Wykład 7

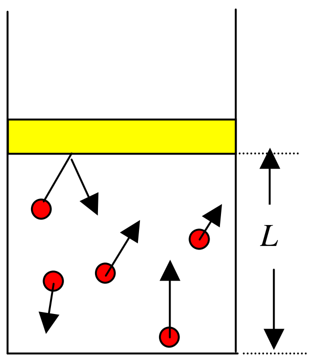
Gaz doskonały

Kolejnym przykładem oddziaływania, bardzo już realistycznym i mającym praktyczne znaczenie, a zarazem pozwalającym na dość naturalne uogólnienia na całą klasę oddziaływań sprężystych jest oddziaływanie tłoka zamykającego cylindryczny pojemnik z gazem w środku. By uniknąć niepotrzebnych komplikacji, na które przyjdzie pora później, założymy, że jest to gaz jednoatomowy, np. hel, czy argon, które to gazy są doskonałymi realizacjami zbioru punktów materialnych, dla których wiemy dokładnie, co to znaczy masa, pęd i energia.

Cząsteczki te maja na początku pewną energię – zderzenia ze ścianami cylindra i tłokiem są sprężyste i energia tych cząstek (póki tłok pozostaje nieruchomy) ma stałą wartość. Przy każdym uderzeniu w tłok, atom gazu zmienia kierunek lotu i pęd, oddając tym samym pewien pęd tłokowi. Znów dla klarowności rozważań przyjmiemy na razie, że po drugiej, zewnętrznej stronie tłoka jest próżnia. (W zastosowaniach praktycznych na zewnątrz na ogół jest powietrze atmosferyczne, a intensywność bombardowań od wnętrza cylindra jest dużo większa, np. wskutek podpalenia mieszanki paliwa z powietrzem celowo tam wprowadzonych).

Gdyby się przed tym nie zabezpieczyć, tłok nabierając pędu poruszałby się coraz szybciej i wypadł z cylindra, a my chcemy popatrzyć na niego i zanalizować, na początek, sytuację z tłokiem nieruchomym. Najprostszy sposób to ustawić cylinder pionowo wykorzystując fakt bezsporny, że bez gazu pod spodem tłok taki by opadał z przyspieszeniem grawitacyjnym. Grawitacja polega na transferze (od źródła pola, w tym wypadku kuli ziemskiej) w stałym tempie wynoszącym mg pędu. Bez innych działań ciało, którego pęd rośnie w tym tempie, czyli wynosi mgt ma stosowną prędkość $v(t)$, tak by $mgt = mv(t)$, czyli $v=gt$.

Gdy tłok się już ustabilizował i gdy widzimy taki obraz: ze statycznym tłokiem, rozumiemy od razu, że transfer pędu grawitacyjny **znosi się** z równym mu transferem pędu w zderzeniach z atomami. Dlaczego się znosi? To proste. Gdyby transfer grawitacyjny był większy, pojawiłby się po chwili pęd w dół, a wraz z nim prędkość i przesunięcie. Objętość dla gazu by zmalała i atomy częściej by uderzały od dołu. Być może po pewnej liczbie wahnięć wreszcie ustaliłaby się taka wysokość, że właśnie omawiane dwa transfery pędu by się znosiły.



Ustalenie się równowagi (jeśli taka możliwość istnieje) zawsze prowadzi, być może po jakimś czasie, do zrównoważenia strumieni pędu z różnych (co najmniej dwóch źródeł). Ta równość strumieni (czy jak kto woli, sił) ma zupełnie inny charakter i inny sens, niż równość sił, o której mówi III Zasada Newtona. Tam dwie siły są przyłożone do **dwóch** oddziałujących ciał. Natomiast w stanie równowagi zrównują się siły działające **na to samo ciało** pochodzące z różnych źródeł. Co więcej, siły z III Zasady są cały czas równe. Nie do pomyślenia[1] jest by były nierówne, bo są to szybkości strumienia tego samego pędu opuszczającego ciało 1 i wchodzącego do ciała 2. Natomiast siły prowadzące ostatecznie do stanu równowagi, są w całym okresie osiągania tej równowagi, na ogół nierówne.

