Wykład 8

Równania ruchu

Badając ruch zmienny, bilansowaliśmy zmiany pędu. Bilans dokładny w czasie skończonym rzadko jest możliwy. Np. zderzające się ciało, nadaje uderzanym cząstkom podwojoną wartość własnej prędkości, ale sama ta prędkość właśnie wskutek tego maleje. Procentowa zmiana w trakcie **krótkiego odcinka czasu** takiej prędkości jest niewielka, granica stosunku dv/dt przy dt ->0, uzyskana z takiego przybliżonego bilansu jest, **na szczęście,** zupełnie ścisła. (W rozpatrywanym przypadku dv/dt $= -2Sv^2\rho_{\text{osrodka}}/M$). Tak pojawiają się równania zawierające pochodne.

W przypadku rakiety, wyznaczaliśmy prędkość jako funkcję masy m, zmieniającej się, wskutek spalania paliwa. W tym wypadku znaleźliśmy dv/dm = -w/m.

Z tych dwóch przykładów drugi przypadek wydaje się prostszy. Prawo fizyki powiedziało nam, ile wynosi pochodna konkretnej wielkości zależnej od innej wielkości, wyrażona przez zmienną niezależną. Ale przypadek pierwszy sprowadza się, w istocie, do tego drugiego, gdy zapiszemy **odwrotny** stosunek przyrostów dt/d$v$$= -M/2S\rho_{\text{osrodka}}v^2$. Tak napisane równanie wyraża pochodną funkcji $t(v)$, przez zmienną niezależną v.

Jeśli nauczyliśmy się różniczkować pewną liczbę różnych funkcji, to tylko patrzymy, czy wśród wyników różniczkowania jest taka jak nasza. Gdy znajdziemy taką funkcję, to mamy pewność, że nasza zależność różni się od niej tylko o stałą.

W dotychczasowych przykładach wystarczała nam znajomość pochodnej funkcji potęgowej $(x^n)' = nx^{n-1}$, logarytmu przy podstawie e: $(\ln(x))' = 1/x$ i funkcji wykładniczej: $(e^x)' = e^x$.

Ale życie nie jest takie proste. Nawet, gdy problem sprowadzi nam się do wyznaczenia tej, tzw. **funkcji pierwotnej**, jej znalezienie może nie być możliwe w żadnej znanej nam tablicy pochodnych różnych funkcji. Nie poradzimy sobie, nawet z prostymi równaniami, gdy pochodna zależy **i od zmiennej zależnej i niezależnej**. Gdyby chcieć rozwiązać, na przykład, równanie $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\alpha / v^{2-\frac{t}{T}}$, w którym potęga oporu zmienia się w trakcie ruchu (z jakichś powodów) od wartości 2 na początku, do wartości 1 asymptotycznie, wybór ani v, ani t jako zmiennej niezależnej nic nam nie pomoże.

Na ostatnim wykładzie sporo uwagi poświęciliśmy zbadaniu przykładu, w którym pojawia się siła zależna od położenia. W takim wypadku mamy $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F(x)/m$, gdzie x nie jest wcale znane, a jedynie wiadomo, że $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$. Mamy więc dwie szukane wielkości. Można tu wprawdzie pozbyć się jednej z poszukiwanych wielkości, prędkości, ale za cenę wprowadzenia drugiej pochodnej położenia x, traktowanego jako wielkość szukaną:

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x = F(x)/m$. Gdyby druga pochodna była wyrażona przez zmienną niezależną, problem sprowadzałby się do dwukrotnego szukania funkcji pierwotnej, ale tu tak nie jest!. Odwrotność drugiej pochodnej nie jest, niestety, drugą pochodną funkcji odwrotnej!

No i wreszcie, opis ruchu nawet pojedynczego punktu materialnego, wymaga wprowadzenia więcej współrzędnych niż tylko x. Na płaszczyźnie potrzebne jest jeszcze z. Prawa Newtona będą, więc, układem wielu równań na wiele niewiadomych funkcji.

Istnieją rozmaite sposoby i rozmaite klasy równań, które można rozwiązać **analitycznie**, to znaczy podać konkretne wzory na ostateczne zależności wszystkich współrzędnych od czasu: $x(t),\ y(t), \ldots$ etc. Będziecie je poznawać, w szczególności na mechanice teoretycznej, ale trzeba uczciwie powiedzieć, że liczba przypadków rozwiązywalnych (w sensie zwartych wzorów) jest kroplą w morzu wszystkich problemów!!!

Legendy krążą o tzw. problemie „trzech ciał" oddziałujących grawitacyjnie. Fundowano królewskie nagrody za jego rozwiązanie, a jednak pozostaje ono nierozwiązane od szeregu stuleci. Czy bardzo należy cierpieć z tego powodu?

Sądzę, że nie. Postaram się pokazać dzisiaj, jak prosto i naturalnie, można rozwiązywać równania z pochodnymi (**równania różniczkowe**) pojawiające się w związku z problemem ruchu, metodą numeryczną. Zajmiemy się, między innymi ruchem harmonicznym, który należy do tych łatwych przypadków, ale jednym prostym dopisaniem trzech literek, zmienimy go w ruch wahadła fizycznego wychylonego o 120°, czy nawet 179°, przypadek nie mający nic wspólnego z ruchem harmonicznym. I wcale nie taki łatwy. Inna zaleta rozpoczęcia rozważań numerycznych z przypadkiem łatwo rozwiązywalnym polega na łatwości kontroli samego mechanizmu numerycznego.

Przyjmijmy powszechną konwencję, że pochodną danej wielkości po czasie zapisujemy stawiając kropkę nad wielkością. I tak, jeśli położenie jest x, to prędkość $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{x}$, a przyspieszenie $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{v}$

Wszystkie omawiane dotychczas równania dają się zapisać w postaci

$$\dot{y} = f(y)$$

To szokująca prostota!!!!

