Wykład 9

Na poprzednim wykładzie zbadaliśmy sens równań ruchu. Są to równania różniczkowe. Pozwalają one wyznaczyć położenia (i prędkości) w dowolnym czasie przyszłym, jeśli znamy w jakiejś chwili (nazywanej „początkową”) wszystkie położenia i wszystkie prędkości. Skonstruowaliśmy jawny przepis na znajdowanie kolejnych położeń i prędkości (traktowanych dla wygody jako „współrzędne” jednego wektora $y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ w którym połowa y–ków to zwykłe położenia, a druga połowa to prędkości[1]) oparty na tym, że znamy pochodne wszystkich składowych *y* po czasie wyrażone przez samo *y*: $\dot{y} = f(y)$. Pochodne składowych, które są położeniami, to są te inne y-ki, te, które są prędkościami, pochodne tych składowych, które są prędkościami, czyli przyspieszenia są **właśnie** tą kwintesencją równań ruchu, które opisują konkretny przykład, konkretne oddziaływania. Ważne, by nie zależały one od niczego innego niż *y*. A więc zależność *siły* ograniczona być musi do zależności od wszystkich położeń i prędkości, oraz, ewentualnie, od czasu (y_0).

Metoda krok po kroku (w którejkolwiek wersji – prymitywnej, ulepszonej, czy wyrafinowanej[2]) działa **niezależnie** od postaci analitycznej sił. Jest równie łatwa dla oscylatora harmonicznego, co i anharmonicznego. Równie łatwa dla siły oporu liniowego, czy opisanego dowolna potęga prędkości, czy funkcja przestępną.

Metoda numeryczna, przy wszystkich zaletach, ma jedną wadę. Nawet po wprowadzeniu tak dużej, jak to możliwe, liczby wielkości bezwymiarowych, rozwiązanie można skonstruować tylko dla konkretnych wartości bezwymiarowych. Chcąc **przedyskutować** różne zachowania ruchu w danym problemie, w zależności i od warunków początkowych i od wartości różnych współczynników, trzeba porównywać wiele tabel, czy wiele wykresów.

Dlatego, gdy tylko istnieje możliwość **analitycznego** rozwiązania, tj. rozwiązania „na literach” reprezentujących i wartości początkowe i parametry układu, takie jak masy, ładunki, współczynniki oporu, czy współczynniki sprężystości, to jesteśmy bardzo szczęśliwi!

Takie „rozwiązywalne” problemy są klejnotami, które powinniśmy kolekcjonować, które powinniśmy poznawać, którymi powinniśmy umieć się cieszyć.

[1] Gdy siły zależą **jawnie** od czasu, wprowadzamy jeszcze $y_0 = t$.
[2] Metody prymitywnej stosować nie warto, chyba, nigdy. Metoda wyrafinowana wymaga znacznie mniejszej liczby kroków od metody ulepszonej, dla uzyskania żądanej dokładności, ale samego wpisywania operacji w programie, jest nieco więcej. Wybór jest kwestią gustu, potrzeb, możliwości numerycznych i oprogramowania jakim dysponujemy.

Domyślają się **wszyscy**, że oscylator harmoniczny, a więc układ opisany równaniem: $\ddot{x} = -\omega^2 x$, należy do takich właśnie klejnotów! Po wprowadzeniu czasu zredukowanego" $\tilde{t} = t/\omega$ i "prędkości zredukowanej" $\tilde{v} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tilde{t}$, równanie ruchu przyjmuje postać:

$$\mathrm{d}x = \tilde{v}\mathrm{d}\tilde{t}$$
$$\mathrm{d}\tilde{v} = -x\mathrm{d}\tilde{t}$$

W tej właśnie postaci rozwiązaliśmy równania numerycznie (przy warunku początkowym $\tilde{v}(0) = 1, x(0) = 0$) uzyskując dla położeń funkcję przypominającą znany z geometrii sinus i dla prędkości zredukowanej funkcję przypominającą cosinus.