Ostrzegam o tej różnicy, zupełnie zasadniczej, nie bez kozery! To bardzo częsty błąd. Ba! Sama nazwa, często spotykana dla III Zasady jako Zasada Akcji i Reakcji jest niewłaściwa. Sugeruje ona asymetrię, że najpierw jest Akcja a potem Reakcja. Takie rozumienie jest właściwe dla równości dwóch sił w równowadze, sił działających na to samo ciało. Ciężar położony na miękkiej kanapie zaczyna spadać. To jest ta „akcja". Pojawia się siła o charakterze sprężystym w miejscu styku – tym większa im kanapa się bardziej ugnie. W końcu, ustali się taka wartość reakcji sprężystej (i takie odkształcenie) by zrównoważyć pierwotną siłę z jaką na ciężarek działa grawitacja. Zrównoważenie takie nie zawsze jest możliwe. Gdyby „kanapa" była wykonana z piany mydlanej, to żadne odkształcenia nie spowodowałyby zrównoważenia ciężaru. Partnerem ciężaru w III zasadzie jest siła działająca na Ziemię!!! Partnerem dla sprężystej siły z jaką kanapa działa na ciężar, jest sprężysta siła z jaką ciężar ciśnie na kanapę. W pierwszej fazie siadania na kanapie, siły sprężyste są mniejsze od grawitacyjnych, po chwili mogą być większe (gdy po klapnięciu na kanapę, jest krótki okres „odbicia" do góry. Dopiero po uspokojeniu układu siły się zrównują.

Pojęcie siły reakcji stosuje się w mechanice powszechnie w odniesieniu do sił sprężystych, zwłaszcza w sytuacjach, gdy odkształcenia konieczne do zrównoważenia siły zewnętrznej są znikomo małe. Gdy na środku mostu stanie mrówka, to ona nie spada do rzeki. Jej ciężar jest zrównoważony siłą sprężystą pojawiającą się między mrówką a mostem. Że jej wartość równa się dokładnie ciężarowi, to oczywiste. Ale to nie ma nic wspólnego z III Zasadą. Siła reakcji, tak rozumiana występuje także w ruchu. Np. wahadło matematyczne. Linka wa-

[1] Nie do pomyślenia przy założeniu, że są tylko dwa ciała i tylko one są nośnikami pędu. W oddziaływaniach na odległość, np. elektromagnetycznych występuje jeszcze pole, które samo ma pewien pęd i pewną energię. Pęd ubywający w jednym z ciał trafia najpierw do pola, a do drugiego ciała może zacząć wnikać nie wcześniej niż po czasie L/c, gdzie L jest odległością pomiędzy ciałami. Część tego pędu może „ugrzęznąć" w polu na dłużej. Obserwując tylko dwa ciała możemy dostrzec brak zbilansowania ich pędów. W tych warunkach trudno by mówić o III Zasadzie. .

hadła (prawie nierozciągliwa) dopasowuje swoje (mikroskopijne) odkształcenie, by wraz z siłą grawitacji zapewnić ruch ciężarka po (prawie) okręgu.

W naszym przykładzie „akcja" na tłok, spowodowała jego taki ruch, który ograniczył tak objętość gazu, że „reakcja" gazu, ilość pędu wnoszona na jednostkę czasu przez atomy, jego parcie zrównało się z ciężarem. Wiemy, że tak jest, bo widzimy, że ustał ruch tłoka. (Gdyby w cylindrze była nieszczelność, tłok opadałby aż do całkowitego wypchnięcia gazu! Ustalenie się równowagi nie jest „obowiązkowe". Mosty też czasami się zawalają, nie będąc w stanie wytworzyć wystarczającej reakcji na powstałe obciążenie i pojazdy wpadają do rzeki!

Zaczniemy od wyznaczenia wartości pędu dostarczanego tłokowi w jednostce czasu. Od czego ona będzie zależeć, to się okaże. W szczególności użyteczne jest określenie wartości tego transferu przypadającego na jednostkę powierzchni. Zwane jest ciśnieniem.

