

Wykład 5

Na ostatnim wykładzie poznaliśmy bardzo ważny wektor charakteryzujący cząstkę – jest to wektor skierowany wzdłuż linii świata, gdy cząstka jest swobodna, a styczny do niej w ogólniejszym przypadku. Wektor ten ma składową zerową (zwaną też czasową), oraz zmienne przestrzenne – od jednej w najprostszym przypadku do trzech w najogólniejszym. Co ciekawe wektor ten ma sens i podobne zachowanie zarówno w teorii Galileusza, jak i Einsteina, albo jest to:

$$\frac{(\Delta t, \Delta \vec{r})}{\Delta t} = (1, \vec{v}),$$

$$\text{albo } \frac{(\Delta t, \Delta \vec{r})}{\sqrt{(\Delta t)^2 - (\vec{v} \Delta t / c)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \right).$$

Obliczony w innym układzie inercyjnym (gdzie rozpatrywana cząstka ma inną prędkość) wyraża się przez stare składowe za pomocą mnożenia przez macierz M – odpowiednio Galileusza, bądź Lorentza.

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u'^0 \\ u'^1 \end{pmatrix}$$

W najprostszym procesie sklejanego dwóch ciał, bądź rozpadu jednego na dwa, występują trzy takie wektory. Zawsze można dobrać rodzinę układów inercyjnych o różnych prędkościach w którym wszystkie trzy cząstki poruszają się wzdłuż jednej linii, dlatego to co najistotniejsze pojawi się już dla dwuwektorów.

Na ile tajemnicze, a na ile oczywiste jest pojawienie się współczynników zwanych masami? Jest to tak kluczowe pojęcie, iż warto spojrzeć na sprawę bardziej systematycznie niż w przykładzie z poprzedniego wykładu, gdzie rozpatrywaliśmy zasadniczo zderzenie cząstek identycznych.

Nie wiem, czy już poznaliście na zajęciach z matematyki pojęcie liniowej zależności, względnie niezależności wektorów. W przestrzeni dwuwymiarowej, każde trzy wektory muszą być liniowo zależne! Sens tego jest prosty. Układ równań na współczynniki m_A, m_B, m_C

$$m_A \begin{pmatrix} u_A'^0 \\ u_A'^1 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} u_B'^0 \\ u_B'^1 \end{pmatrix} - m_C \begin{pmatrix} u_C'^0 \\ u_C'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

to tylko dwa równania (górna i dolna składowa) na aż trzy niewiadome. Bez problemu można rozwiązać, nawet dodając żądanie by którakolwiek z niewiadomych wynosiła tyle, ile sobie życzymy. W przeciwnym razie, wyznaczyć można tylko stosunki mas.

Ale zauważmy jedną subtelność! W różnych układach odniesienia liczby $u_A^0, u_A^1, u_A^2, \dots$ są różne. Czy to znaczy, że „masy”, bo taką nazwę przyjmuje się dla owych współczynników kombinacji liniowej, w różnych układach będą różne? O nie!!! Tutaj ujawnia się własność dla której kochamy wektory (i inne pokrewne twory, tensory, spinory).

Powiedzmy, że rozwiązaliśmy powyższy układ równań dla dwóch mas (przyjmując, iż trzecią skądś znamy, ewentualnie, gdy jesteśmy na samym początku drogi wyznaczania mas różnych ciał w przyrodzie, przyjmując którąś za jednostkę) biorąc 6 składowych trzech dwuprędkości wyznaczone pomiarami w jakimś konkretnym układzie. Np. O'.

$$m_A \begin{pmatrix} u_A'^0 \\ u_A'^1 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} u_B'^0 \\ u_B'^1 \end{pmatrix} - m_C \begin{pmatrix} u_C'^0 \\ u_C'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pomnożmy teraz to równanie (niewątpliwie prawdziwe) przez macierz M (Galileusza bądź Lorentza, zależnie w jaką kinematykę wierzymy).

$$M \left(m_A \begin{pmatrix} u_A'^0 \\ u_A'^1 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} u_B'^0 \\ u_B'^1 \end{pmatrix} - m_C \begin{pmatrix} u_C'^0 \\ u_C'^1 \end{pmatrix} \right) = M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po prawej stronie, zero mnożone przez macierz da znów zero. A po lewej? Mnożenie kolumnienek przez macierze, jak wynika z określenia ma własności mnożenia przez liczbę. Można mnożyć sumę **mnożyć każdy składnik z osobna. Można czynnik liczbowy „wyciągać” przed macierz.**

$$m_A M \begin{pmatrix} u_A^0 \\ u_A^1 \end{pmatrix} + m_B M \begin{pmatrix} u_B^0 \\ u_B^1 \end{pmatrix} - m_C M \begin{pmatrix} u_C^0 \\ u_C^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zrozumcie, Kochani, że współczynnik m trzymam **te same**.