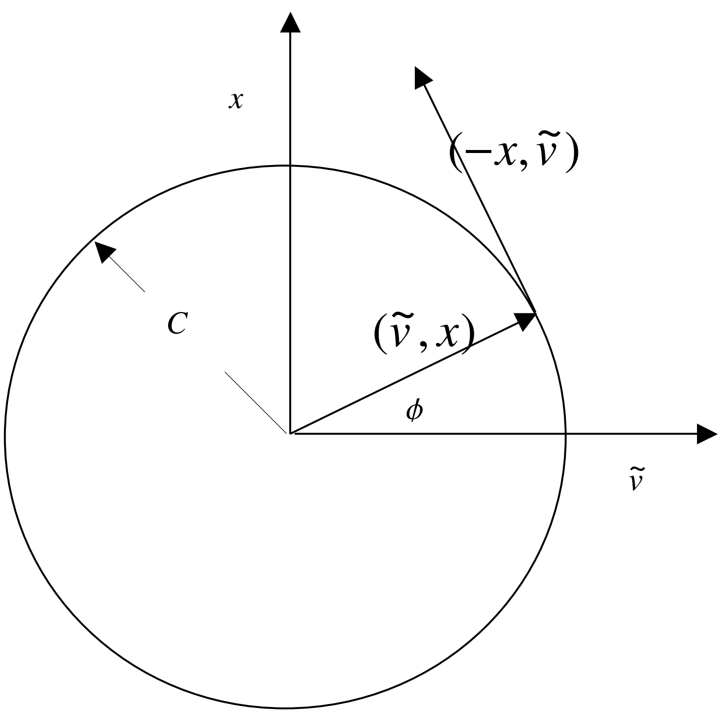
Uzyskane numerycznie funkcje są okresowe, zmieniające się w przedziale od –1 do +1, mają okres 2*3,14159....

Podejdźmy teraz **analitycznie** do naszego oscylatora. Upewnimy się, że nasze funkcje są tymi dobrze znanymi z geometrii funkcjami trygonometrycznymi.

Jak pamiętamy, przyrost sumy kwadratów w ścisłym rozwiązaniu, jest wykluczony:

$$\mathrm{d}(x^2 + \tilde{v}^2) = 2x\mathrm{d}x + 2\tilde{v}\mathrm{d}\tilde{v} = (2x\tilde{v} - 2\tilde{v}x)\mathrm{d}\tilde{t} = 0$$
$$x^2 + \tilde{v}^2 = C^2 = {x_0}^2 + {\tilde{v}_0}^2$$

a sama wartość tej sumy wyznaczona jest przez warunek początkowy. Na płaszczyźnie fazowej $(\tilde{v}, x)$ pozostajemy w czasie ruchu na **okręgu** o promieniu C. Trzeba teraz określić jak się ten punkt przemieszcza wraz z upływem czasu. To łatwe.



Wektor :
$(\mathrm{d}\tilde{v}/\mathrm{d}\tilde{t}, \mathrm{d}x/\mathrm{d}\tilde{t}) = (-x, \tilde{v})$
i wektor :
$(\tilde{v}, x)$
maja rowne dlugosci i sa ortogonalne

Prędkość przemieszczania się „punktu” o wektorze wodzącym: $(\tilde{v}, x)$ na płaszczyźnie fazowej $(\mathrm{d}\tilde{v} / \mathrm{d}\tilde{t}, \mathrm{d}x / \mathrm{d}\tilde{t}) = (-x, \tilde{v})$ jest **prostopadła** do tego wektora wodzącego. To oznacza, oczywiście, że punkt **musi** pozostawać na okręgu, o środku w początku układu. To już jest rezultat nam znany. Ale nasz wynik oznacza jeszcze coś więcej. **Szybkość** (względem czasu zredukowanego) przemieszczenia się po tym okręgu jest stała i równa wartości **promienia** *C*. W czasie $\tilde{t}$ przebyta po obwodzie droga jest iloczynem promienia i czasu (zredukowanego).