Gdzieś oczywiście leży pies pogrzebany. Niewinnie wyglądające *y*, to nie jest jedna zmienna liczbowa, a zbiór **kilu zmiennych**: $y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$. Ile ich jest? To zależy. Dla równania z oporem kwadratowym, wystarczy tylko 1. Dla równania z oporem zależnym od czasu, potrzeba dwie zmienne:

$$y = \{y_1, y_2\} = \{t, v,\},$$

$$\dot{y} = \{\dot{t}, \dot{v}\} = \{1, -\alpha / v^{2-\frac{t}{T}}\} = \{f_1, f_2\},$$

$$\text{gdzie } f_1 = 1,\ f_2(y_1, y_2) = -\alpha / y_2^{2-\frac{y_1}{T}}$$

Wreszcie równanie Newtona z ogólną siłą zależną i od czasu i od położenia i od prędkości:

$$y = \{y_1, y_2, y_3\} = \{t, x, v\},$$

$$\dot{y} = \{\dot{t}, \dot{x}, \dot{v}\} = \{1, v, F(t, x, v)\} = \{f_1, f_2, f_3\},$$

$$\text{gdzie } f_1 = 1,\ f_2 = y_3, f_3 = F(y_1, y_2, y_3)/m$$

Dla punktu na płaszczyźnie (*x,z*) będzie:

$$y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\} = \{t, x, z, v_x, v_z\},$$

$$\dot{y} = \{\dot{t}, \dot{x}, \dot{z}, \dot{v}_x, \dot{v}_z\} = \{1, v_x, v_z, F_x(t, x, z, v_x, v_z), F_x(t, x, z, v_x, v_z)\} =$$

$$= \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},$$

$$\text{gdzie } f_1 = 1,\ f_2 = y_4, f_3 = y_5,$$

$$f_4 = F_z(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)/m, f_5 = F_z(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)/m$$

O zbiorze wielkości y_i można myśleć jak o współrzędnych pewnego punktu w abstrakcyjnej przestrzeni, zwanej **przestrzenią fazową**. Równanie $\dot{y} = f(y)$ mówi nam, że gdy rozpatrywane wielkości opisujące ruch (i czas, i położenia, i prędkości) mają określone wartości, y_0, czyli gdy stan układu odpowiada określonemu punktowi w przestrzeni fazowej, równanie (faktycznie układ równań) wyznacza chwilowa szybkość przemieszczania się tego punktu. W małym przedziale czasu, d*t,* punkt przeniesie się do $y(t_0 + \mathrm{d}t) = y_0 + \mathrm{d}t \cdot f(y_0)$. Ale z tego nowego punktu znów wiemy, dokąd się przeniesiemy po kolejnym d*t.*

$$y(t_0 + 2\mathrm{d}t) = y_0 + \mathrm{d}t \cdot f(y_0) + \mathrm{d}t \cdot f(y_0 + \mathrm{d}t \cdot f(y_0))$$

I tak można **ewoluować** bez końca!

Robienie takiej „ewolucji" przez wypisywanie kolejnych wzorów nie ma jednak przyszłości. Ale procedura jest niesłychanie łatwa do zrealizowania na dowolnym urządzeniu liczącym. Wystarczy powszechnie znany arkusz kalkulacyjny.

Gdy się chce dosiąść komputera, problem musi być dalece skonkretyzowany. Jak obiecywałem, na początek, zajmiemy się ruchem pod wpływem siły proporcjonalnej do wychylenia.

$$m\dot{v} = -kx$$
$$\dot{x} = v$$

Konkretyzacja problemu musi być, ale nie jest aż tak źle, byśmy musieli zdecydować się jaką konkretnie masę i jaką stałą sprężystości wybieramy. Dla pozbycia się tych stałych wprowadzimy zamiast zwykłego czasu, wielkość do niego proporcjonalną $\tilde{t} = \omega t$. Stałą ω wybierzemy za chwilę. Dzieląc równanie definiujące prędkość przez ω mamy

$$\frac{\dot{x}}{\omega} = \frac{\mathrm{d}x}{\omega \mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tilde{t}} \equiv \tilde{v}$$

Wstawiając prędkości $\tilde{v}$ do równania z przyspieszeniem, mamy

$$m\frac{\mathrm{d}\omega\tilde{v}}{\mathrm{d}t} = m\omega^2\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -kx, \text{ czyli}:$$
$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\tilde{t}} = -\frac{k}{m\omega^2}x$$

Teraz widać jak **opłaci** się wybrać ω. Oczywiście tak, by

$$\frac{k}{m\omega^2} = 1, \text{ czyli}:$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Równania różniczkowe:

$$\dot{x} = \tilde{v}$$
$$\dot{\tilde{v}} = -x$$

stają się bardzo sympatyczne!!!! Różne fizyczne oscylatory sprowadziliśmy do jednego równania.

Najprostszy algorytm ewolucji: $y(t + \mathrm{d}t) = y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t))$ używany jest w dowodach twierdzeń o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych. Nie starając się o wielką precyzję, zauważamy, że po podzieleniu potrzebnego zakresu na *n* kawałków, wielkość przyrostu $\mathrm{d}\tilde{t}$ staje się odwrotnie proporcjonalna do *n*. Przyrost *y* też jest proporcjonalny do 1/*n*, błąd względny przyrostu jest też ~1/*n*, a błąd bezwzględny przyrostu aproksymowanego iloczynem pochodnej jest ~$1/n^2$. Suma błędów, po dodaniu *n* składników jest ~1/*n*, a więc można ją uczynić dowolnie małą, przez wzięcie dostatecznie dużego *n.*

Jeśli chcemy liczyć, np. z dokładnością 4 cyfr, to konieczność rozważania 10 000 kroków może nie wyglądać zachęcająco.

Istnieje **banalnie prosty** sposób ulepszenia algorytmu. Przecież dużo bliższym prawdy jest uznanie, że prędkość f w środku przedziału, tj. w punkcie:

$$(y(t)+y(t+\mathrm{d}t))/2 \approx (y(t)+y(t)+\mathrm{d}t\cdot f(y(t))/2 = y(t)+\mathrm{d}t\cdot f(y(t))/2\,,$$

lepiej nadaje się do określenia przyrostu y –eka na całym przedziale dt, niż prędkość na początku przedziału!!!!