I z **tyimi samymi masami**, co wyznaczone są dzięki pomiarom składowych primowanych, mamy **spełnione** nowe równania z prędkościami z układu O, gdyż M działając na kolumnenkę primowaną, daje kolumnenkę nieprimowaną. Kluczowe tutaj jest to, że transformacja jest **liniowa**, mnożymy przez macierz **wspólną** dla wszystkich możliwych wektorów, zawierającą informację o dwóch układach, a nie o tym jaki, który wektor poddajemy przeliczeniu.

Mamy więc spełnione równania:

$$m_A \begin{pmatrix} u_A^0 \\ u_A^1 \end{pmatrix} + m_B \begin{pmatrix} u_B^0 \\ u_B^1 \end{pmatrix} - m_C \begin{pmatrix} u_C^0 \\ u_C^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ta sama trójka liczb m , spełnia nieskończenie wiele takich układów równań, gdyż można wartości składowych prędkości cząstek zastępować ich wartościami w **dowolnym** układzie odniesienia.

Poza praktycznym walorem prawdziwości powyższych równań w każdym układzie (z raz na zawsze zmierzonymi masami dla konkretnych ciał) pojawia się tu też wątek filozoficzny. Widzimy, że (przyjmując, że się wie, jakie znane już cząstki badamy – np. rozpad uranu na alfę i jądro toru) **każdy** obserwator, zapisze **identyczne co do formy** równanie z identycznymi współczynnikami masowymi, choć **różnymi wartościami** prędkości.

O równaniu takim mówimy, że jest **kowariantne**. Współmiennicze. Składniki równania **tak samo się transformują**, przez co równanie jest prawdziwe (albo jak strzelimy błąd) fałszywe dla każdego obserwatora.

To właśnie z tego powodu, już w statyce, gdy czas nas za bardzo nie interesuje, używając wektorów w zwykłej przestrzeni Euklidesa, baczmy na to, by

po obu stronach równania wyrażającego jakieś ogólne prawo występowały albo wektory, albo skalary, ale nie mogą wystąpić wyrażenia, co to są „ni pies ni wydra”. Np. dla kierunku x wystąpiło by pole elektryczne E_x , a dla kierunku y pole E_x^2 , czy jakiś podobny nonsens.

Korzystanie z wektorów i pisanie równań w postaci wektor=wektor jest najprostszym sposobem osiągnięcia kowariancji i tym samym zaspokojenie podstawowego wymogu zasady względności, by żaden układ współrzędnych nie był wyróżniony.

Jeśli mamy ciała w ruchu, które się sklejają (a potem ewentualnie dysocjują i znów sklejają, etc., etc) to z użyciem wektorów stycznych zagwarantowane mamy **cztery** prawa zachowania! Widzimy, że dla każdego ciała **istnieje, musi istnieć** **charakteryzujący go współczynnik skalarny**, zwany masą. Iloczyn masy i czterowektora prędkości daje nowy wektor przypisany ciału. W przekształceniach ciał wszystkie cztery składowe tego nowego czterowektora spełniają prawo zachowania. Suma tego, co przed równa jest sumie tego co po.

Jest ciekawe, iż rozumowanie powyższe stosuje się w pełni do fizyki predeinsteinskiej prowadząc do prawa zachowania masy przy wszelkich oddziaływaniach i do prawa zachowania iloczynu prędkości i owej masy. Przez całe lata, na przykład, nie uświadamiałem sobie, że w fizyce Newtona prawo zachowania masy jest nieuniknioną koniecznością, a nie po prostu faktem obserwacyjnym który przyjmujemy, bo taki Świat Bozia stworzyła, a mogłaby inny. Z kolei przechodząc do relatywizmu, czułem się (będąc w Waszym wieku) dość zagubiony. Teraz to ja widzę, że geometria czasoprzestrzeni zawiera swoiste twierdzenie Pitagorasa, więc w wektorze stycznym musi być odpowiedni pierwiastek w mianowniku, a masy nadal są skalarami.

