Wykład 10

Badając ciągłą wymianę pędu ciała z otoczeniem, rozważaliśmy sytuacje fizyczne, w których oddziaływania miały charakter kontaktowy. Mogą one prowadzić zarówno do siły zależnej od prędkości, jak w przypadku oporu, czy do siły zależnej od położenia, jak w przypadku siły sprężystości, ale w obu przypadkach pęd ciała przekazywany jest do (lub od) drobin ośrodka w akcie zderzeń cząstek otoczenia z badanym ciałem. Jest to oczywiste w przypadku oporu płynu, i sprężystości gazu, trochę mniej w przypadku sprężystości ciała stałego. Charakter zależności obu tych rodzajów sił nie ma w sobie nic fundamentalnego. W wyidealizowanych, granicznych, przypadkach można teoretycznie ustanowić proste zależności. W przypadkach realistycznych, trzeba odwoływać się do doświadczenia, np. w tunelu aerodynamicznym, by ustalić faktyczna zależność siły od prędkości dla danego kształtu ciała.

Wrażenie uniwersalności sprawia siła sprężysta, podlegająca słynnemu prawu Hooke'a, ale to tylko pozory. Jak o tym mówiłem, każdą niemal zależność siły od położenia w otoczeniu punktu w którym ta siła, malejąc, przechodzi przez zero, można na **małym** kawałku przybliżyć zależnością liniową. Współczynnik proporcjonalności dla różnych ciał znajdujemy z pomiaru, jest, więc i prawo Hooke'a, prawem czysto fenomenologicznym.

Istnieje jeszcze jeden rodzaj siły, bardzo podobny do siły oporu dla ciała poruszającego się w gazie lub cieczy, znane wam dobrze tarcie. Nie da się o tarciu powiedzieć wiele więcej ciekawych rzeczy niż znacie ze szkoły. Pozwolę sobie zacytować kilka zdań z podręcznika Feynmana:

„W każdym razie prawa tarcia należą do tych półempirycznych praw, które nie całkiem rozumiemy, i należy się dziwić, że nie osiągnięto w tej dziedzinie lepszego zrozumienia zjawiska mimo ogromnego wkładu pracy. Dotychczas nie umiemy nawet oszacować teoretycznie współczynnika tarcia między dwiema substancjami".

Owa półempiryczna wiedza dla tarcia poślizgowego, sprowadza się do stwierdzenia, że dla danych powierzchni trących, siła tarcia jest proporcjonalna (w przybliżeniu) do nacisku:

$T = \mu N$,

a współczynnik proporcjonalności μ jest (znów w przybliżeniu) niezależny od szybkości ślizgania. Kierunek siły tarcia jest przeciwny do kierunku prędkości ślizgania.

Sama wartość współczynnika jest bardzo czuła na stan powierzchni trących; nawet śladowe zanieczyszczenia potrafią zmienić go radykalnie. Charakterystyczny jest opis zdefiniowania czegoś takiego jak współczynnik tarcia miedzi po miedzi. Oto słowa Feynmana:

„Wskazywaliśmy już, że próby zmierzenia μ *przez poślizg czystych substancji, np. miedzi po miedzi, prowadzą do* ***złudnych*** *wyników, ponieważ stykające się powierzchnie nie są czyste, gdyż zawierają tlenki i inne zanieczyszczenia. Każdy konkretny kawałek miedzi jest pod tym względem inny-różne dla różnych próbek będą zmierzone współczynniki tarcia. Jeśli jednak spróbujemy otrzymać powierzchnię z czystej miedzi, jeśli jak najlepiej oczyścimy i wypolerujemy powierzchnie, jeśli umieścimy oba przedmioty w próżni i podejmiemy wszelkie możliwe kroki ostrożności, również nie otrzymamy poprawnego* μ*.Okaże się, bowiem, przy przechylaniu naszego urządzenia, że klocek wcale nie zacznie się ślizgać; oba kawałki miedzi mocno przylgną do siebie!*