Zatem decydujemy się na **algorytm ewolucji**:

$$y(t+\mathrm{d}t) = y(t)+\mathrm{d}t\cdot f((y(t)+\mathrm{d}t\cdot f(y(t))/2)\,.$$

Słowami:

Na początku znamy tylko wartość początkową (wszystkich składowych) y. Znamy, więc, prędkość wyłącznie początkową (jako $f(y_{pocz})$). Za jej pomocą przybliżamy, gdzie będzie y po **połowie** odcinka czasu, a następnie w tym punkcie liczymy jeszcze raz f, czyli szybkość zmian, i dopiero tę wartość mnożymy przez dt uznając to za **lepsze** przybliżenie faktycznego przyrostu.

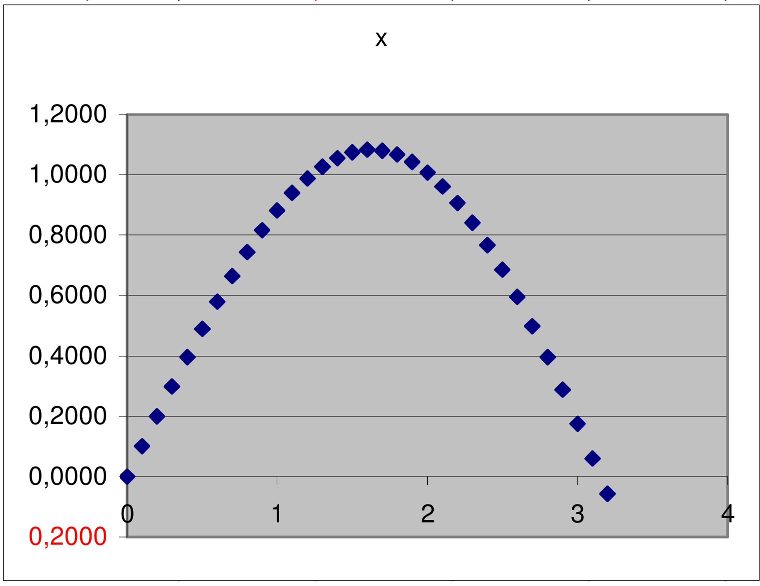
Przed przystąpieniem do obliczeń, ustalmy jeszcze jeden fakt, który będzie niezłym sprawdzianem dokładności. Otóż zróżniczkujmy sumę kwadratów:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}(x^2+\tilde{v}^2) = 2x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}x + 2\tilde{v}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\tilde{v} = 2\tilde{v}\left(x+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}}\tilde{v}\right) = 2\tilde{v}(x-x) = 0$$

Jest ona stała w czasie ewolucji.

Na początek zbadajmy ten „bezmyślny” algorytm. Krok wziąłem 0,1 radiana. Widać, że suma kwadratów rośnie. Ale, wygląd ruchu jest całkiem, całkiem.... Zmiana znaku x następuje pomiędzy 3,1 a 3,2. Gdy ktoś słyszał o liczbie π, powinien być zadowolony. Podobnie wykres zależności $x(t)$ – wygląda jak oscylacja.

dt	t	dx	dv	x	v	x^2+v^2
0,1	0			0,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,1	0,1000	0,0000	0,1000	1,0000	1,0100
0,1	0,2	0,1000	0,0100	0,2000	0,9900	1,0201
0,1	0,3	0,0990	0,0200	0,2990	0,9700	1,0303
0,1	0,4	0,0970	0,0299	0,3960	0,9401	1,0406
0,1	0,5	0,0940	0,0396	0,4900	0,9005	1,0510
0,1	0,6	0,0901	0,0490	0,5801	0,8515	1,0615
0,1	0,7	0,0851	0,0580	0,6652	0,7935	1,0721
0,1	0,8	0,0793	0,0665	0,7446	0,7270	1,0829
0,1	0,9	0,0727	0,0745	0,8173	0,6525	1,0937
0,1	1	0,0653	0,0817	0,8825	0,5708	1,1046
0,1	1,1	0,0571	0,0883	0,9396	0,4825	1,1157
0,1	1,2	0,0483	0,0940	0,9878	0,3886	1,1268
0,1	1,3	0,0389	0,0988	1,0267	0,2898	1,1381
0,1						95
0,1						10
0,1						26
0,1						43
0,1						61
0,1						81
0,1						02
0,1						24
0,1						47
0,1						72
0,1						97
0,1						24
0,1						53
0,1						82
0,1						13
0,1						45
0,1						78
0,1	3,1	0,1148	0,0175	0,0605	1,1652	1,3613
0,1	3,2	0,1165	0,0060	0,0560	1,1712	1,3749



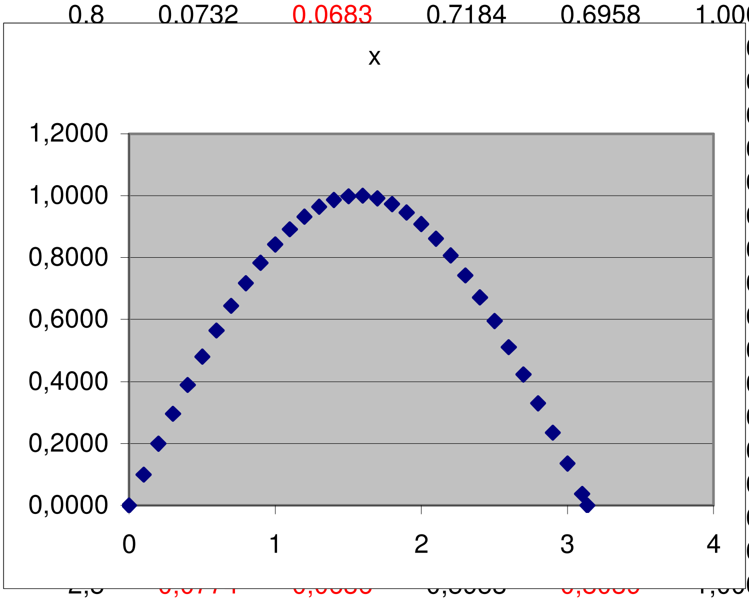
UWAGA Wartości ujemne wypisywane są bez znaku minus, ale za to na **czerwono!**

Można się bawić **łatwo samemu**, zmniejszając krok do 0,01. Arkusz się wydłuża, trzeba ukrywać część wierszy, albo ganiać po arkuszu w te i we wte, co na wykładzie jest niedogodne. Niewątpliwą oznaką polepszenia dokładności jest znaczne zmniejszenie różnicy miedzy suma kwadratów a jedynką.

