Wykład 16

Jeszcze o geodezyjnych

Wrócę jeszcze do ruchu po zakrzywionej powierzchni, dla której

$\mathrm{d}l^2 = r^2\mathrm{d}\varphi^2 + g_{rr}\mathrm{d}r^2$.

Prawa zachowania momentu pędu (piszę je dla cząstki relatywistycznej):

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{J}{m/\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{a \cdot mv/\sqrt{1-v^2/c^2}}{m/\sqrt{1-v^2/c^2}} = av$$

i energii, sprowadzające się do stałości prędkości:

$$\sqrt{r^2\dot{\varphi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2} = v$$

dzieliliśmy, po podniesieniu do kwadratu, stronami (drugie przez pierwsze) i wykorzystując to, że $\dot{r}/\dot{\varphi} = r' \equiv \mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi$, dostaliśmy równanie geodezyjnej, nadające się już wprost do konkretnego rozwiązywania

$$\frac{1}{r^2} + \frac{g_{rr}}{r^4}r'^2 = \frac{1}{a^2}$$

Tym razem podzielę je stronami odwrotnie, bez podnoszenia do kwadratu, i skorzystam z tego, że: $\dot{\varphi}/\dot{r} = \varphi' \equiv \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r$ otrzymując:

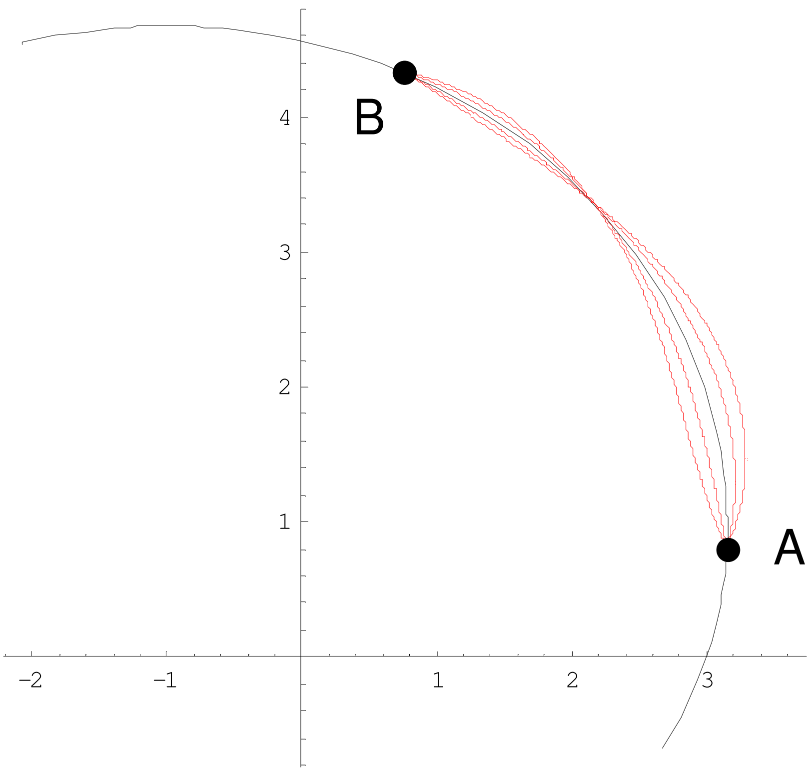
$$\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{r^2\varphi'^2 + g_{rr}}} = a$$

Jest to dokładnie to samo równanie, a nawet, chcąc rozwiązywać konkretne zadanie, dla konkretnego g_{rr}, i tak trzeba by je rozwikłać względem pochodnej φ' otrzymując stare, ale ta nowa postać jest **godna uwagi.**

Rozważmy **długość** odcinka geodezyjnej, będącej **rozwiązaniem** powyższego równania pomiędzy dwoma **ustalonymi punktami** A i B o współrzędnych r_A, φ_A i r_B, φ_B. Rozwiązanie takie da się znaleźć, gdyż w rozwiązaniu $\varphi = \varphi(r)$, oprócz dowolnej stałej *a*, już obecnej w uzyskanym równaniu różniczkowym pierwszego rzędu, wystąpi dodatkowa stała całkowania *C*, razem dwie. Będziemy mieć $\varphi = \varphi(r, a, C)$. Układając dwa równania:

$$\varphi_A = r(r_A, a, C) \text{ i } \varphi_B = r(r_B, a, C),$$

wyznaczymy stałe *a* i C, które **przestaną** być dowolne. Rzeczywiście punkty końcowe A i B na płaszczyźnie wytyczają geodezyjną. Mógłbym dobrać owe dwie stałe również do warunku, że geodezyjna startując w **jednym** punkcie, ma tam określony kierunek, czyli określoną wartość pochodnej $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r$. To drugie jest często praktyczniejsze.