Pęd cząstki padającej na tłok ma składową poziomą i prostopadłą (z). Składowa pozioma się nie zmienia, prostopadła musi zmienić znak. Ponieważ kwadrat pędu ma pozostać niezmieniony (energia), wartość bezwzględna składowej prostopadłej jest po odbiciu identyczna jak przed zderzeniem. Pęd przekazany ściance w jednym zderzeniu wynosi $2mv_z$. Cząstka po odbiciu zmierza w kierunku dna, być może przy tym odbijając się od ścianek pionowych, co nie zmieni jej składowej prędkości na oś z. Cząstka po drodze, może też zderzyć się z inną, co zmieni jej pęd w niekontrolowany sposób. Gdy cząstek jest dużo (a jest sporo!), działa prawo wielkich liczb. Na miejsce „naszej" śledzonej cząstki, która zmieniła prędkość v_z na jakąś inną, w innym zderzeniu, jakiś inny atom, po zderzeniu, z innej wartości został wtrącony w stan właśnie o takiej prędkości. Rozkład prędkości w gazie w warunkach równowagi jest stacjonarny, mimo zderzeń. Oznacza to, iż takie uproszczone myślenie, że to „nasza" cząstka bez przeszkód dociera do dna cylindra i tam się odbija ruszając w drogę powrotną w kierunku tłoka, da wynik poprawny.

Oznaczając odległość tłoka od dna cylindra L, łatwo obliczę czas po jakim nasz atom wróci, by znów uderzyć w tłok: $2L/v_z$.

W czasie $\mathrm{d}t$ uderzeń takich będzie $\mathrm{d}t/(2L/v_z) = v_z\,\mathrm{d}t/2L$. Jedno takie uderzenie dostarcza tłokowi pęd $2mv_z$, łącznie ten jeden atom w czasie $\mathrm{d}t$ dostarczy wielokrotność takiego przekazu:

$$\mathrm{d}p_i = m_i v_{iz}^{\;2}\mathrm{d}t / L$$

Wskaźnik i numeruje wszystkie atomy gazu. Ich prędkości są różne. Chociaż więc każdy zachowuje się podobnie, wartość liczbowa, jaką one wnoszą nie jest wspólna dla wszystkich.

Całkowita zmiana pędu w czasie dt jest sumą po wszystkich atomach w naczyniu wyrażeń przed chwilą znalezionych.

$$\mathrm{d}p_{total} = \frac{\mathrm{d}t}{L}\sum_i m_i v_{iz}^{\;2}$$

Gdyby to były „całe” prędkości, z przyjemnością byśmy skonstatowali, iż suma powyższa to podwojona energia kinetyczna. Ale tu występuje tylko jedna współrzędna. Jest jasne, że dla konkretnej cząstki nie musi być, nawet w przybliżeniu $v_z^{\;2} \stackrel{?}{=} v_x^{\;2}$. Ale gdy napisać ogromne trzy sumy

$$\sum_i m_i v_{iz}^{\;2} \qquad \sum_i m_i v_{iy}^{\;2} \qquad \sum_i m_i v_{ix}^{\;2}$$

dla gazu w stanie równowagi, to nikt nie powinien mieć cienia wątpliwości, że są one wszystkie **równe**[2]. Jeśli tak to nasza suma (ta ze składowymi w kierunku z) może być wyrażona jako 1/3 sumy wszystkich trzech

$$\sum_i m_i v_{iz}^{\;2} = \frac{1}{3}\left(\sum_i m_i v_{ix}^{\;2} + \sum_i m_i v_{iy}^{\;2} + \sum_i m_i v_{iz}^{\;2}\right) = \frac{1}{3}\sum_i m_i\,(v_{ix}^{\;2} + v_{iy}^{\;2} + v_{iz}^{\;2}) = \frac{2}{3}E$$