Przejdę do nowego arkusza z lepszym algorytmem.

Oto on:

dt	t	dx	dv	x	v	x^2+v^2
0,1	0			0,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,1	0,1000	0,0050	0,1000	0,9950	1,0000
0,1	0,2	0,0990	0,0150	0,1990	0,9800	1,0001
0,1	0,3	0,0970	0,0248	0,2960	0,9552	1,0001
0,1	0,4	0,0940	0,0344	0,3900	0,9208	1,0001
0,1	0,5	0,0901	0,0436	0,4802	0,8772	1,0001
0,1	0,6	0,0853	0,0524	0,5655	0,8248	1,0002
0,1	0,7	0,0797	0,0607	0,6452	0,7642	1,0002
0,1	0,8	0,0732	0,0683	0,7184	0,6958	1,0002
0,1						02
0,1						03
0,1						03
0,1						03
0,1						03
0,1						04
0,1						04
0,1						04
0,1						04
0,1						05
0,1						05
0,1						05
0,1						05
0,1						06
0,1						06
0,1						06
0,1						06
0,1	2,6	0,0834	0,0555	0,5120	0,8594	1,0007
0,1	2,7	0,0885	0,0469	0,4235	0,9063	1,0007
0,1	2,8	0,0927	0,0378	0,3307	0,9441	1,0007
0,1	2,9	0,0961	0,0284	0,2347	0,9725	1,0007
0,1	3	0,0984	0,0186	0,1362	0,9911	1,0008
0,0364	3,1	0,0998	0,0087	0,0364	0,9997	1,0008
0	3,1364	0,0364	0,0007	0,0000	1,0004	1,0008



Teraz suma kwadratów różni się od 1 dopiero na 4-tym miejscu po przecinku. Żeby wyznaczyć miejsce zerowe funkcji opisującej ruch, zmieniam ostatni krok (w rubryce A33), tak by w rubryce E34 mieć zero. Wartość „czasu" ωt wynosi 3,136. Trochę za mało jak na pi. Brakuje 0,006, czyli prawie 0,2%.

Zmniejszmy krok do 0,01. Większość wierszy na poniższym diagramie jest schowana: Ujawnione są początkowe i końcowe 4 wiersze

dt	t	dx	dv	x	v	x^2+v^2
0,01	0			0,0000	1,0000	1,000000
0,01	0,01	0,0100	0,0001	0,0100	1,0000	1,000000
0,01	0,02	0,0100	0,0001	0,0200	0,9998	1,000000
0,01	0,03	0,0100	0,0002	0,0300	0,9996	1,000000
0,01	0,04	0,0100	0,0003	0,0400	0,9992	1,000000
0,01	3,12	0,0100	0,0003	0,0215	0,9998	1,000001
0,01	3,13	0,0100	0,0002	0,0115	0,9999	1,000001
0,00159	3,14	0,0100	0,0001	0,0015	1,0000	1,000001
	3,14159	0,0016	0,0000	0,0000	1,0000	1,000001

Ostatni krok, 0,00159, jest dobrany tak, by wartość położenia w komórce E317 doprowadzić do zera. Wartością kluczowego *x*-a jest 3,14159.. („kuć(3) i(1) orać(4) w(1) dzień(5) zawzięcie(9), bo plonów niema bez trudu....”)

Mimo swej prostoty, metoda jest bardzo skuteczna.

Zauważmy, że przy kroku 0,1 suma kwadratów w okolicach 180° różniła się od 1 o niecałe 1/1000. Teraz suma ta różni się zaledwie o 1/1000000.

Zauważmy też, że po czasie $\tilde{t} = \omega t$ =3,14159... ciało wróciło do położenia początkowego, a prędkość jedynie zmieniła znak. Cały proces dokładnie się powtórzy i po kolejnym $\tilde{t} = \omega t$ =3,14159 warunki początkowe odtworzą się łącznie ze znakiem prędkości. Badany ruch jest, przeto, ruchem okresowym. Ciało drga z okresem $T = 2 * 3{,}14159 / \omega$

A teraz obiecane wahadło fizyczne. Jak pamiętacie ze szkoły, a także, jak można to natychmiast odtworzyć, przyspieszenie liniowe wahadła, w kierunku stycznym, wynosi $g\sin(\varphi)$. Przyspieszenie liniowe, to także $l\ddot{\varphi}$. Zatem:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin(\varphi) = -\omega^2 \sin(\varphi)$$

Wprowadzając czas $\tilde{t} = \omega t$, mam ostatecznie:

$$\ddot{\varphi} = -\sin(\varphi)$$

Dla małych amplitud, sinus kąta można zastąpić samym kątem i mamy to samo równanie, co poprzednio. A co z dużymi amplitudami???

W istniejącym pliku kalkulacyjnym wystarczy drobna poprawka. Trzeba w formułach na przyrosty wpisać SIN. I to wszystko!

Wpisujemy

=A2*(F2-A2*SIN(E2)/2) w pozycji C3 i

=-A2*SIN(E2+A2*F2/2) . Dla oscylatora harmonicznego nie było tego SIN. Nie było, bo przyspieszenie było określone przez *x* a nie przez jego sinus. Prawo zachowania energii wiąże teraz kwadrat prędkości z wysokością daną cosinusem kąta. Warunki początkowe wygodnie jest teraz wziąć takie, by prędkość pocz.=0, a kąt początkowy był duży, np. Pi*120/180.