Trochę korzystniej, z teoretycznego punktu widzenia, ma się sprawa z tarciem statycznym. Tarcie to ma charakter siły reakcji, a jego wartość (póki powierzchnie pozostają rzeczywiście nieruchome) wyznaczona jest przez działające siły zewnętrzne. Gdy np. bezskutecznie usiłuję pchnąć ciężką szafę, to siła tarcia między szafą a podłogą ma dokładnie wartość siły, jaką ja wywieram na szafę. W tym wypadku trzeba tylko wiedzieć o istnieniu górnej granicy dla tej siły. Gdy siła zewnętrzna przekroczy tę granicę, oddziaływanie podłogi z nóżkami szafy nie jest w stanie wygenerować siły reakcji równoważącej siłę przyłożoną. Zaczyna się poślizg z przyspieszeniem wyznaczonym przez różnicę siły zewnętrznej i siły tarcia poślizgowego.

Siła graniczna dla tarcia statycznego jest (podobnie jak siła tarcia przy ślizganiu) proporcjonalna do nacisku, z współczynnikiem proporcjonalności zwanym współczynnikiem maksymalnego tarcia statycznego. Jest on na ogół nieco większy (dla danych powierzchni) od współczynnika tarcia poślizgowego. Różnicę tę często można w praktyce pominąć. Ułożono wiele ciekawych zadań z mechaniki z udziałem tarcia, w których należy przyjąć jedna wspólną wartość tego współczynnika.

Jak Państwo pamiętacie, podstawa pojęciowa dla czasu, położenia, masy, pędu i energii dostarczona być może w sposób satysfakcjonujący z zasady względności, czemu poświęciliśmy pierwsze pięć wykładów. Uzyskaliśmy tam wyrażenie na pęd ciała w postaci zawierającej prędkość światła: $\vec{p} = m\dfrac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, jednak przy badaniu ruchu z wymianą pędu w oddziaływaniach kontaktowych, ograniczyliśmy się do uproszczonej wersji $\vec{p} = m\vec{v}$.

Oddziaływania kontaktowe, o których mówimy, stosują się do ciał makroskopowych. Poza, może, gwiazdami neutronowymi, czy fragmentami zwykłych gwiazd podczas wybuchów supernowych, ciała makroskopowe mają prędkości względne tak niesłychanie małe w porównaniu z prędkością światła, że silenie się na „ścisłość" i pisanie relatywistycznej wersji równań ruchu byłoby śmieszne. Szczególnie wobec przybliżonego, fenomenologicznego charakteru praw dla zależności tych sił od położenia i/lub prędkości.

Są jednak w świecie makroskopowym **dwa** rodzaje oddziaływania, w pierwszym „oglądzie" sprawiające wrażenie oddziaływań na odległość. Są to oddziaływania grawitacyjne i elektromagnetyczne. Dzisiaj zajmiemy się tymi drugimi. Formuły dla siły, choć odkryte fenomenologicznie, podobnie jak prawo Hooke'a czy prawo tarcia[1], i to dla niewielkich prędkości, okazały się, w miarę upływu czasu, i mimo swej prostoty, ciągle dokładne. Także dla dużych prędkości.

Okazało się też, że oddziaływanie elektromagnetyczne (grawitacyjne zresztą też) tylko z pozoru są oddziaływaniem miedzy dwoma odległymi ciałami. W rzeczywistości, przestrzeń (czasoprzestrzeń) w obecności naładowanych ciał, czy choćby jednego takiego ciała, zmienia się. Mówimy, że wypełnia się polem (odpowiednio elektromagnetycznym, albo grawitacyjnym). W przypadku pola elektromagnetycznego pole to opisane jest dwoma wektorami: $\vec{E}$ i $\vec{B}$, na ogół różnymi w różnych punktach czasoprzestrzeni: $\vec{E}(t,\vec{r})$ i $\vec{B}(t,\vec{r})$. Sposób, w jaki pola $\vec{E}$ i $\vec{B}$ wyznaczone są przez (na ogół ruchome) ładunki stanowi treść przedmiotu zwanego elektrodynamiką. W elektrodynamice określa się ile wynosi pęd i energia pola, a także, jaka jest szybkość przekazu pędu od pola do naładowanej cząstki, która się w nim znajduje. Ogólny przypadek oddziaływań, nawet dla tylko dwóch ciał, jest skomplikowany, a wiąże się to z tym, że samo pole dopasowuje swoje wartości do zmiennych położeń ładunków z pewnym opóźnieniem i z własną dynamiką. O wiele prostsza, i mająca nadal duże znaczenie praktyczne jest sytuacja, w której masywne źródło pola, (np. elektromagnes akceleratora w CERN), wytwarza makroskopowe pole elektromagnetyczne (które znamy), do którego wprowadzamy pojedyncze cząstki elementarne. O sytuacji takiej mówimy, że badamy ruch cząstki w **zadanym** polu elektromagnetycznym.