Zatem kąt ϕ na rysunku (w mierze łukowej) jest **tożsamy** z czasem zredukowanym $\tilde{t}$, gdy czas zaczynamy liczyć tej od **fazy** ruchu, w której x=0, a prędkość jest maksymalna, albo

$\phi = \tilde{t} + \phi_0 = \phi_0 + \omega t$, w przypadku ogólnym

Korzystając z trygonometrycznej definicji funkcji sinus i cosinus, widzimy, iż:

$$x = C \sin(\omega t + \phi_0)$$
$$v = \omega\tilde{v} = \omega C \cos(\omega t + \phi_0)$$

Na podstawie znanych wzorów na funkcje trygonometryczne sumy kątów mamy:

$$x = C \sin(\omega t + \phi_0) = C \sin(\phi_0)\cos(\omega t) + C\cos(\phi_0)\sin(\omega t)$$
$$v = \omega\tilde{v} = \omega C \cos(\omega t + \phi_0) = \omega C\cos(\phi_0)\cos(\omega t) - \omega C\sin(\phi_0)\sin(\omega t)$$

Dwie dowolne stałe: amplitudę i fazę możemy, jeśli tak nam wygodniej, zastąpić początkowymi wartościami położenia i prędkości:

$$x = C \sin(\phi_0)\cos(\omega t) + C\cos(\phi_0)\sin(\omega t) \quad = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)$$
$$v = \omega C\cos(\phi_0)\cos(\omega t) - \omega C\sin(\phi_0)\sin(\omega t) = v_0\cos(\omega t) - \omega x_0 \sin(\omega t)$$

Jest to kompletne rozwiązanie problemu ruchu oscylatora.

Powstaje pytanie, czy wobec istnienia, i to tak stosunkowo prostego, rozwiązania analitycznego, warto było zajmować się rozwiązaniem numerycznym? No cóż. To kwestia gustu. W powyższym podejściu wzoruję się na Feynmanie. Jest szereg zalet uświadomienia sobie jak „pracują” równania ruchu. Jedną z korzyści było niemal natychmiastowe, bez żadnego wysiłku, przejście od oscylatora harmonicznego, do anharmonicznego.

Inna sprawa to same funkcje sinus i cosinus. Wydaje nam się, że wiemy, czemu one są równe. Ale tak naprawdę, z trygonometrii to my **tylko widzimy** na rysunku, jaki jest ich sens, ale policzyć to sobie je możemy dla 30, 45, czy 60 stopni i paru innych podobnych.

Właśnie ostatnio mój wnuk mnie dopytuje, bo go to niepokoi: no co to jest ten sinus dla byle jakiego kąta?

Oczywiście, w przeszłości, mądrzy ludzie ułożyli tablice - dzisiaj, w byle kalkulatorku odczytamy wartość sinusa, dajmy na to 1 radiana. A my sobie **sami** policzyliśmy! Zaglądamy do tabeli na stronie 7 wykładu 8 z krokiem 0,01 i w rubryce E102 mamy (wyliczoną za pomocą operacji czysto arytmetycznych) wartość 0,8415. Tyle samo, co wszędzie!

W wyniku na ruch oscylatora zawarte są też ważne wyniki na pochodne tych funkcji. Po prostu widzimy, że pochodną sinusa jest cosinus, a cosinusa **minus** sinus. No, bo pochodną położenia jest prędkość, a pochodną prędkości przyspieszenie, równe położeniu ze znakiem „minus". Dwukrotne różniczkowanie każdej z tych funkcji (a także ich dowolnej kombinacji liniowej) daje z powrotem tę sama funkcję, ale z minusem.

Zbiór własności

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} f(\varphi) = -f;$$

$$f(0) = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} f(\varphi)\right|_{\varphi=0} = 1$$

definiuje **jednoznacznie** funkcję f. Ta funkcja występuje w naszej kolumnie E arkusza kalkulacyjnego z poprzedniego wykładu. Ta funkcja nazywa się sinus. Ta sama funkcja pozwala związać współrzędną punktu na okręgu z długością odpowiedniego łuku.

Funkcje trygonometryczne grają tak wybitna rolę w fizyce, że warto, już teraz, pokazać jeszcze jedną ich własność.

Nie jest trudno uzyskać szereg potęgowy dla sinusa i cosinusa. Punktem wyjścia niech będzie szereg dla funkcji wykładniczej: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ Można go uzyskać wprost z definicji liczby e i wzoru na dwumian Newtona[3].

Z rozwinięcia tego wynika podstawowa własność funkcji wykładniczej, mianowicie to, iż jej pochodna równa się samej funkcji. **To widać**. Każdy człon zróżniczkowany ma mniejszą potęgę, a wykładnik n „zjeżdżający" do licznika, skraca się z ostatnim czynnikiem n!