dt	t	dx	dv	x	v	v^2+2*(1-COS()
0,1	0			2,0944	0,0000	3,0000
0,1	0,1	0,0043	0,0866	2,0901	0,0866	3,0000
0,1	0,2	0,0130	0,0870	2,0771	0,1736	3,0000
0,1	0,3	0,0217	0,0879	2,0553	0,2615	3,0000
0,1	0,4	0,0306	0,0891	2,0248	0,3506	3,0000
0,1	0,5	0,0396	0,0906	1,9852	0,4412	3,0000
0,1	0,6	0,0487	0,0924	1,9365	0,5336	3,0000
0,1	0,7	0,0580	0,0943	1,8785	0,6279	3,0000
0,1	0,8	0,0676	0,0962	1,8109	0,7241	3,0000
0,1	0,9	0,0773	0,0979	1,7336	0,8221	3,0000
0,1	1	0,0871	0,0993	1,6465	0,9213	3,0001
0,1	1,1	0,0971	0,1000	1,5494	1,0213	3,0002
0,1	1,2	0,1071	0,0997	1,4422	1,1210	3,0003
0,1	1,3	0,1171	0,0983	1,3252	1,2193	3,0005
0,1	1,4	0,1268	0,0953	1,1984	1,3147	3,0007
0,1	1,5	0,1361	0,0906	1,0623	1,4052	3,0009
0,1	1,6	0,1449	0,0837	0,9174	1,4889	3,0011
0,1	1,7	0,1529	0,0747	0,7645	1,5636	3,0014
0,1	1,8	0,1598	0,0634	0,6047	1,6270	3,0017
0,1	1,9	0,1655	0,0500	0,4392	1,6769	3,0019
0,1	2	0,1698	0,0348	0,2693	1,7117	3,0021
0,1	2,1	0,1725	0,0183	0,0968	1,7300	3,0023
0,1	2,2	0,1735	0,0010	0,0766	1,7310	3,0024
0,1	2,3	0,1727	0,0162	0,2494	1,7148	3,0024
0,1	2,4	0,1702	0,0329	0,4196	1,6819	3,0023
0,1	2,5	0,1662	0,0483	0,5858	1,6336	3,0022
0,1	2,6	0,1606	0,0619	0,7464	1,5717	3,0020
0,1	2,7	0,1538	0,0735	0,9001	1,4983	3,0019
0,1	2,8	0,1459	0,0828	1,0461	1,4155	3,0017
0,1	2,9	0,1372	0,0899	1,1833	1,3256	3,0016
0,1	3	0,1279	0,0949	1,3112	1,2308	3,0014
0,1	3,1	0,1182	0,0980	1,4295	1,1327	3,0013
0,1	3,2	0,1083	0,0996	1,5378	1,0331	3,0012
0,1	3,3	0,0983	0,1000	1,6361	0,9331	3,0012
0,1	3,4	0,0883	0,0994	1,7244	0,8337	3,0011
0,1	3,5	0,0784	0,0981	1,8028	0,7356	3,0011
0,1	3,6	0,0687	0,0964	1,8715	0,6392	3,0010
0,1	3,7	0,0591	0,0945	1,9307	0,5447	3,0010
0,1	3,8	0,0498	0,0926	1,9805	0,4521	3,0010
0,1	3,9	0,0406	0,0908	2,0211	0,3613	3,0010
0,1	4	0,0316	0,0892	2,0527	0,2721	3,0010
0,1	4,1	0,0228	0,0880	2,0755	0,1841	3,0010
0,1	4,2	0,0140	0,0871	2,0895	0,0970	3,0010
0,012	4,3	0,0054	0,0866	2,0949	0,0104	3,0010
	4,312	0,0001	0,0104	2,0949	0,0000	3,0010

Powyższy arkusz jest obliczony dla wychylenia 120°, tj. dla $x = \frac{120}{180}\pi$. Taka formuła jest wpisana w pozycji E2, choć na powyższym wydruku widzimy jej wartość 2,0944. Po pół okresu prędkość wraca do początkowej wartości 0. Ma to miejsce dla fazy 4,312=1,37Pi. Oznacza to, iż okres wahań jest dłuższy o 37% od okresu małych drgań.

Wpisanie dowolnego kąta wychylenia początkowego pozwala na natychmiastowe udzielenie odpowiedzi na wszystkie pytania.

Wróćmy jednak do oscylatora harmonicznego. Wyznaczyliśmy jego ruch. Pojawiły się ciekawe funkcje czasu zredukowanego $\tilde{t} = \omega t$, okresowe, zmieniające się w przedziale od –1 do +1, o okresie 2*3,14159.... Nie ma chyba nikogo na tej sali, kto nie znał by tych funkcji, albo, kto nie domyślałby się, że takie same funkcje występują tez w innych sytuacjach, w szczególności w trygonometrii. Za minutkę ten związek ustanowimy.

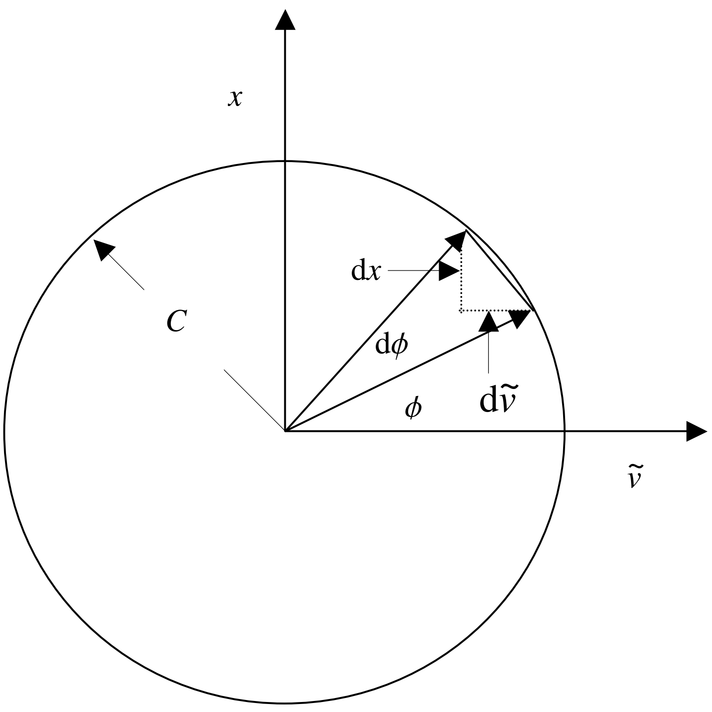
Przypomnijmy, iż ze względu na równania:

$$\mathrm{d}x = \tilde{v}\,\mathrm{d}\tilde{t}$$
$$\mathrm{d}\tilde{v} = -x\,\mathrm{d}\tilde{t}$$

przyrost sumy kwadratów jest wykluczony:

$$\mathrm{d}(x^2 + \tilde{v}^2) = 2x\mathrm{d}x + 2\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{v} = (2x\tilde{v} - 2\tilde{v}x)\mathrm{d}\tilde{t} = 0$$
$$x^2 + \tilde{v}^2 = C^2 = x_0{}^2 + \tilde{v}_0{}^2$$

a sama wartość tej sumy wyznaczona jest przez warunek początkowy. Na płaszczyźnie fazowej pozostajemy w czasie ruchu na **okręgu** o promieniu *C*. Trzeba teraz określić jak się ten punkt przemieszcza wraz z upływem czasu. To łatwe.