Skoro już jesteśmy przy wektorach w czasoprzestrzeni, to w przypadku relatywistycznym, warto uświadomić sobie, że istnieje coś takiego jak iloczyn skalarny. W istocie, już dla wektora szczególnego jakim jest wektor wodzący zda-

zenia poznaliśmy szczególny przypadek iloczynu skalarnego. Dla wektora (A^0, A^1, A^2, A^3) i drugiego (B^0, B^1, B^2, B^3) iloczynem skalarnym jest:

$$(A^0, A^1, A^2, A^3) \cdot (B^0, B^1, B^2, B^3) = A^0 B^0 - \frac{1}{c^2} (A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3)$$

Sprawdzenie przebiega identycznie jak dla niezmiennika $t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)/c^2$

Gdy wektory A i B są identyczne ów niezmiennik nazywa się „kwadratem długości” tego czterowektora

Gdy wektory A i B są identyczne ów niezmiennik nazywa się „kwadratem długości” tego czterowektora.

Obliczmy go dla ważnego wektora „czteroprędkości”

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right) = \frac{1}{(1-(v/c)^2)} - \frac{v^2}{c^2(1-(v/c)^2)} = 1$$

Jest to rzeczywiście wektor unormowany.

Spełniający prawo zachowania wektor będący iloczynem masy i czteroprędkości jest jednym z najważniejszych obiektów fizyki. Nazywa się go na ogół czteropędem. Oto jego współrzędne:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \right)$$

W fizyce predeisteinowskiej, analogiczny czterowektor też istnieje, choć nie jest aż tak popularny jak czterowektor pędu uwzględniający ściśle geometrię czasoprzestrzeni.

Kwadrat jego długości to oczywiście m^2 .

Wyłania się elegancka sytuacja. Mamy zachowany czterowektor. Jego składowe przestrzenne, choć zbudowane z prędkości nieco inaczej niż nas uczono w szkole, mamy **pełne prawo** nazwać pędem. Długość tego wektora to m – masa. Skalar! Niezależny od prędkości.

Zerowa składowa, o najmniejszej wartości dla stanu spoczynku, zwiększa się ze wzrostem prędkości, ale wobec występowania jej stosunku do prędkości światła, dla prędkości umiarkowanych, jest to zmiana znikoma.

Z jednej strony powoduje to, iż prawo zachowania masy wydaje się spełnione, z drugiej, gdyby zmiana masy była znacząca, pojawiałyby się gigantyczne prędkości!

Warto jest wydzielić z wyrażenia dla czasowej składowej czteropędu jej wartość minimalną i resztę

$$\frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = m + \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m = m + \frac{m(1-\sqrt{1-(v/c)^2})}{\sqrt{1-(v/c)^2}} =$$

$$m + \frac{mv^2/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}(1+\sqrt{1-(v/c)^2})}$$

Dla niedużych prędkości mianownik jest bliski dwa – mamy więc w drugim członie i masę i kwadrat prędkości i nawet 1/2. To nam coś przypomina! Celowe jest nazwać zerową składową czteropędu – po jej pomnożeniu przez c^2 - **energią**.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \frac{2}{\sqrt{1-(v/c)^2}(1+\sqrt{1-(v/c)^2})} = mc^2 + T$$

E nazywamy **energią całkowitą**, zaś T **energią kinetyczną**.

Nie ma żadnego powodu nazywać energią kinetyczną starego wyrażenia (chyba, że wiadomo o prędkości, że jest mała, i czynnik poprawkowy nie różni się od jedynki zauważalnie.)

Często oznacza się odwrotność mianownika literą $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Wektor czteropędu jest więc $m\gamma(1, \vec{v})$. Trójpęd wynosi więc $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$, energia całkowita $E = \gamma mc^2$, kinetyczna $T = (\gamma - 1)mc^2$.

Porównując wyrażenie na trójpęd z wyrażeniem na energię mamy użyteczny związek $\vec{p} = \vec{v}E/c^2$

Charakterystyczne, że, o ile w wyrażeniu na pęd, można przejść do granicy $c \rightarrow \infty$ uzyskując ten sam pęd, co w teorii nierelatywistycznej, podobnie w wyrażeniu na energię kinetyczną można dokonać takiego przejścia, można dokonać przejścia w zerowej składowej czteropędu, dostając masę, to nie da się dokonać takiego przejścia w wyrażeniu na energię całkowitą. Jest to jedyne miejsce, jak na razie, gdzie **wielka** wartość c^2 znalazła się w **liczniku**.

Wprawdzie energia kinetyczna ma klasyczna granicę, ale nie jest to wielkość spełniająca prawo zachowania. Zaś całkowita, prawo takie spełniająca, w granicy nierelatywistycznej dąży do nieskończoności. No bo, do czego mogłaby dążyć, skoro teoria Galileusza nie zawiera w sobie prawa zachowania energii?