Na rysunku są te dwa punkty, jest fragment stosownej geodezyjnej i kilka **alternatywnych** dróg, razem pięć, wiodących od A do B. Dokładniej mówiąc, owe pięć dróg odpowiada zależnościom $\varphi(r) = \varphi_{\text{geo}}(r) + \varepsilon\delta(r)$, dla ε = 1, 0.5, **0,** -0.5, -1, gdzie $\varphi_{\text{geo}}(r)$ **jest fragmentem geodezyjnej** (dla jakiejś metryki, której nie specyfikuję, bo rozważania są ogólne). Z kolei $\delta(r)$ jest **jakąś,** jedną z nieskończenie wielu możliwych, modyfikacją, (naukowo zwaną wariacją), naszej geodezyjnej. **Oczywistą** własnością $\delta(r)$, jeśli mamy porównywać długość odcinka geodezyjnej z długością alternatywnych dróg **od A do B**, jest jej **znikanie** w punktach A i B

$$\delta(r_A) = \delta(r_B) = 0$$

Nie jest trudno wyobrazić sobie alternatywne drogi **dla wszystkich** wartości ε pomiędzy –1, a +1. Oczywiście długość drogi staje się w tej sytuacji funkcją ε.

Cokolwiek wybralibyśmy na funkcję $\delta(r)$, wartość $\varepsilon = 0$, będzie odpowiadała akurat geodezyjnej (w naszym rozumieniu tego określenia, jako drogi wybieranej przez punkt materialny, nie doznający żadnej siły w płaszczyźnie stycznej)

$$l_{AB}(\varepsilon) = \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{r^2 \mathrm{d}\varphi^2 + g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2} = \int_{r_A}^{r_B} \sqrt{r^2(\varphi'_{\text{geo}}(r) + \varepsilon\delta'(r))^2 + g_{rr}(r)}\,\mathrm{d}r$$

Dla jakiej wartości ε droga jest najkrótsza?

To nie jest bardzo trudne pytanie! Warunkiem koniecznym jest, by **pochodna** po ε była zerem! Domyślamy się, że tak właśnie będzie dla ε=0. Jak niebawem zrozumiemy, fizyczną istotą geodezyjnej, jako toru dla cząstek (albo światła, wszak widzimy że cząstka ultrarelatywistyczna, porusza się na naszej powierzchni po **takim samym** torze jak i cząstka powolna), jest nie tyle jej „**najkrótszość”**, ale właśnie to, by zmiany długości, przy małych wariacjach, były proporcjonalne do wyższych potęg ε niż 1. A to właśnie pochodna mnoży pierwszą potęgę przyrostu funkcji:

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=\varepsilon f'(x)+O(\varepsilon^2)$$

W większości prostych sytuacji, dla geodezyjnej (czyli dla ε=0) mamy rzeczywiście minimum długości drogi, ale to akurat nie jest ważne.

Wypada policzyć (dla wartości $\varepsilon = 0$) tę pochodną:

$$\left.\frac{\mathrm{d}l_{AB}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_{r_A}^{r_B}\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}}\delta'(r)\mathrm{d}r=\int_{r_A}^{r_B}\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}}\mathrm{d}\delta(r)$$

Iloczyn pochodnej wariacji $\delta'(r)$ i przyrostu dr zastąpiłem przyrostem $\delta'(r)\mathrm{d}r=\mathrm{d}\delta(r)$.

Sztuczka z uzupełnianiem *a*d*b* o *b*d*a* do pełnego przyrostu d(*ab*), jest niezwykle użyteczna! Dopiero co, mieliśmy to przy Amperze, a i teraz warto uzupełnić. Przyrosty pełnego iloczynu $\mathrm{d}\left(\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}}\delta(r)\right)$ zsumują się nieuchronnie do **totalnego** przyrostu, czyli różnicy wartości tego **iloczynu** w punktach B i A. **Ale tam jeden z czynników** $\delta(r_A)=0=\delta(r_B)=0!$[1], więc i cały iloczyn jest tam **równy zeru**.