$$(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}\tilde{v})^2 = C^2(\mathrm{d}\phi)^2 =$$
$$= \left(\tilde{v}^2 + x^2\right)(\mathrm{d}\tilde{t})^2 = C^2(\mathrm{d}\tilde{t})^2$$

Zatem:

$$\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}\tilde{t}$$
$$\varphi = \tilde{t} + \phi_0 = \omega t + \phi_0$$

Z rysunku odczytujemy:

$$x = C\sin(\phi)$$
$$\tilde{v} = C\cos(\phi)$$

Przechodząc do „zwykłych” zmiennych, mamy

$$x = C\sin(\omega t + \phi_0)$$
$$v = \omega\tilde{v} = \omega C\cos(\omega t + \phi_0)$$

Korzystając ze znanych wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów mamy:

$$x = C\sin(\omega t + \phi_0) = C\sin(\phi_0)\cos(\omega t) + C\cos(\phi_0)\sin(\omega t)$$
$$v = \omega\tilde{v} = \omega C\cos(\omega t + \phi_0) = \omega C\cos(\phi_0)\cos(\omega t) - \omega C\sin(\phi_0)\sin(\omega t)$$

Dwie dowolne stałe: amplitudę i fazę możemy, jeśli wygodniej, zastąpić początkowymi wartościami położenia i prędkości:

$$x = C\sin(\phi_0)\cos(\omega t) + C\cos(\phi_0)\sin(\omega t) \quad = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$
$$v = \omega C\cos(\phi_0)\cos(\omega t) - \omega C\sin(\phi_0)\sin(\omega t) = v_0\cos(\omega t) - \omega x_0\sin(\omega t)$$

Jest to kompletne rozwiązanie problemu ruchu oscylatora.

Powstaje pytanie, czy wobec istnienia, i to tak stosunkowo prostego, rozwiązania analitycznego, warto było zajmować się rozwiązaniem numerycznym? No cóż. To kwestia gustu. W powyższym podejściu idę za głosem Feynmana. Jest szereg zalet uświadomienia sobie jak „pracują” równania ruchu. Jedną z korzyści było niemal natychmiastowe, bez żadnego wysiłku, przejście od oscylatora harmonicznego, do anharmonicznego. Inna sprawa to same funkcje sinus i cosinus. Wydaje nam się, że wiemy czemu one są równe. Ale tak naprawdę, z trygonometrii to my **tylko widzimy** na rysunku jaki jest ich sens liczbowy, a policzyć to sobie możemy dla 30, 45, czy 60 stopni.

Właśnie ostatnio mój wnuk mnie dopytuje, bo czuje się nieswojo, no co to jest ten sinus dla byle jakiego kąta?

Oczywiście, w przeszłości mądrzy ludzie zrobili tablice, dzisiaj, w byle kalkulatorku odczytamy wartość sinusa, dajmy na to 1 radiana. A my sobie **sami** policzyliśmy! Zaglądamy do tabeli na stronie 7 z krokiem 0,01 i w rubryce E102 mamy (wyliczoną za pomocą operacji czysto arytmetycznych) wartość 0,8415. Tyle samo, co wszędzie!

W wyniku na ruch oscylatora zawarte są też ważne wyniki na pochodne tych funkcji. Po prostu widzimy, że pochodną sinusa jest cosinus, a cosinusa **minus** sinus. Dwukrotne różniczkowanie każdej z tych funkcji (a także ich dowolnej kombinacji liniowej) daje z powrotem tę sama funkcję, ale z minusem.

Zbiór własności

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} f(\varphi) = -f;$$

$$f(0) = 0$$

$$\left.\frac{d}{d\varphi} f(\varphi)\right|_{\varphi=0} = 1$$

definiuje **jednoznacznie** funkcję f. Ta funkcja występuje w naszej kolumnie E. Ta funkcja nazywa się sinus. Ta sama funkcja pozwala związać współrzędną punktu na okręgu z długością odpowiedniego łuku.

Funkcje trygonometryczne grają tak wybitna rolę w fizyce, że warto, już teraz, pokazać jeszcze jedną ich własność.

Nie jest trudno uzyskać szereg potęgowy dla sinusa i cosinusa. Punktem wyjścia niech będzie szereg dla funkcji wykładniczej: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ Można go uzyskać wprost z definicji liczby e i wzoru na dwumian Newtona.

Z rozwinięcia tego wynika podstawowa własność funkcji wykładniczej, mianowicie to, iż jej pochodna równa się samej funkcji. **To widać**. Każdy człon zróżniczkowany ma mniejszą potęgę, a wykładnik n „zjeżdżający" do licznika, skraca się z ostatnim czynnikiem n! W mianowniku. Tym samym każdy wyraz rozwinięcia samej funkcji, pojawia się w szeregu pochodnej, tyle że człon z potęgą 3 pochodzi z członu z potęgą 4 itd.

Gdy z szeregu potęgowego funkcji wykładniczej zostawimy sobie same potęgi parzyste (albo same nieparzyste) dopiero **dwukrotne** różniczkowanie daje znów funkcję wyjściową. Nazywają się one sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny:

$$\sinh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Mamy szereg oczywistych relacji:

$\cosh'(x)=\sinh(x)$

$\sinh'(x)=\cosh(x)$

$\sinh(x)+\cosh(x)=e^x$; $\cosh(x)- \sinh(x)=e^{-x}$; $\sinh(x)=(e^x- e^{-x})/2$; $\cosh(x)=(e^x+ e^{-x})/2$;

Jesteśmy blisko! Potrzeba nam tylko znaku minus przy przeprowadzaniu jeden funkcji w drugą. Osiąga się to zamieniając szeregi dla funkcji hiperbolicznych na szeregi naprzemienne.

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Przy dwukrotnym różniczkowaniu każdy człon reprodukuje ten wcześniejszy, tyle że każdy wcześniejszy (sąsiedni) ma przeciwny znak!