Zaznaczyłem, że rozpatruję gaz jednoatomowy. E jest całkowitą energią tego gazu (występuje tylko energia kinetyczna). Gdyby gaz składał się z cząsteczek wieloatomowych, cząsteczki te, oprócz ruchu postępowego środka masy, wykonywałyby także obroty. Energia kinetyczna związana z ruchem postępowym, która decyduje o ciśnieniu, która nam się tu pojawiła byłaby tylko ułamkiem energii całkowitej. Dla gazu dwuatomowego byłoby to 3/5 całkowitej energii, a dla trój(i więcej) atomowego byłoby to 3/6 całkowitej energii kinetycznej atomów. 2/5 dla cząstek dwuatomowych, a 3/6 dla cząstek wieloatomowych jest energią ruchu obrotowego. Innymi słowy dla gazu dwuatomowego należałoby zastąpić 2/3 przez 2/5, a dla gazu wieloatomowego czynnikiem 2/6 w powyższym wzorze. Będziecie się o tym uczyć w swoim czasie. Tutaj tylko sygnalizuję problem. Dla gazu jednoatomowego sprawa jest wyjątkowo prosta i nie powinna budzić wątpliwości.

Wstawiając powyższy wynik do wyrażenia na dopływ pędu do tłoka mamy:

$$\mathrm{d}p_{total} = \frac{2}{3}\frac{E}{L}\mathrm{d}t$$

Szybkość tego dopływu umówiliśmy się nazywać siłą, stąd:

---

[2] Zupełny pedant mógłby oponować zauważając, że jesteśmy w polu grawitacyjnym i atomy latające z góry na dół zachowują się nieco inaczej niż te latające poziomo. Można to wiązać z efektem tzw. wzoru barometrycznego powodującego, że ciśnienie zmienia się z wysokością. No tak, ale to dopiero wysoko w górach zmiana jest wyraźna w stosunku do poziomu morza. W kilkunastocentymetrowym naczyniu, efekt jest całkowicie zaniedbywalny. Zresztą, można rozważać taki cylinder w stacji kosmicznej, w warunkach nieważkości.

$$F = \frac{2}{3}\frac{E}{L}$$

Siłą przypadająca na jednostkę pola powierzchni tłoka (czy ściany naczynia) nazywa się ciśnieniem. Tradycyjnie oznacza się ciśnienie literą *p*, nie powinno nam się mylić, mimo że w mechanice litera *p* tradycyjnie używana jest dla pędu. Powierzchnię tłoka oznaczamy *S*, a objętość naczynia *V*. Mamy:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{2}{3}\frac{E}{SL} = \frac{2}{3}\frac{E}{V}$$

Przepiszemy to jeszcze w postaci znanej od ponad 200 lat:

$$pV = \frac{2}{3}E$$

Rozumowanie powyższe pierwszy przeprowadził Bernoulli, jeszcze w końcówce XVIII wieku. Trudno przecenić znaczenie tego wyniku dla dalszego burzliwego rozwoju chemii, termodynamiki. Dla potwierdzenia hipotezy atomistycznej, etc. Nie mamy czasu by o tym mówić. Skupić się mamy na mechanice.

Bardziej użyteczny będzie wzór nie z objętością, a z położeniem tłoka względem dna cylindra: $F = \frac{2}{3}\frac{E}{L}$.

Mamy, więc, kolejny przykład, gdzie mogliśmy wyznaczyć szybkość zmiany pędu, czyli siłę. Byłoby jednak pochopnym sądzić, że to jest postać, o którą chodzi, postać, pozwalająca napisać równanie ruchu, gdybyśmy ewentualnie chcieli zamienić nasz cylinder na strzelbę pneumatyczną. Pozornie wzór powyższy określa wartość siły w funkcji *L*, czyli dla wszystkich położeń tłoka. Tak by było, gdyby nam ktoś zagwarantował, że *E* występujące przecież w liczniku wyrażenia na siłę jest stałe. Tymczasem *E* zależy od położenia. Okazuje się, że zależność tę można wyznaczyć. Przykład będzie bardzo kształcący.