Jakie jest równanie cząstki o masie *m*, ładunku *e* w zadanym polu elektromagnetycznym $\vec{E}(t,\vec{r})$ i $\vec{B}(t,\vec{r})$?

Mógłbym krótko powiedzieć: z elektrodynamiki wynika, a uczyć się tego będziecie później, że $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$.

---

[1] Prawo oddziaływań dwóch ładunków elektrycznych, z odwrotną zależnością siły od kwadratu odległości: $F = kQ_1Q_2 / r^2$, znane jest powszechnie jako prawo Coulomba. Ten sam Coulomb ustanowił też prawo tarcia: $T = \mu N$. Nazywane jest ono też prawem Coulomba (dla tarcia). Ich status pojęciowy w momencie powstawania był jednakowy.

Aby jednak uchylić rąbka tajemnicy, aby pokazać, że równanie to jest (a przynajmniej ma szansę być) słuszne dla **dowolnie dużej** prędkości cząstki, przedstawię w uproszczonej wersji, oryginalne rozumowanie Einsteina prowadzące do powyższego równania. Ponieważ uchylony ma być tylko „rąbek", więc zajmę się najprostszym możliwym przypadkiem ruchu jednowymiarowego cząstki wzdłuż jednorodnego pola elektrycznego.

Przyjmę założenie, że cząstka **bardzo powolna**, w polu elektrycznym E, zyskuje przyspieszenie $a = eE/m$. To jest właściwie definicja (natężenia) pola elektrycznego E. Zgodna z duchem mechaniki Newtona. A przy okazji też definicja ładunku elektrycznego. Z praw dotyczących pola elektromagnetycznego przyjmę tylko prawo Gaussa. No i dołączę do tego kinematykę Szczególnej Teorii Względności.

Na ćwiczeniach rozpatrywaliście Państwo ruch przyspieszony i związek przyspieszenia chwilowego a w układzie, w którym cząstka ma dowolną (także bliską c) prędkość chwilową v, a przyspieszeniem a' jaką ma ta cząstka w układzie inercjalnym o stałej prędkości równej **akurat** wartości prędkości chwilowej v. W tym „kowędrującym" układzie odniesienia, cząstka zaczyna ruch z prędkością 0 i w czasie dt' uzyskuje **niewielką, nierelatywistyczną** prędkość a'dt'. W układzie wyjściowym (możemy myśleć o nim jako układzie laboratoryjnym) prędkość wzrosła od v do wartości:

$$\frac{v + a'\mathrm{d}t'}{1 + \dfrac{v \cdot a'\mathrm{d}t'}{c^2}}.$$

Przyrost tej prędkości wynosi:

$$\mathrm{d}v = \frac{v + a'\mathrm{d}t'}{1 + \dfrac{v \cdot a'\mathrm{d}t'}{c^2}} - v = \frac{\cancel{v} + a'\mathrm{d}t' - \cancel{v} - v\dfrac{v \cdot a'\mathrm{d}t'}{c^2}}{1 + \cancel{\dfrac{v \cdot a'\mathrm{d}t'}{c^2}}} \approx (1 - \frac{v^2}{c^2})a'\mathrm{d}t'$$

Upływ czasu w układzie kowędrującym jest **mniejszy** (dla badanego segmentu linii świata) od upływu czasu w układzie LAB: $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ Związek przyrostu prędkości w LAB z przyrostem czasu w LAB jest: $\mathrm{d}v = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a'\mathrm{d}t = a\mathrm{d}t$.