Elegancki wzór dostaje się korzystając z liczb zespolonych. Ponieważ

$i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1$, więc widać co się dzieje po wstawieniu ix do szeregu potęgowego dla podstawowej funkcji wykładniczej.

Wyrazy o potęgach podzielnych przez 4 nie zmieniają się, a te pozostałe parzyste zmieniają znak. Grupują się w szereg dla cosinusa.

Wyrazy o n=4k+1 dostają mnożnik i, a te postaci 4K+3 dostają mnoznik $-i$. Po wyłączeniu i, dostajemy szereg dla sinusa:

Słynny wzór Eulera:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

zapisany dla $x = \pi$ brzmi

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

i zawiera 5 najważniejszych liczb: $0, 1, i, e, \pi$!

Jest też oczywiście

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Uzupełnienie (prezent dla entuzjastów)

Dla osób zainteresowanych obliczeniami numerycznymi dającymi władzę nad różnymi „nierozwiązywalnymi” zadaniami mechaniki podaję bez dowodu metodę znacznego ulepszenia obliczeń.

Zastanawiając się nad algorytmem ewolucji:

$y(t + \mathrm{d}t) = y(t) + \mathrm{d}t \cdot f((y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t)) / 2)$

można dojść do przekonania, że skoro już potrafimy lepiej liczyć przyrost niż naiwnie, to czemu nie zastosować tego lepszego przybliżenia do obliczenia prędkości w środku przedziału?

$$y(t+\mathrm{d}t) = y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t) + \mathrm{d}t \cdot f((y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t))/2)/2)$$

No cóż. W powyższym wzorze środek przedziału jest wyznaczony dokładniej, ale z drugiej strony, wartość prędkości ($\dot{y}$) w samym środeczku, choćby najdokładniej znanym, wcale nie pokrywa się z wartością prędkości średniej dającej ścisłą wartość przyrostu y. Dlatego trzecia metoda liczenia przyrostu ma taką samą wartość *a priori* jak metoda druga. Jest jednak nieco inna i czy można z tego wyciągnąć jakąś korzyść?

Mądrzy ludzie zauważyli (i udowodnili), że jeśli uzupełnić te 3 metody liczenia przyrostów o **jeszcze jeden**, z pozoru bardzo zły, bo przyjmujący za prędkość zmian, wartość prędkości na końcu przedziału (wyznaczonego trzecią metodą):

$$y(t+\mathrm{d}t) = y(t) + \mathrm{d}tf(y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t) + \mathrm{d}t \cdot f((y(t) + \mathrm{d}t \cdot f(y(t))/2)/2))$$

to z tych czterech różnych sposobów, uśredniając odpowiednio, można uzyskać rezultat **super dokładny**

Zapiszmy to w sposób przejrzysty. Rozważmy 4 różne przyrosty $p1, p2, p3, p4$:

$$p1 = \mathrm{d}tf(y);$$
$$p2 = \mathrm{d}tf(y + p1/2);$$
$$p3 = \mathrm{d}tf(y + p2/2);$$
$$p4 = \mathrm{d}tf(y + p3)$$

Wreszcie weźmy średnią ważoną tych czterech przyrostów:

$$p = (p1 + 2p2 + 2p3 + p4)/6$$

O ile przyrost $p1$ daje ścisły wynik w jednym kroku tylko wtedy, gdy rozwiązanie jest funkcją liniową czasu, a przyrost $p2$ wtedy, gdy rozwiązanie jest dowolną funkcja kwadratową (jak w ruchu jednostajnie przyspieszonym), to przyrost p określony powyżej **jest ścisły** dla każdego rozwiązania, które byłoby wielomianem 4-tego stopnia w czasie. Dla innych równań i innych rozwiązań, błąd pojedynczego kroku jest stopnia 5-tego w przedziale czasu, a błąd sumy stopnia 4-tego. Dlatego, wraz ze wzrostem liczby przedziałów, dokładność tej metody rośnie jak $1/n^4$.

A oto arkusz kalkulacyjny dla oscylatora zbudowany w oparciu o ten algorytm z krokiem 1/10