Energia jest pojęciem z obszaru teorii Einsteina – Minkowskiego.

Pamiętając o konieczności „domnożenia” przez stałą, często myślimy o zerowej składowej czteropędu jako o energii. Energia i pęd tworzą jeden czterowektor, jego długość jest skalarem.

Zapiszmy ten fakt

$$(E/c^2)^2 - \frac{1}{c^2} \vec{p}^2 = m^2$$

i powtórzmy związek między prędkością, pędem i energią:

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E/c^2}$$

Porównując oba wzory, możemy zastanawiać się nad tym, czy do pomyslenia jest cząstka o masie zero! Wzory nie stwarzają żadnego problemu! Kładąc masę równą zero, dostaje się z pierwszego z równań:

$$E = c |\vec{p}|, \text{ zaś z drugiego } v = c$$

Cząstka może mieć czteropęd o długości zero. W przeciwieństwie do geometrii Euklidesa, gdzie niezmiennik ma znak plus, i gdzie znikanie długości oznacza automatycznie znikanie wszystkich współrzędnych, czyli całego wektora, tutaj, znikanie niezmiennika oznacza, że odejmowane człony są równe. Czerowektor jest w tym wypadku skierowany w czasoprzestrzeni wzdłuż stożka świetlnego, a prędkość cząstki, jak o tym mówi drugi wzór, wynosi c .

Powyższe wzory wyrażające energię i pęd przez prędkość, związek energii pędu i masy i wreszcie związek energii pędu i prędkości są podstawą do rozwiązywania szeregu zagadnień z zakresu fizyki relatywistycznej.

Zanim przejdziemy do konkretnego przypadku ilustrującego użyteczność powyższych wzorów poświęćmy jeszcze chwilę uwagi wektorowi czteropędu.

Jego długość jest stała:

$$E^2 / c^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$$

Więc przyrosty są „ortogonalne” do samego wektora

$$\frac{2}{c^2} E \Delta E - 2 \vec{p} \Delta \vec{p} = 0$$

$$\Delta E = \vec{v} \Delta \vec{p}$$

$$\Delta T = \vec{v} \Delta \vec{p} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \Delta \vec{p} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Delta \vec{x}$$

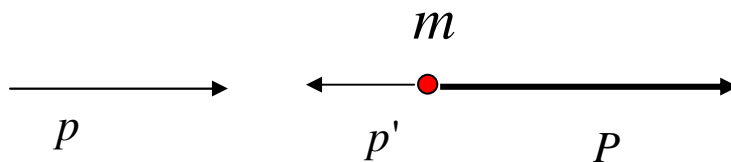
$$\Delta\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = m\vec{v}\Delta\vec{v} = \vec{v}\Delta(m\vec{v}) = \vec{v}\Delta\vec{p}$$

Zajmijmy się tu ciekawym przypadkiem zderzenia, zderzenia, z którym wiążą się dwa ważne odkrycia w fizyce 20 wieku. Żeby było jasne, że jest tu potrzebna teoria relatywistyczna, wybrałem na dzisiaj przykład cząstki bezmasowej uderzającej w spoczywającą cząstkę masywną i odbijającą się do tyłu. Uderzona cząstka zaczyna poruszać się do przodu. Problem taki rozwiązał Chadwick, by zweryfikować hipotezę, towarzyszącą odkryciu przez małżonków Curie, przenikliwego neutralnego promieniowania wydobywającego się z próbki berylu zmieszanego z polonem. Cząstki alfa uderzając jądro polonu, wyrwały coś z niego, i to coś (jak doskonale wiemy teraz) ów neutron opuszcza swobodnie próbkę i wędrując w napotkanym materiale, np. parafinie, po kilku kilkunastu centymetrach uderza w końcu w proton nadając mu pęd i energię.

Proton jest naładowany, więc jego ruch z dużą prędkością powoduje małą rewolucje w materii, jonizując ją na swej drodze. Można taką jonizację na rozmaite sposoby obserwować i w latach 30-tych był to już dość rozwinięty sposób obserwacji cząstek jądrowych. Otóż małżonkowie Joliot, dość schematycznie, uznali to promieniowanie za jakieś bardzo „twarde” promieniowanie Roentgena, gdyż wiadomo już było od lat, że promieniowanie takie istotnie powstaje w procesach jądrowych

Chadwick przeliczył, jaką energię musiałby mieć foton, by p nadać protonom obserwowane energie rzędu kilku MeV. I wyciągnął trafne wnioski, które pozwoliły mu stać się odkrywcą neutronu.