Jeśli natężenie pola elektrycznego w układzie kowędrującym oznaczymy E', to przyspieszenie a' , dane jest wzorem $a' = eE'/m$. Daje nam to **relatywistyczne równanie ruchu**:

$$\mathrm{d}v = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \frac{eE'}{m}\mathrm{d}t$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć *E'*. Czy i jak zależy ono od prędkości układu kowędrującego? W ogólności jest to pytanie o prawa transformacyjne dla pól elektromagnetycznych. Obserwatorzy we względnym ruchu, mierząc **to samo fizyczne pole**, dostaną na ogół inne wyniki, ściśle ze sobą powiązane. Prostota wybranego przeze mnie przypadku polega na tym, że przy ruchu wzdłuż pola elektrycznego, pozostaje ono **takie samo** dla każdego obserwatora!

Można to zrozumieć zastanawiając się nad obserwatorem pędzącym z prędkością v prostopadle do okładek kondensatora płaskiego wytwarzającego pole *E*. Jak wiadomo, w układzie spoczywających okładek, jest ono dane przez $Q/S/\varepsilon_0$. Wynika to z prawa Gaussa. Dla obserwatora, w jego układzie, te okładki kondensatora pędzą! Pole powierzchni okładek, ustawionych poprzecznie do ruchu **nie zmienia** się. Jeśli prawo Gaussa dla pola elektrycznego ma nadal obowiązywać, pole *E'* musi mieć tę samą wartość $Q/S/\varepsilon_0$[2]! Zatem *E'* = *E* i

$$\frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = eE$$

Teraz wszystkie wielkości odnoszą się do jednego układu odniesienia, tego, w którym znamy pole i w którym badamy ruch.

Bardzo użyteczną rzeczą jest następująca tożsamość:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$$

wynikająca wprost z definicji pochodnej[3].

Pozwala ona zapisać równanie ruchu w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = eE$$

[2] Inna sytuacja byłaby przy ruchu obserwatora (albo cząstki) wzdłuż okładek (czyli prostopadle do pola). Wskutek skrócenia Lorentza zmalałaby powierzchnia okładek i o ten sam czynnik $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, wzrosło natężenie pola elektrycznego. Przy okazji pojawiło by się pole magnetyczne.

[3] Liczymy przyrost: $\mathrm{d}\left(v(1-v^2/c^2)^{-1/2}\right) = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\mathrm{d}v + v\mathrm{d}(1-v^2/c^2)^{-1/2} =$

$= (1-v^2/c^2)^{-1/2}\mathrm{d}v - \frac{1}{2}v(1-v^2/c^2)^{-3/2}\mathrm{d}(1-v^2/c^2) = (1-v^2/c^2)^{-1/2}\mathrm{d}v + v^2(1-v^2/c^2)^{-3/2}/c^2\mathrm{d}v = (1-v^2/c^2)^{-3/2}\mathrm{d}v$

Historycznie to właśnie powyższe równanie wyprowadzone w sposób, jaki przedstawiłem, podpowiedziało, że wielkość $\frac{mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$ jest właściwym uogólnieniem niutonowskiego pędu *mv*. Wiedziano już w tamtym czasie, jaki jest pęd pola elektromagnetycznego, i że szybkość jego zmian w czasie, w obecności cząstki naładowanej, jest równa *–eE*.

My jesteśmy w tej dogodnej sytuacji, że wiemy od początku, co jest pędem cząstki. Wyprowadzone równanie ruchu dostarcza nam informacji o tym, że wymiana pędu między polem a cząstką dana jest wzorem *eE* **dla każdej prędkości cząstki**. Uzyskaliśmy ten wynik z samego prawa Gaussa, bez znajomości wszystkich równań elektrodynamiki.