[3] Oto prosty rachunek, trochę brawurowy jak na gusty matematyków, ale dla fizyków OK.

$$e^x \approx \left((1+1/n)^n\right)^x = (1+x/nx)^{nx} = (1+x/m)^m = 1 + m\frac{x}{m} + \frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{x}{m}\right)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!}\frac{m(m-1)}{m\,m}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{m(m-1)(m-2)}{m\,m\,m}x^3 + \cdots \to 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

„silni" w mianowniku. Tym samym każdy wyraz rozwinięcia samej funkcji, pojawia się ponownie w szeregu jej pochodnej, tyle, że człon z potęgą 0 pochodzi z członu z potęgą 1, człon z potęgą 1 pochodzi z członu z potęgą 2, człon z potęgą 2 pochodzi z członu z potęgą 34 itd.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$$

Gdy z szeregu potęgowego funkcji wykładniczej zostawimy sobie same potęgi parzyste (albo same nieparzyste) dopiero **dwukrotne** różniczkowanie daje znów funkcję wyjściową. Nazywają się te funkcje: sinus hiperboliczny i cosinus hiperboliczny:

$$\sinh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

Mamy szereg oczywistych relacji:

cosh'(x)=sinh(x)

sinh'(x)=cosh(x)

sinh(x)+cosh(x)=e^x ;   cosh(x)- sinh(x)=e^{-x} ;   sinh(x)=(e^x- e^{-x})/2;   cosh(x)=(e^x+ e^{-x})/2;

Jesteśmy blisko! Potrzeba nam tylko znaku minus przy przeprowadzaniu jednej z funkcji w drugą. Osiąga się to, zamieniając szeregi dla funkcji hiperbolicznych, na szeregi naprzemienne.

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Przy dwukrotnym różniczkowaniu każdy człon reprodukuje (prawie) ten wcześniejszy, tyle, że każdy wcześniejszy (sąsiedni) ma przeciwny znak!

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$$

Elegancki wzór dostaje się korzystając z liczb zespolonych. Ponieważ

$i^2 = -1;\quad i^3 = -i;\quad i^4 = 1$, więc, widać co się dzieje, po wstawieniu ix do szeregu potęgowego dla podstawowej funkcji wykładniczej.

Wyrazy o potęgach podzielnych przez 4 nie zmieniają się, a te pozostałe parzyste zmieniają znak. Grupują się w szereg dla cosinusa.

Wyrazy o n=4k+1 dostają mnożnik i, a te postaci 4K+3 dostają mnożnik $-i$. Po wyłączeniu i, dostajemy szereg dla sinusa:

Słynny wzór Eulera:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x),$$

jest jednym z najpiękniejszych wzorów matematyki

Zapisany dla $x = \pi$ brzmi:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

i zawiera 5 najważniejszych liczb: $0, 1, i, e, \pi$!

Jest też oczywiście:

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \qquad \cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Przydatność liczb zespolonych zilustrujemy zbadaniem ruchu oscylatora z siłą tłumienia proporcjonalną do prędkości:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}$$

Stosunek k/m dla oscylatora nietłumionego oznaczaliśmy literą ω. Jak się niebawem przekonamy, tłumienie spowoduje, że ruch nie będzie już okresowy (w zwykłym sensie), a jeśli pojawi się (dla dostatecznie słabego tłumienia) coś analogicznego do częstości, będzie to wielkość różna od k/m. Dlatego zmieniamy oznaczenie:

$k/m \equiv \omega_0{}^2$

Wygodnie jest też oznaczyć $\alpha/m = 2\beta$ i zapisać równanie ruchu w postaci:

$\ddot{x} = -\omega_0{}^2 x - 2\beta\dot{x}$

Przystępując do poszukiwania rozwiązania analitycznego takiego równania, powinniśmy uświadomić sobie kilka spraw.

- Po pierwsze. Wiemy, iż podanie położenia początkowego x_0 i prędkości początkowej v_0 dla wybranego czasu (przyjmijmy, że gdy nie ma wyraźnego powodu, jako czas początkowy wybierać będziemy t=0) jest i konieczne i wystarczające dla wyznaczenia ruchu. Gdybyśmy, więc, znaleźli funkcję czasu zawierającą **dwie dowolne** stałe: C_1 i C_2, funkcję spełniająca nasze równanie ruchu, dla dowolnego zestawu stałych C_1 i C_2, to, dobierając te dwie stałe, moglibyśmy nadać wartościom położenia i prędkości w chwili początkowej, pożądane wartości.