Ponieważ pod całką dodaliśmy *b*d*a*, co z istniejącym wyrażeniem dało ostatecznie, tj. po wysumowaniu, 0, musimy jeszcze tylko uwzględnić człon $-b\mathrm{d}a$, (bo „uzupełnianie” to przecież **dodanie i odjęcie** owego *b*d*a*). Zatem[2]:

$$\left.\frac{\mathrm{d}l_{AB}(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=-\int_{r_A}^{r_B}\delta(r)\mathrm{d}\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}}=-\int_{r_A}^{r_B}\delta(r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}}\mathrm{d}r$$

Ale popatrzmy na równanie **uzyskane z mechaniki**. Toż mówi ono dokładnie to, iż wyrażenie do zróżniczkowania:

$$\frac{r^2\varphi'_{\mathrm{geo}}(r)}{\sqrt{r^2(\varphi'_{\mathrm{geo}}(r))^2+g_{rr}(r)}},$$

jest **stałą.** A więc ”nasza” definicja geodezyjnej, jako toru fizycznej cząstki, **najprostszej linii,** pozwala udowodnić, że jest ona nie tylko minimalna pod względem krzywizny, ale i

[1] W przypadku Ampèra podobne znikanie wynikało z zamkniętości konturu z prądem.
[2] Jest to szczególny przypadek tzw. „całkowania przez części”.

minimalna (czy ogólniej **stacjonarna**) pod względem **długości**. I na odwrót[3]. Jeśli ktoś definiuje geodezyjną jako linię „najkrótszą", to powyższe rozumowanie dowodzi, że punkty materialne i światło (zmuszone pozostawać na powierzchniach z dowolną metryką) **właśnie będą poruszać się** po takich geodezyjnych.

Zapamiętajmy ten rachunek. Gdy w całce $\int_A^B F(y'(x),x)\mathrm{d}x$ nie występuje samo $y(x)$, a jedynie $y'(x)$, to zależność $y(x)$ minimalizująca tę całkę spełniać **musi** równanie $\dfrac{\partial F(y',x)}{\partial y'} = \text{constans}$

Jest to rewelacyjnie wygodny i skuteczny sposób dochodzenia do potrzebnych równań.

Natura zmiennych nie ma znaczenia. Może to być, jak przed chwilą, r jako zmienna niezależna i kąt $\varphi(r)$ jako zmienna zależna. Za chwilę, dla zbadania toru światła w gęstniejącym pionowo roztworze, zmienną niezależną będzie z, a zmienną zależną x. Trochę później taką zmienną niezależną będzie czas, a zmienną zależną którąś ze współrzędnych, a zaraz potem czas t stanie się zmienną zależną a jedna ze współrzędnych zmienną niezależną. „Wszystkie chwyty dozwolone". Byle funkcja podcałkowa nie zawierała[4] zmiennej wybranej na zależną, a jedynie jej pochodną.

Skupmy teraz uwagę na świetle. Gdy myślimy o nim, jako o fotonach (a więc skrajnie relatywistycznych cząstkach), zasady mechaniki pozwalają wyznaczyć tor, (co zrobiliśmy) w zakrzywionej płaszczyźnie, bez odwoływania się do własności ekstremalności drogi. Gdy jednak pomyślimy o **falach** w warunkach, gdy jest sens mówić o promieniach, a więc w granicy fal krótkich, nasuwa się natychmiast konstrukcja Huyghensa, w której falę, w każdym punkcie P, można uważać za sumę fal od wielu, powiedzmy N punktów P' wcześniejszego frontu (z różnymi, zależnymi od odległości fazami).

$$a(P) = \sum_{\text{wszystkich P'}} e^{i\phi(P,P')} a(P')$$

W każdym takim punkcie P', fala jest **też** sumą od wcześniejszego frontu, czyli od **wielu** punktów P', więc już mamy sumę podwójną:

$$a(P) = \sum_{\text{wszystkich P'}} e^{i\phi(P,P')} \sum_{\text{wszystkich P''}} e^{i\phi(P',P'')} a(P'') = \sum_{\text{wszystkich P' i P''}} e^{i(\phi(P,P')+\phi(P',P''))} a(P''),$$

[3] Jeśli żądamy, by krzywa opisana funkcją $\varphi(r)$ była ekstremalą, (czyli albo minimalna, albo maksymalna, albo chociaż stacjonarna) żądać musimy znikania pochodnej ostatniej całki, **dla każdej** funkcji $\delta(r)$, a to wymusza znikanie wzdłuż całego toru pochodnej występującego tam wyrażenia, co oznacza jego stałość.