Teraz łatwiej powinno Wam będzie uwierzyć[4], że faktycznie, dla dowolnego kierunku i dowolnego pola, poprawne równanie ruchu w polu zewnętrznym jest:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{m\vec{v}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

Człon po prawej stronie równania nazywa się siłą Lorentza.

Równanie powyższe jest podstawą działania licznych urządzeń badawczych.

Jest rzeczą zadziwiającą, że, stosunkowo, drobna zmiana, wystarcza, by równania:

$$m\vec{a}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}),$$

znalezione w XIX wieku, jako jeden z przykładów równań Newtona, przekształcić w równania słuszne dla dowolnych prędkości. Godne uwagi jest też to, iż prawo Gaussa, odkryte zrazu dla statycznych ładunków elektrycznych, zachowuje swą ważność dla pola elektrycznego wytworzonego przez **zupełnie dowolny, dowolnie rozbiegany** układ źródeł pola elektromagnetycznego.

Niesłychana prostota tego uogólnienie może być doceniona dopiero wtedy, gdy się człowiek dowie, że – z pozoru podobne, a nawet może prostsze – równanie ruchu w polu zadanym polu grawitacyjnym:

$$m\vec{a}=m\vec{g}(r)$$

z przyspieszeniem danym analogicznym prawem Gaussa, np. dla kulistego źródła o masie *M*: $4\pi r^2 g(r)=4\pi GM$, wymaga dla szybkich cząstek i/lub silnych pól, **dramatycznej**

[4] Inny szczególny przypadek ruchu cząstki wzdłuż przewodu z prądem **rozważany już na ćwiczeniach** daje niemal natychmiast dowód poprawności równania ruchu dla prędkości prostopadłej do pola *B*. Pojawiają się inne potęgi pierwiastka przy liczeniu związku miedzy przyspieszeniami, ale wszystko składa się elegancko do właściwej postaci.

przebudowy całego aparatu pojęciowego. O ile nowoczesna elektrodynamika jest obowiązkowa nawet na studiach licencjackich, nowoczesna teoria grawitacji nie jest obowiązkowa nawet dla teoretyków na studiach doktoranckich! Oczywiście poza specjalizacją poświęconą właśnie teorii grawitacji i kosmologii.

Jak pamiętamy, zmiana energii kinetycznej wiąże się ze zmianą pędu wzorem: $\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{r}$. Gdy $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$ nazywamy siłą i znamy ją jako funkcje położenia, iloczyn $\vec{F}\mathrm{d}\vec{r}$ nazywamy tradycyjnie pracą tej siły. Dla siły Lorentza, część magnetyczna jest prostopadła do prędkości, więc zostaje tylko

$$\mathrm{d}T = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{r} = e\vec{E}\mathrm{d}\vec{r} = e\mathrm{d}(\text{-}U)$$

praca siły pola elektrycznego. Ten sam potencjał pola elektrycznego U, mierzony w woltach, o którym uczymy się w szkole, sądząc, że jest on adekwatny, być może, tylko dla mechaniki Newtona, wchodzi do prawa zachowania energii cząstki relatywistycznej.

Dlatego, mając na uwadze ruch cząstki bez prędkości początkowej, startującej z punktu x=0 w polu stałym E, mamy automatycznie:

$\sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} - mc^2 = -eEx$, gdyż dla pola jednorodnego $E\mathrm{d}x = \mathrm{d}(Ex)$

Równanie ruchu mówi nam, wprost, że pęd rośnie proporcjonalnie do czasu:

$$p = eEt$$

Eliminując pęd możemy dostać ruch, czyli położenie w funkcji czasu:

$$x = \sqrt{m^2c^4 / (e^2E^2) + c^2t^2} - mc^2 / eE$$

Na płaszczyźnie x,t jest to równanie hiperboli

$$((x + mc^2 / eE)^2 - c^2t^2 = (mc^2 / eE)^2$$

Równanie wyrażające prawo zachowania energii można też zapisać z użyciem prędkości:

$$mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - eU$$

gdzie U jest wyrażoną w woltach różnicą napięć, które rozpędza cząstkę (także wtedy, gdy pole nie jest jednorodne).

