-pongowa w strumieniu powietrza
- strumień powietrza pomiędzy kartkami powietrza
- wciąganie kulki przez lejek...
- efekt Magnusa...i lepkość



Jakościowe wyjaśnienie:

Dzięki lepkości obracający się walec „napędza” cząsteczki powietrza po lewej stronie i hamuje po prawej...

Po lewej stronie walca gaz ma większą prędkość, niż po prawej, to oznacza (zgodnie z prawem Bernoulliego), że ciśnienie statyczne po prawej stronie będzie większe niż po lewej...

Wykorzystują to piłkarze, strzelając bramki np. z rzutu różnego...

Lepkość – tarcie wewnętrzne

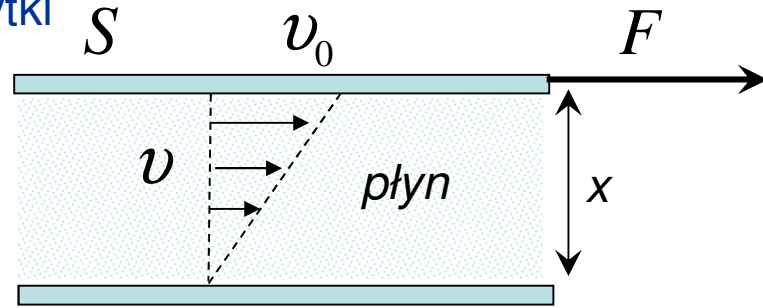
$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

Siła oporu proporcjonalna
do prędkości ruchu

Powietrze (20 °C)	$1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N s/m}^2$
Woda (20 °C)	$1,0 \cdot 10^{-3} \text{ N s/m}^2$
Gliceryna (20 °C)	$8,5 \cdot 10^{-1} \text{ N s/m}^2$
Olej rycynowy (20 °C)	$9,7 \cdot 10^{-1} \text{ N s/m}^2$
Smoła (20 °C)	10^7 N s/m^2

Rozważmy dwie (bliskie sobie) płaskie płytki z cieczą lepką pomiędzy nimi...

Napężenie ścinania $\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{x}$

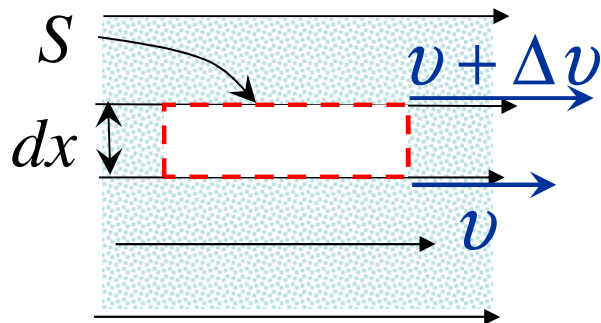


η - współczynnik lepkości

S - powierzchnia płytki

$$F = -k v_0 \quad \text{gdzie} \quad k = \eta \frac{S}{x}$$

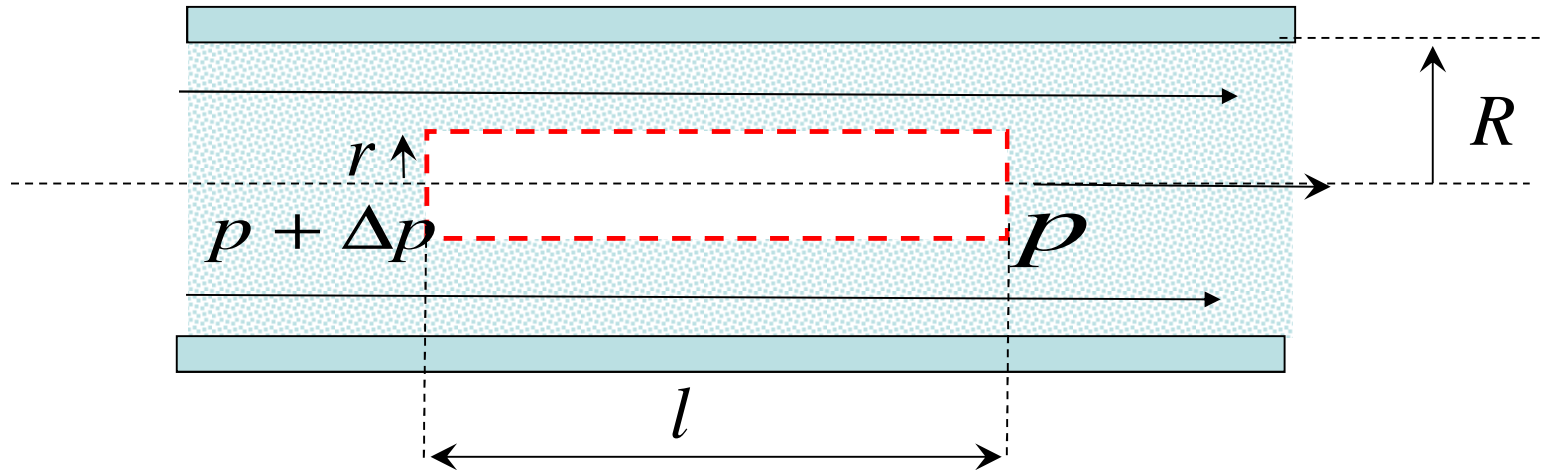
Jeśli rozważymy dwie bardzo bliskie warstwy w cieczy to wtedy siłę ścinającą (siłę lepkości) możemy przedstawić w postaci