Zastanówmy się, co się stanie, gdy pozwolimy tłokowi się przesuwać. O ile prędkość odskoku jest taka jak prędkość padania dla tłoka nieruchomego, to dla tłoka w ruchu, z prędkością *V* równość prędkości obowiązuje tylko w układzie spoczynkowym tłoka. Jeśli przyjmiemy, że *L* wzrasta, prędkość nadbiegającej cząstki jest v_z-V względem tłoka i tyle samo (z przeciwnym znakiem) po odbiciu. Przechodząc do układu cylindra musimy *V* jeszcze raz odjąć, stwierdzając, że prędkość w ruchu powrotnym wynosi v_z-$2V$. A zatem prędkość zmalała. Zmalała też energia kinetyczna cząstki. Do cylindra zakradł się pewien nieporządek. Maleją tylko składowe w kierunku ruchu, ale nie składowe poprzeczne. Gdyby prędkość tłoka była duża, porównywalna z typową prędkością cząsteczek (będącą z kolei rzędu prędkości dźwięku), dalsza analiza sytuacji byłaby niemożliwa przy pomocy tych środków jakimi dysponujemy my tu w tym momencie. Ale nawet wielcy eksperci mieliby szalone trudności z obliczeniem przekazu pędu. Zależał by on skomplikowanie od czasu, od sposobu wcześniejszego ruchu tłoka, a nie tylko od jego położenia aktualnego i aktualnej prędkości. Dlaczego? Ano dlatego, że gwałtowny ruch tłoka wywołuje fale dźwiękowe, zturbulencje. Stan gazu w danej chwili jest konsekwencją całej wcześniejszej historii. Żadna prosta, użyteczna formuła na siłę nie istnieje. Równanie Newtona nie istnieje. Nazwanie, mimo to pochodnej pędu siłą, jest już aktem rozpaczy, bo przecież nie posuwa sprawy nijak do przodu!

Istnieje jednak zakres zjawisk, dla których przekaz pędu daje się wyznaczyć, daje się wyznaczyć siłę zależną tylko od położenia ciała i rozkoszować się możliwością przepowiadania przyszłości. Tak będzie, jeśli ruch tłoka będzie **adiabatyczny**.

Chociaż pochodzenie słowa jest nieco mylące, w mechanice, w mechanice kwantowej, w termodynamice, słowo adiabatyczny, adiabatyczna zmiana parametru (w naszym wypadku objętości wyznaczonej położeniem tłoka) oznacza zmianę na tyle powolną, by czas, w którym zmiana parametru staje się już zauważalna, ale nadal niewielka, był zarazem wystarczająco długi, by zakłócenie wywołane zmianą, zostało zniwelowane przez proces ustalania się nowego stanu równowagi. Inaczej mówiąc. Ruch ma być na tyle powolny, by stan gazu bardzo nieznacznie odbiegał od stanu równowagi, jaki na pewno by się ściśle ustalił, gdyby tłok zatrzymać na którejkolwiek pośredniej wartości L. Procesy takie zwą się też procesami quasistatycznymi. W praktyce, proces quasistatyczny może być, z naszego punktu widzenia, dość szybki.

Jeśli zrobimy takie założenie, to zanim tłok przesunie się o jakiś ułamek L, powiedzmy 1/100, czy 1/50, cząsteczka gazu która się wcześniej zderzyła, zdąży tyle już razy zderzyć się z sąsiadkami, że odzyska od nich część utraconej energii, i to raczej cały gaz się ochłodzi, ale rozkład prędkości w nim będzie znów równowagowy, tyle że z niższą energią.

Obliczmy tę zmianę energii w przedziale czasu dt.

Jedna cząstka traci $mv_z^2/2 - m(v_z - 2V)^2/2 = 2mv_zV - 2mV^2$.

Zwróćmy w tym momencie uwagę, że przy ruchu powrotnym ulega odwróceniu znak V i pierwszy z członów w wyrażeniu na stratę energii zmienia znak! Gdyby to był człon jedyny, energia cząstki (tej i pozostałych) wróciłaby do wartości, jaki miała przy danym położeniu tłoka w fazie rozprężania. Energia gazu **byłaby** tylko funkcją położenia tłoka. Jednak drugi człon kwadratem V znaku nie zmienia. Oznacza to iż strata jest przez ten człon mniejsza, a odzysk większy!!! Po powrocie tłoka w stare położenie, gaz jest cieplejszy niż był. Adiabatyczność oznacza prędkość na tyle powolną, że człon z V^2 można pominąć.

W tym członie, który zostaje, występuje znana nam zmiana pędu[3]. Zsumowana od wszystkich cząstek w czasie dt daje **siłę** działającą na tłok, a w przeliczeniu na jednostkę powierzchni, ciśnienie.