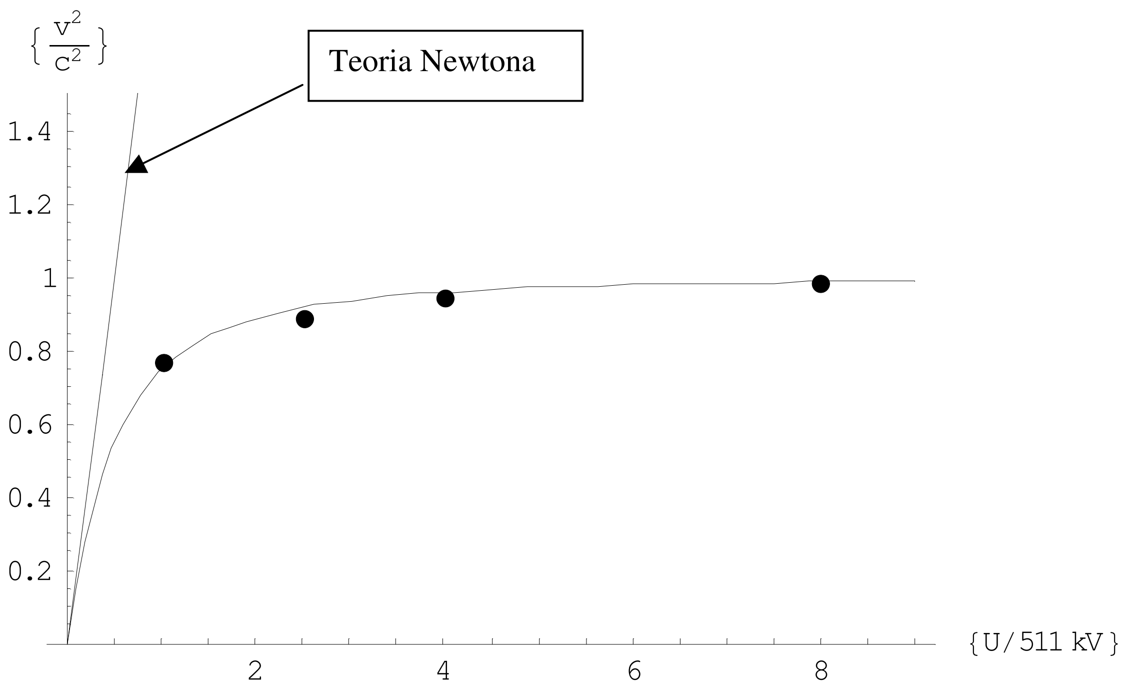
Równaniu temu łatwo jest nadać postać:

$$\frac{mv^2}{2} = eU\frac{1 + 0{,}5eU / mc^2}{\left(1 + eU / mc^2\right)^2}$$

Równanie to zastępuje równanie mechaniki klasycznej:

$$\frac{mv^2}{2} = eU$$

W wielu podręcznikach fizyki cytowane jest, wykonane dla celów dydaktycznych, doświadczenie w którym rozpędzano elektrony kontrolowaną różnicą potencjału, dochodząca do 4,5 milionów woltów, a potem mierzono ich prędkość bezpośrednio metodą czasu przelotu. Oto słynny wykres:



Linia prosta jest narysowana według teorii Newtona, linia krzywa według równania poprawnego. Wartość 511kV bierze się stąd, że $m_e c^2 / e = 511\mathrm{kV}$

Drugim ważnym przykładem niech będzie ruch cząstki naładowanej w stałym, jednorodnym polu magnetycznym.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{p} = e\vec{v}\times\vec{B}_0 = \frac{e}{\sqrt{m^2 + p^2/c^2}}\vec{p}\times\vec{B}_0$$

Prędkość zmiany wektora pędu jest w polu magnetycznym prostopadła do tego pędu. Oznacza to, zupełnie tak samo jak to miało miejsce przy ruchu punktu w przestrzeni fazowej oscylatora na poprzednim wykładzie, iż długość wektora pędu nie ulega przy tym zmianie!