$$F = \eta S \frac{dv}{dx}$$

$\frac{dv}{dx}$ - spadek szybkości cieczy w kierunku prostopadłym do przepływu

Przepływ cieczy lepkiej przez (wąską) rurkę



Rozważmy rurkę (strugę) cieczy o promieniu r . Niech różnica ciśnień na końcach elementu takiej rurki (o długości l) wynosi Δp

Siła podtrzymująca przepływ stacjonarny w takiej rurce wynosi:

$$F = \Delta p \pi r^2$$

Wartość siły oporu lepkiego, działająca rurkę (ścianki rurki) wynosi:

$$F_l(r) = -\eta 2\pi r \frac{dv}{dr}$$

Dla przepływu
stacjonarnego

$$F_l = F \longrightarrow \Delta p \pi r^2 = -\eta 2\pi r \frac{dv}{dr}$$



To równanie określa
zależność szybkości
cieczy od odległości
od środka rurki r

$$dv = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$$

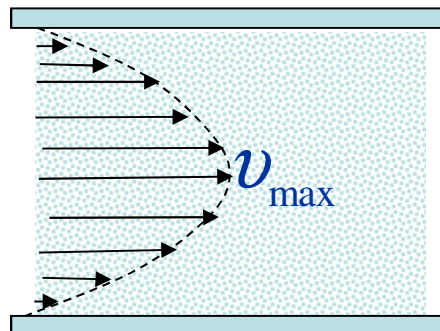
Na powierzchni rurki
 $r=R, v(R)=0$
W środku rurki:
 $v(0) = v$

$$v(r) = \int_0^v dv' = -\frac{\Delta p}{2\eta l} \int_R^r r' dr'$$



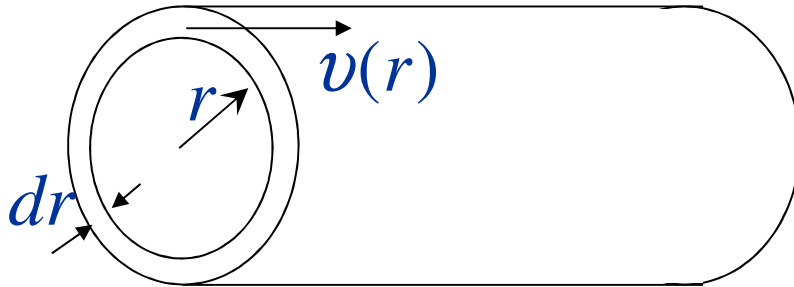
$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2)$$

Rozkład prędkości
ma kształt paraboli!



$$v_{\max} = \frac{\Delta p}{2\eta l} R^2$$

Objętość cieczy przepływająca przez rurkę w jednostce czasu można obliczyć sumując przyczynki od pierścieni o grubości dr otaczających naszą strugę...
 Wewnątrz pierścienia prędkość wynosi $v(r)$



$$dI = \frac{dV}{dt} = v(r)2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\Delta p \pi}{2\eta l} \left[R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr \right]$$

$$I = \frac{\Delta p \pi}{2\eta l} \left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right] \longrightarrow I = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}$$

Naczynia krwionośne
 - sieć kapilarna, przepływ
 napędzany przez serce...

Wzór Poiseuille'a: pozwala określić wartość
 współczynnika lepkości η z pomiaru ilości cieczy
 wypływającej z rurki (kapilary)...