Sumując równanie na zmianę energii jednej cząstki po wszystkich cząstkach uderzonych w czasie dt dostaniemy po lewej stronie ubytek (zmianę) energii gazu, a po prawej iloczyn V i przyrostu pędu Fdt.

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{gazu}} = -F\mathrm{d}tV$$

Ale zróbmy ciekawą obserwację. Vdt to nic innego jak dL. Zatem:

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{gazu}} = -F\mathrm{d}L$$

Ale siłę uzależniliśmy wcześniej od energii: $F = \frac{2}{3}\frac{E_{\mathrm{gazu}}}{L}$

$$\mathrm{d}E_{\mathrm{gazu}} = -\frac{2}{3}\frac{E_{\mathrm{gazu}}}{L}\mathrm{d}L$$

Stają przed nami coraz to nowe wyzwania. Już napotykaliśmy pochodną wyrażoną przez zmienną niezależną i przez zmienną zależną, a teraz są obie. Ale nic to!

Przypomnijmy iż dln(x)/dx=1/x. Czyli dla przyrostów dln(x) = dx /x.

A w naszym równaniu:

$$3\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{gazu}}}{E_{\mathrm{gazu}}} = -2\frac{\mathrm{d}L}{L}$$

$$3\mathrm{d}\ln E_{\mathrm{gazu}} = -2\mathrm{d}\ln L$$

$$\mathrm{d}\left(\ln E^3{}_{\mathrm{gazu}} + \ln L^2\right) = 0$$

$$L^2 E^3{}_{\mathrm{gazu}} = \mathrm{constans} = E_0{}^3 L_0{}^2$$

Dzięki warunkowi adiabatyczności energia gazu jest funkcją **tylko** położenia (a nie liczby przesunięć tłoka w te i we wte), a i siła też funkcją **tylko położenia. Cud, że potrafiliśmy ją wyznaczyć.** Gdybyśmy nie pominęli prędkości V w porównaniu z v, w sile pojawiłby się człon ~V, znamionujący lepkość.

$$E_{\mathrm{gazu}} = E_0 (L_0 / L)^{2/3}$$

Teraz możemy wstawić to do wzoru na siłę

[3] Taka zmiana pędu występuje dla tłoka nieruchomego. Przy uwzględnieniu prędkości tłoka, wyrażenie na siłę zawierać musi człon ~V bo zmiana pędu to $2m(v_z - V)$.

$$F(L) = \frac{2}{3} E_0 (L_0)^{2/3} / L^{5/3}$$

Siła ta jest siłą **potencjalną**, gdyż jako funkcja potęgowa jest w oczywisty sposób pochodną innej funkcji potęgowej

$$F(L) = \frac{2}{3} E_0 (L_0)^{2/3} / L^{5/3} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L} E_0 (L_0 / L)^{2/3}$$

Formalna energia potencjalna dla znalezionej siły jest tożsama z energią gazu!

Jak pamiętamy, siła będąca zmianą pędu na jednostkę czasu, jest zarazem zmianą energii kinetycznej ciała na jednostkę drogi. $F = \mathrm{d}T / \mathrm{d}L$. Dlatego nasz wynik:

$$F(L) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}L} E_0 (L_0 / L)^{2/3} = \mathrm{d}T / \mathrm{d}L$$

prowadzi natychmiast do:

$$T + E_0 (L_0 / L)^{2/3} = \mathrm{const}$$

Nie ma w tym nic dziwnego!!!!!

Jest to bardzo pouczający przykład. Ilekroć odkryjemy w przyrodzie fakt przekazywania pędu (siłę) zależną od położenia rozpatrywanego ciała, jest to oznaką tego, iż ciało nasze wpływa – w jakiś sposób – na energię jakiegoś układu fizycznego. Tak jak tłok wpływa na energię cząstek gazu.