Można to zresztą powiązać z zasadą zachowania energii. Gdy nie ma pola elektrycznego, energia potencjalna jest zerem, więc energia kinetyczna (a więc i pęd i prędkość) muszą pozostawać stałe.

Jeśli wprowadzić układ współrzędnych kartezjańskich z osią z wzdłuż kierunku indukcji, powstanie następujący układ trzech równań dla trzech składowych pędu:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_z = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_x = \frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} p_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p_y = -\frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} p_x$$

Z równań tych wynika, że współrzędna z będzie rosnąć proporcjonalnie do czasu, chyba, że w chwili początkowej, zetowa składowa pędu (a więc i prędkości) jest równa zeru. Wtedy współrzędna ta pozostanie stała. Ruch będzie się odbywał w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku indukcji.

Wprowadzając prędkość kątową $\omega = \frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}}$ i czas $\tilde{t} = \omega t$ możemy dwa kluczowe równania przepisać w postaci:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}} p_x = p_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tilde{t}} p_y = -p_x$$

To są dokładnie równania z poprzedniego wykładu! No, poza sensem fizycznym zmiennych. Ale to dla równań nie ma znaczenia!. Zaczynając liczyć czas od momentu, w którym pęd cząstki skierowany jest w kierunku osi y, musimy mieć:

$$p_x = p \sin \omega t$$

$$p_y = p \cos \omega t$$

Wyrażając prędkości przez składowe pędu:

$$v_x = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} \cos \omega t$$

możemy łatwo wyznaczyć położenie.

$$x = R_x - \frac{p}{\omega\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} \cos \omega t = R_x - \frac{p}{eB_0} \cos \omega t$$

$$y = R_y + \frac{p}{\omega\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}} \sin \omega t = R_y + \frac{p}{eB_0} \sin \omega t$$

Jest to ruch **po okręgu** o środku zależnym od warunków początkowych, ale o promieniu wynoszącym p/eB_0. Promień okręgu, po którym porusza się cząstka w stałym polu magnetycznym jest wprost proporcjonalny do jej pędu.

Częstość obiegu okręgu, tzw częstość cyklotronowa wynosi $\omega = \frac{eB_0}{\sqrt{m^2 + p^2 / c^2}}$. Można ją przepisać w dwóch innych równoważnych postaciach $\sqrt{1 - v^2 / c^2} eB / m$, albo $c^2 eB / E$, gdzie E (całkowita energia relatywistyczna).

Zależność częstości od energii cząstki, która nie występuje w obszarze nierelatywistycznym powoduje, że klasyczny cyklotron zupełnie nie nadawałby się do rozpędzania elektronów a rozpędzanie protonów, czy jąder atomowych, jest możliwe tylko do energii dość umiarkowanych. Szybko po jego skonstruowaniu został on tak zmodyfikowany, by pole magnetyczne nie było stałe i jednorodne, a i częstotliwość napięcia przyspieszającego też podlegać może modyfikacji. Urządzenia takie znane są pod nazwą synchrocyklotronów, fazotronów, synchrotronów, i być może jeszcze jakichś innych.

W przypadku dowolnego warunku początkowego, oprócz ruchu po okręgu w płaszczyźnie *x,y* cząstka równomiernie przemieszcza się wzdłuż kierunku pola. Jej tor jest linią śrubową. Nie będziemy tego tu analizować, ale gdy pole indukcji ma zmienną wartość, orbity cząstek owijając się wokół linii pola. Gdy ruch jest w kierunku wzrastającej wartości indukcji, prędkość wzdłuż lini spada, a prędkość wirowania wzrasta, zaś promień maleje. W odpowiednio dobranych warunkach, prędkość równoległa może spaść do zera, a cząstka zawróci – tak jakby odbiła się od zagęszczających się linii pola. Taki kształt nadaje się liniom pola w pułapkach magnetycznych. Pułapki takie istnieją w naturalnych warunkach wokół Ziemi.