Rozwiązanie z potrzebną liczbą dowolnych stałych nazywa się **rozwiązaniem ogólnym**.

- Po drugie. Nasze równanie jest **liniowe jednorodne**. Poszukiwana funkcja i jej pochodne występują tylko i wyłącznie **w pierwszej potędze**, nie ma także iloczynów, np. $x\dot{x}$. Jest to istotne ułatwienie. Liniowość oznacza, że gdy jakieś szczególne $x_{szcz}(t)$ jest rozwiązaniem, to wielokrotność tego rozwiązania $C\, x_{szcz}(t)$ jest **też** rozwiązaniem tego samego równania ruchu. A także, gdy są **dwa** rozwiązania szczególne, to ich **kombinacja liniowa:**

  $C_1\, x_{szcz1}(t) + C_2\, x_{szcz2}(t)$

  jest też rozwiązaniem. To **fantastyczne ułatwienie.** Jeśli znaleźć na tej, czy innej drodze, odgadnąć, **dwa szczególne rozwiązania równania liniowego** (równania drugiego rzędu dla jednego położenia), to tym samym, już się ma rozwiązanie ogólne.
- Po trzecie, funkcja **wykładnicza**, cudowna funkcja wykładnicza, po zróżniczkowaniu **pozostaje sobą**, mnożąc się jedynie przez współczynnik: $\mathrm{d}e^{rt}/\mathrm{d}t = re^{rt}$. Druga pochodna pomnoży się przez r^2, a sama funkcja pozostanie sobą. Ostatecznie funkcja wykładnicza pozostanie w pierwszej potędze we wszystkich członach równania i można to równanie przez nią **podzielić**. Zniknie czas z tego równaia, a na to by było ono spełnione, spełnione być musi równanie **algebraiczne jakie się z tego narodziło.**

Przystępujemy do zgadywania. Zgadujemy, że powinno istnieć rozwiązanie **wykładnicze** z jakąś wartością r. By się o tym przekonać wstawiamy funkcję e^{rt} zamiast x do równania ruchu. Dostajemy:

$$r^2 e^{rt} = -\omega_0{}^2 e^{rt} - 2\beta r e^{rt}, \text{czyli, po podzieleniu przez } e^{rt}:$$
$$r^2 + 2\beta r + \omega_0{}^2 = 0$$

Jako *bonus* potraktujmy fakt, iż równanie na r jest **kwadratowe.** Poza pewnym złośliwym przypadkiem, daje nam to nie tylko jedno, ale **dwa** rozwiązania, które po pomnożeniu przez dwie dowolne, różne stałe i zsumowane produkują nam rozwiązanie ogólne!

Każdy z Was dobrze wie, że równanie kwadratowe może nie mieć żadnego rozwiązania! Czy będziemy z tego powodu płakać??? W żadnym wypadku!!!! Owo „żadnego rozwiązania" dotyczy liczb rzeczywistych. Dołączając użyteczny twór, jakim jest i, jakie że $i^2 = -1$, przetwarzający funkcje wykładniczą (szereg o stałych znakach) w funkcje trygonometryczne, powodujemy, że rozwiązanie postaci $a + ib$ **musi** istnieć dla każdego równania kwadratowego (czy to o współczynnikach rzeczywistych, czy zespolonych). Czasami rozwiązanie jest tylko jedno, gdy równanie jest postaci $(x-a-ib)^2=0$, ale na ogół są dwa, tyle, że czasmi oba sa zespolone.