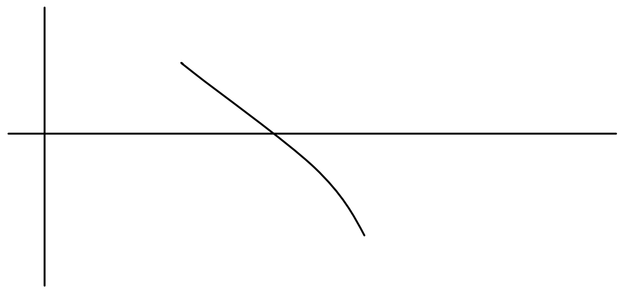
Inny przykład, który warto zasygnalizować to oddziaływanie atomów. Jądra są wystarczająco ciężkie, by uważać je za dużo powolniejsze od elektronów atomowych, czy molekularnych. Można przyjąć (tzw. przybliżenie adiabatyczne Borna Oppenheimera), iż w pierwszym przybliżeniu, jądra dwóch oddziałujących atomów są nieruchome. (Tak jak nasz tłok). Chmury elektronowe w danym polu dwóch jąder zajmują stan najniższy o energii wyliczonej z praw mechaniki kwantowej. Energia ta zależy od odległości jąder. Przy powolnym ruchu jąder i zmieniającej się odległości, energia chmury (zupełnie jak energia naszego gazu) zmienia się, i gdy ruch jest powolny, jest stale energią najniższego stanu dla **aktualnej** odległości jąder. Całkowita energia, uwzględniająca energię kinetyczna jąder, musi pozostać stała, przeto energia stanu podstawowego elektronów $E_{\mathrm{elektrony}}(R)$ **jest** energią potencjalną dla wyznaczenia ruchów jąder, a więc i całej molekuły (gdy jądra są blisko), albo do wyznaczenia siły przyciągania atomów (gdy są stosunkowo daleko). Energia potencjalna oddziaływań **sprężystych** ciał stałych ma dokładnie ten sam charakter.

Dla ciała stałego (kryształu, czy zlepka polikrystalicznego) istnieje konfiguracja równowagi, w której węzły sieci „nie chcą" ani się dalej zbliżać, ani oddalać. Gdyby tak nie było, kryształu by po prostu nie było! Odparowałby, albo zapadł się jako czarna dziura (gdyby atomów zebrała się niezła chmara)!!!!!

Skoro istnieje, to próby ściskania wywołają przepływ pędu na zewnątrz, a próby rozciągania na odwrót. Zewnętrzne ciało, które próbuje swą obecnością i swym ruchem wywołać takie deformacje będzie traciło energię kinetyczną i przy ściskaniu i przy rozciaganiu. Oznacza to iż energia kryształu jest w jego stanie swobodnym **minimalna**. Co mu nie zrobimy, to nasze ciało zewnętrzne musi płacić! A kryształowi rośnie.

Zależność owej energii od deformacji może być bardzo złożona. Jej wyliczenie niemożliwe, przynajmniej na dzisiaj.

Ale jak jest równowaga, to jest i minimum. Jest to zarazem minimum energii potencjalnej dla ciała wymuszającego swym położeniem kształt (w najprostszym przypadku długość) kryształu. W minimum siła musi znikać, a jej wykres w zależności od położenia musi być jakiś taki



Na krótkim odcinku **wokół** tego położenia równowagi dla którego siła znika, przybliżenie wykresu odcinkiem $F = -k(x - x_{\text{rownowaga}})$ jest **zawsze możliwe.** Bo jak komuś różnica przeszkadza, to powiemy: rozpatrz mniejsze odkształcenia!

Powyższe słynne prawo Hooke'a jest swoistą matematyczną oczywistością. Inna sprawa, że szalenie użyteczną. Zamiast próbować rozwiązać nierozwiązywalny, koszmarny problem, (zwłaszcza, gdy znaleźliśmy przypadkiem fajną sprężynę i nawet nie wiemy z czego jest), mierzymy siłę dla jednego odkształcenia, sprawdzamy że jest wystarczająco dokładnie 2 razy większa dla dwa razy większego odchylenia i zapamiętujemy jeden współczynnik. No, przydatne może być też zorientowanie się w zakresie **stosowalności** owej proporcjonalnści. I w przyszłości, gdy nam przyjdzie użyć tej samej sprężyny, znamy siłę jako funkcję położenia. Znamy też energię potencjalną $E_{\text{pot. sprezystosci}} = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$.

Wybierając początek osi w położeniu równowagi, dostaję równanie Newtona: $m\ddot{x} = -kx$.