dt	t	dx1	dv1	dx2	dv2	dx3	dv3	dx4	dv4	dx	dv	x	v	1-(x^2+y^2)
0,1	0,00											0,00000	1,00000	0,0E+00
0,1	0,10	0,100	0,000	0,100	-0,005	0,100	-0,005	0,100	-0,010	0,100	-0,005	0,09983	0,99500	1,4E-08
0,1	0,20	0,100	-0,010	0,099	-0,015	0,099	-0,015	0,098	-0,020	0,099	-0,015	0,19867	0,98007	2,8E-08
0,1	0,30	0,098	-0,020	0,097	-0,025	0,097	-0,025	0,096	-0,030	0,097	-0,025	0,29552	0,95534	4,2E-08
0,1	0,40	0,096	-0,030	0,094	-0,034	0,094	-0,034	0,092	-0,039	0,094	-0,034	0,38942	0,92106	5,5E-08
0,1	0,50	0,092	-0,039	0,090	-0,044	0,090	-0,043	0,088	-0,048	0,090	-0,043	0,47943	0,87758	6,9E-08
0,1	0,60	0,088	-0,048	0,085	-0,052	0,085	-0,052	0,083	-0,056	0,085	-0,052	0,56464	0,82534	8,3E-08
0,1	0,70	0,083	-0,056	0,080	-0,061	0,080	-0,060	0,076	-0,064	0,080	-0,060	0,64422	0,76484	9,7E-08
0,1	0,80	0,076	-0,064	0,073	-0,068	0,073	-0,068	0,070	-0,072	0,073	-0,068	0,71736	0,69671	1,1E-07
0,1	0,90	0,070	-0,072	0,066	-0,075	0,066	-0,075	0,062	-0,078	0,066	-0,075	0,78333	0,62161	1,2E-07
0,1	1,00	0,062	-0,078	0,058	-0,081	0,058	-0,081	0,054	-0,084	0,058	-0,081	0,84147	0,54030	1,4E-07
0,1	1,10	0,054	-0,084	0,050	-0,087	0,050	-0,087	0,045	-0,089	0,050	-0,087	0,89121	0,45360	1,5E-07
0,1	1,20	0,045	-0,089	0,041	-0,091	0,041	-0,091	0,036	-0,093	0,041	-0,091	0,93204	0,36236	1,7E-07
0,1	1,30	0,036	-0,093	0,032	-0,095	0,031	-0,095	0,027	-0,096	0,032	-0,095	0,96356	0,26750	1,8E-07
0,1	1,40	0,027	-0,096	0,022	-0,098	0,022	-0,097	0,017	-0,099	0,022	-0,098	0,98545	0,16997	1,9E-07
0,1	1,50	0,017	-0,099	0,012	-0,099	0,012	-0,099	0,007	-0,100	0,012	-0,099	0,99749	0,07074	2,1E-07
0,1	1,60	0,007	-0,100	0,002	-0,100	0,002	-0,100	-0,003	-0,100	0,002	-0,100	0,99957	0,02920	2,2E-07
0,1	1,70	-0,003	-0,100	-0,008	-0,100	-0,008	-0,100	-0,013	-0,099	-0,008	-0,100	0,99166	0,12884	2,4E-07
0,1	1,80	-0,013	-0,099	-0,018	-0,099	-0,018	-0,098	-0,023	-0,097	-0,018	-0,098	0,97385	0,22720	2,5E-07
0,1	1,90	-0,023	-0,097	-0,028	-0,096	-0,028	-0,096	-0,032	-0,095	-0,028	-0,096	0,94630	0,32329	2,6E-07
0,1	2,00	-0,032	-0,095	-0,037	-0,093	-0,037	-0,093	-0,042	-0,091	-0,037	-0,093	0,90930	0,41615	2,8E-07
0,1	2,10	-0,042	-0,091	-0,046	-0,089	-0,046	-0,089	-0,050	-0,086	-0,046	-0,089	0,86321	0,50484	2,9E-07
0,1	2,20	-0,050	-0,086	-0,055	-0,084	-0,055	-0,084	-0,059	-0,081	-0,055	-0,084	0,80850	0,58850	3,1E-07
0,1	2,30	-0,059	-0,081	-0,063	-0,078	-0,063	-0,078	-0,067	-0,075	-0,063	-0,078	0,74571	0,66627	3,2E-07
0,1	2,40	-0,067	-0,075	-0,070	-0,071	-0,070	-0,071	-0,074	-0,068	-0,070	-0,071	0,67546	0,73739	3,3E-07
0,1	2,50	-0,074	-0,068	-0,077	-0,064	-0,077	-0,064	-0,080	-0,060	-0,077	-0,064	0,59847	0,80114	3,5E-07
0,1	2,60	-0,080	-0,060	-0,083	-0,056	-0,083	-0,056	-0,086	-0,052	-0,083	-0,056	0,51550	0,85689	3,6E-07
0,1	2,70	-0,086	-0,052	-0,088	-0,047	-0,088	-0,047	-0,090	-0,043	-0,088	-0,047	0,42738	0,90407	3,7E-07
0,1	2,80	-0,090	-0,043	-0,093	-0,038	-0,092	-0,038	-0,094	-0,034	-0,092	-0,038	0,33499	0,94222	3,9E-07
0,1	2,90	-0,094	-0,033	-0,096	-0,029	-0,096	-0,029	-0,097	-0,024	-0,096	-0,029	0,23925	0,97096	4,0E-07
0,1	3,00	-0,097	-0,024	-0,098	-0,019	-0,098	-0,019	-0,099	-0,014	-0,098	-0,019	0,14112	0,98999	4,2E-07
0,041595	3,10	-0,099	-0,014	-0,100	-0,009	-0,099	-0,009	-0,100	-0,004	-0,100	-0,009	0,04158	0,99913	4,3E-07
	3,141595	-0,042	-0,002	-0,042	-0,001	-0,042	-0,001	-0,042	0,000	-0,042	-0,001	0,000000	1,00000	4,3E-07

Mimo 10-krotnie większego kroku, dokładność jest o rząd wielkości lepsza niż w poprzedniej metodzie. A porównując z poprzednią metodą z tym samym krokiem, 0,1, widzimy rewelacyjny wzrost dokładności. Liczba pi zamiast 3,136 wychodzi nam 3,141595 wobec prawdziwej 3,141593...

Kolumny z nagłówkami *x* i *v* dają dokładne (z podaną liczbą cyfr) wartości sinusa i cosinusa w całym przedziale od 0 do 180°, wyliczone, co 0,1 radiana. W razie potrzeby, każda wartość pośrednia może bez trudu być też wyliczona. Wystarczy wpisać odpowiedni przyrost w odpowiednie miejsce w kolumnie 1-szej.

Całka oznaczona $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ może, oczywiście, być uważana za rozwiązanie (najprostszego z możliwych) równań różniczkowych $\dot{x} = f(t)$, w punkcie $x(b)$, przy warunku początkowym $x(a)=0$.

Podana powyżej, dość wyrafinowana, metoda znajdowania dokładnego pojedynczego kroku (zwana metodą Runge Kutty 4-tego rzędu) daje się w tym wypadku wyrazić (**sprawdź)** bardzo prostym wzorem: $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$

Zobaczmy, co dają omawiane trzy metody dla całki $\int_0^x t^n \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ dla kolejnych potęg n.

Ścisły wynik to kolejno $\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, \frac{x^5}{5}$.

Metoda **naiwna** $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx (b-a)f(a)$ daje: $\frac{x}{1}, 0\frac{x^2}{2}, 0\frac{x^3}{3}, 0\frac{x^4}{4}, 0\frac{x^5}{5}$

Jej używanie ma cechy masochizmu

Metoda nieco ulepszona $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx (b-a)f(\frac{a+b}{2})$ daje: $\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, 0.75\frac{x^3}{3}, 0.5\frac{x^4}{4}, 0.31\frac{x^5}{5}$

Dla części liniowej *f*, wynik jest ścisły, ale człon kwadratowy, po scałkowaniu będący stopnia 3, odtwarzany jest tylko w 75%

Metoda R-K $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \approx \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$ daje: $\frac{x}{1}, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{3}, \frac{x^4}{4}, 1.04\frac{x^5}{5}$

Wyraźnie widać **porażającą skuteczność** metody. Dopiero piąta potęga w wyniku jest oceniana nieściśle, jest przeszacowana, ale i tak, tylko o 4%!