Mamy równanie kwadratowe, więc *avanti*.

$$r^2+2\beta r+\omega_0{}^2=0,$$
$$r_{1,2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2}$$

Jest jasne, że przypadek tłumienia tak silnego, że $\beta>\omega_0$ (czyli $\alpha>2\sqrt{km}$) jest zdecydowanie niepodobny do przypadku przeciwnego. W tym pierwszym, rozwiązaniem ogólnym jest

$$e^{-\beta t}(C_1e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2}t}+C_2e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2}t}).$$

Przy równaniach liniowych, kombinacje rozwiązań szczególnych też są rozwiązaniami szczególnymi, w szczególności połowa sumy i połowa różnicy. Zatem

$$e^{-\beta t}(D_1\cosh\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2}t+D_2\sinh\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2}t)$$

jest inną postacią rozwiązania ogólnego. Ta druga postać jest wygodna do wstawienia warunków początkowych: $D_1=x_0, D_2-\beta D_1=v_0$

A postać pierwsza jest dogodna do oceny tempa zbliżania się oscylatora do położenia równowagi. Dla dużych czasów, człon z większym (co do wartości bezwzględnej wykładnikiem) jest pomijalny w stosunku do tego drugiego i to ten drugi „rządzi" zachowaniem asymptotycznym: $x\propto\exp\left(-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2})\right)$.

Problem tłumienia drgań jest niezwykle ważnym praktycznie zagadnieniem! Czasami chcemy mieć drgania możliwie słabo tłumione. Czasami jednak, takie słabo tłumione drgania są niewygodne. Ot, choćby w amortyzatorach. Ale i w czystych badaniach naukowych, wiele przyrządów pomiarowych, zawiera części ruchome, których położenie ustala się w wyniku równowagi. Np. waga. Gdyby kołysanie się szalek wagi nie było tłumione, nie doczekalibyśmy się nigdy na możliwość odczytu. W takich wypadkach wprowadza się tłumienie „kontrolowane". Czy bowiem prawdą jest, że im tłumienie silniejsze, tym lepiej? Absolutnie nie. Gdy β dąży do nieskończoności, współczynnik przy czasie będący odwrotnością czasu osiągania równowagi

$$(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2})=\omega_0{}^2/(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0{}^2})\approx\omega_0{}^2/2\beta$$

dąży do zera, a czas $\tau=2\beta/\omega_0{}^2$ (po którym wartość wychylenia spada o czynnik e)

dąży do nieskończoności.

Z tego punktu, opłaca się tłumienie zmniejszać. Ale co się dzieje, gdy przekroczymy wartość ω ?

No właśnie!!! Teraz pojawiają się, całkowicie naturalnie, **liczby zespolone.** A liczby zespolone w wykładniku, to funkcje trygonometryczne! Zaczynają się drgania!

Wygodnie jest, jak to już robiliśmy, (ale teraz po dwakroć wygodnie) wybrać jako rozwiązania szczególne: połowę sumy i połowę różnicy dzielonej dodatkowo przez *i*. Czyli sinus i cosinus:

$$x(t) = e^{-\beta t}(D_1 \cos\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + D_2 \sin\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t)$$

Skorzystaliśmy z tego, że $\pm\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

Wartość położenia jest iloczynem funkcji opisującej poczciwe drgania harmoniczne, choć **o mniejszej częstości:**

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

przez monotonicznie malejący czynnik wykładniczy $e^{-\beta t}$.

W szczególności, drgania zaczynające się (w chwili t=0) w położeniu 0, z prędkością v_0, opisane są równaniem: $x(t) = \dfrac{v_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} e^{-\beta t} \sin\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t$.

Jeszcze jedną rzecz należy teraz rozwinąć. Mianowicie ruch pod wpływem zewnętrznej, oscylującej znanej siły, o dowolnej częstotliwości – równej, albo różnej od częstotliwości własnej oscylatora.

$$x + \omega_0^2 x + 2\beta\dot{x} = h\cos(\omega t)$$

Stała h jest amplitudą zmiennej siły[4] $F(t) = mh\cos(\omega t)$ podzieloną przez m.

Mamy teraz równanie – nadal liniowe – ale niejednorodne. I teraz, znalezienie rozwiązania ogólnego nie przedstawia trudności.

Wystarczy zaobserwować, że znajomość, chociaż jednego rozwiązania szczególnego całego równania, pozwala sprowadzić problem do rozwiązywania znów równania jednorodnego!

[4] W przypadku innych oscylatorów niż punkt materialny, np. w przypadku drgającego obwodu elektrycznego z kondensatorem, cewką indukcyjną i opornikiem, prawa strona reprezentować będzie (z odpowiednim współczynnikiem) zmienne napięcie przyłożone do obwodu, np. napięcie sieci o częstotliwości 50Hz, albo napięcie z anteny odbiorczej, etc.