Wcześniej proces odbijania się fotonu od cząstki naładowanej (akurat elektronu) badał Compton, uzyskując rezultaty w pełni potwierdzające hipotezę Einsteina o istnieniu fotonów, o ich pędzie powiązanym z energią wzorami które dzisiaj poznaliśmy, no i last, but not least, o związku pędu z długością fali i częstotliwości z energią.



Zaznaczyliśmy na rysunku pęd fotonu padającego p , odbitego p' i pęd P uzyskany przez uderzone jądro (ewentualnie elektron).

Ruchy odbywają się wzdłuż jednej prostej, mamy więc prawo zachowania jednej składowej pędu, no i oczywiście prawo zachowania energii.

$$p = P + (-p')$$

$$cp + mc^2 = cp' + \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2}$$

$$p = P + (-p')$$

$$cp + mc^2 = cp' + \sqrt{m^2 c^4 + c^2 P^2}$$

Najpierw pozbywamy się pierwiastka, przenosząc wyraz z p' na lewą stronę i podnosimy do kwadratu, a także zastępujemy P sumą $p + p'$

$$\cancel{c^2 p^2} + \cancel{c^2 p'^2} + \cancel{m^2 c^4} + 2mc^2 cp - 2mc^2 cp' - 2c^2 pp' = \\ = \cancel{m^2 c^4} + \cancel{c^2 p^2} + \cancel{c^2 p'^2} + 2c^2 pp'$$

Wiele wyrazów się redukuje dając nam ładny związek między p' a p .

$$mc(p - p') = 2pp'$$

Dzieląc przez $2mcp p'$ dostajemy:

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{mc}$$

W tym miejscu należy się dygresja o efekcie Comptona. Wyrażamy pęd fotonu przez jego energię $\frac{E}{c} = p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{cT} = \frac{h}{\lambda}$

Zawarta jest w tym przekształceniu i koncepcja fotonu o określonej energii wyznaczonej przez częstotliwość (a niezależna od natężenia wiązki), i przepowiednia, że foton ma pęd wiążący się z energią ogólnym wzorem. Jako wniosek pojawia się też związek pędu z długością fali. Na początek związek ten przypisywano tylko promieniowaniu, de Broglie, wkrótce zapostulował taki sam związek dla fal materii. Wstawiając długość fali dostaje się

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc}$$

Robiąc rachunek dla zderzenia niecentralnego, dostaloby się, niewiele bardziej pracowitym sposobem, wynik

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) .$$

Za potwierdzenie powyższej zależności Compton dostał nagrodę Nobla. Wielkość h/mc ma konkretną liczbową wartość (dla elektronu $2,4 \cdot 10^{-10} \text{ cm}$). Maksymalna zmiana długości fali promieniowania odbitego wynosi podwójną wartość tej, tzw. Comptonowskiej długości fali elektronu. W stosunku do długości fal światła widzialnego jest to bardzo mała wartość, dlatego w optyce efektu tego się nie obserwuje. Potrzebne jest krótkofalowe promieniowanie Roentgena. Wtedy zmiana długości może być bardzo znaczna.

Dla celów doświadczenia Chadwicka powinniśmy raczej wyeliminować pęd cząstki odbitej i związać energię padającą z energią jądra po uderzeniu.

Wprowadzając energię kinetyczną mamy:

$$T = c(p - p')$$

Z uzyskanego już związku między p i p' wyliczamy p' :

$$1/p' = 1/p + 2mc = (2p + mc)/pmc$$

$$p' = \frac{pmc}{2p + mc}$$

Zatem:

$$T = cp - cp' = cp - \frac{pmc^2}{2p + mc} = \frac{2cp^2}{2p + mc}$$

W obserwacji Państwa Joliot znana była energia kinetyczna uderzonego protonu – Chadwick zadał sobie pytanie, jaka też musiałaby być energia tego kwantu, (o ile to naprawdę kwant gamma) by nadać obserwowaną energię.

Odwrócenie powyższego związku polega na rozwiązaniu równania kwadratowego:

$$cp = E_{\gamma} = \frac{T + \sqrt{T^2 + 2Tmc^2}}{2} \approx mc^2 \sqrt{\frac{T}{2mc^2}}$$

Wielkość mc^2 ma dużą wartość, nawet jak na skalę jądrową. To energia ok. 1GeV (dokładniej 936MeV). Występuje ona w rozwiązaniu dając przy energii kilku MeV obserwowanego protonu, konieczną energię kwantu ok. 70MeV. Taką energię w procesach jądrowych jest co najmniej 10 razy za dużą wobec panującego już wtedy częściowego zrozumienia budowy jądra.