Istotnie. Niech x_{szcz} spelnia : $\ddot{x}_{szcz} + 2\beta\dot{x}_{szcz} + \omega_0{}^2 x_{szcz} = h\cos\omega t$

Dokonajmy podstawienia $x = x_{szcz} + y$, i znajdźmy równanie na *y*.

$$(\ddot{x}_{szcz} + \ddot{y}) + 2\beta(\dot{x}_{szcz} + \dot{y}) + \omega_0{}^2(x_{szcz} + y) = h\cos\omega t$$

Człony z rozwiązaniem szczególnym redukują się z członem po prawej, człony z *y* spełniają więc równanie:

$$\ddot{y} + 2\beta\dot{y} + \omega_0{}^2 y = 0,$$

którego rozwiązanie ogólne właśnie znaleźliśmy.

Rozwiązanie szczególne trzeba znów „zgadywać". Odkładając na potem przypadek ogólny zbadajmy na razie oscylator nietłumiony. W takim wypadku widać, że szanse na spełnienie równania istnieje, gdy uda się dobrać amplitudę drgań z częstością wymuszającą: $x_{szcz} = A\cos\omega t$

Wstawiając do równania (bez tłumienia)

$\ddot{x}_{szcz} + \omega_0{}^2 x_{szcz} = h\cos\omega t$ dostajemy:

$-\omega^2 A\cos\omega t + \omega_0{}^2\cos\omega t = h\cos\omega t$, czyli:

$$(\omega_0{}^2 - \omega^2)A = h$$

Amplitudy rozwiązania szczególnego *A* nie da się dobrać, gdy częstość wymuszająca pokrywa się z częstością własną. W pozostałych przypadkach

$$A = \frac{h}{\omega_0{}^2 - \omega^2}$$

Rozwiązanie ogólne pełnego równania jest:

$$x = \frac{h}{\omega_0{}^2 - \omega^2}\cos\omega t + C_1\cos\omega_0 t + C_2\sin\omega_0 t$$

Dziwne rzeczy dzieją się dla częstości wymuszającej bliskiej, a tym bardziej równej, częstości własnej oscylatora. Zero pojawia się w mianowniku, sugerując natychmiastową katastrofę. Z drugiej strony, gdy zaczynamy kołysać oscylator z częstością rezonansową, stosując jakąś skończoną siłę, położenie oscylatora, nie może **nagle** stać się nieskończone, co zdaje się sugerować wzór na rozwiązanie ogólne.

Rozwiązanie paradoksu polega na wprowadzeniu do ogólnego wzoru, zamiast wygodnych, lecz nie mających bezpośredniej interpretacji stałych C_1 i C_2, danych początkowych x_0 i v_0.

$$x_0 = \frac{h}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2} + C_1$$

$$v_0 = -\omega_0 C_2$$

$$x = h\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega_0^{\ 2} - \omega^2} + x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Gdy częstości stają się bliskie i w mianowniku pojawia się mała wielkość, w liczniku **też występuje** mała wielkość, różnica cosinusów od bliskich argumentów.

Rozkładając mianownik na iloczyn, możemy pierwszy człon przekształcić do postaci:

$$x = -\frac{ht}{\omega_0 + \omega}\frac{\cos\omega t - \cos\omega_0 t}{\omega t - \omega_0 t} + x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Gdy $\omega t \to \omega_0 t$, drugi iloraz pokrywa się z **definicją** pochodnej funkcji cosinus! A ta jest sinusem.

Mamy, więc, dla dokładnego rezonansu:

$$x = \frac{ht}{\omega_0 + \omega_0}\sin\omega_0 t + x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

Wynik całkowicie skończony!

Jeśli występuje tłumienie, pojedynczy człon z cosinusem nie może spełnić równania, bo człon z pochodną stanie się sinusem. Należy więc szukać rozwiązania w postaci kombinacji sinusa i cosinusa z dwiema niewiadomymi amplitudami. Wszelkie operacje (jedno różniczkowanie, czy dwa) w równaniu prowadzą tylko do członów z sinusem i cosinusem, spełnienie równania sprowadzi się do porównania współczynników – z osobna przy sinusie i cosinusie. Ale mamy dwie niewiadome, więc procedura musi doprowadzic do sukcesu. Zajmiecie się tym na ćwiczeniach.