[4] Tu znów ocieramy się o temat rzekę. W jakimś sensie prawie, że istotę fizyki! **Brak** zmiennej w wyrażeniu, które **mogłoby** ja w innych okolicznościach zawierać, nazywa się **symetrią.** Gdy ruch opisany jest warunkiem minimalności pewnej całki, każda symetria implikuje „swoje" prawo zachowania. Fizyka stoi na symetriach.

czyli sumę po N^2 łamanych z fazą każdego składnika **zależną od drogi**, czyli od owej łamanej.

Kontynuując **myślenie** o fali w punkcie P'' jako sumie wkładów od frontu jeszcze wcześniejszego, dostaniemy sumę N^3 składników, dla dwukrotnie załamanych segmentów:

$$a(P) = \sum_{\text{wszystkich P', P'' i P'''}} e^{i(\phi(P,P')+\phi(P',P'')+\phi(P'',P'''))} a(P''') \quad \text{itd.}$$

W przestrzeni o stałej **długości fali**, ale przestrzeni zakrzywionej, faza składnika (po dotarciu z konstrukcją aż do źródła fali), to będzie po prostu wielkość **proporcjonalna do długości drogi:**

$$\phi(A,B) = \frac{2\pi}{\lambda} l(A,B)$$

Suma **wielu** składników z **różnymi fazami** niechybnie uśredni się do zera. Jedyny istotny wkład da grupa łamanych o **niemal identycznej** fazie, czyli (dla stałej długości fali) o niemal identycznej **długości** łamanej. A taką grupą łamanych jest grupa skupiona **wokół drogi ekstremalnej.**

Tu warto podkreślić, że trajektorie wyróżnione przez istotę konstruktywnej interferencji, muszą się charakteryzować owym brakiem zmiany wraz z ε (w przybliżeniu liniowym), wartości fazy gdy nieco modyfikujemy trajektorię. Czyli znikanie pochodnej po ε całki określającej fazę jest konieczne i wystarczające, by trajektoria była możliwym promieniem światła. Nie musi to być minimum, (choć najczęściej jest). Zamiast stale się zastrzegać, że szukamy minimum, albo maksimum, albo punktu przegięcia, mówimy z reguły o minimum, wiedząc, że to pewien skrót myślowy.

Rozpatrzmy taki banalny przykład. Weźmy najprostszą funkcję z minimum: x^2. Zapytajmy, z głupia frant, w jakim szerokim przedziale wartość funkcji różni się o mniej niż 1/1000000 dla dwóch przypadków: wokół zera i wokół jedynki. W pobliżu jedynki dostajemy oszacowanie: $|(1\pm\varepsilon)^2 - 1| < 1/1000000 \Rightarrow \varepsilon < 1/2000000$, gdy w pobliżu zera przedział jest 2000 razy szerszy! $|(0\pm\varepsilon)^2 - 0| < 1/1000000 \Rightarrow \varepsilon < 1/1000$.

Dla propagacji fal, „drogi", czyli wkłady do zasady Huyghensa od różnych łamanych, konstruktywnie interferują, gdy faza takiej łamanej nie różni się więcej od drogi centralnej niż ćwierć długości fali. Gdyby łamana miała jeden wierzchołek, to owo symboliczne 2000 razy oznaczałoby tyle razy więcej wkładów interferujących konstruktywnie dla drogi minimalnej, niż dla „bylejakiej". Ale gdy warunek nałożony jest na sumy, liczba kombinacji, gdy można sobie pozwolić na dużo większy błąd, owe „2000", rośnie jak wysoka potęga (rzędu liczby węzłów łamanych) tej liczby!. Krótko mówiąc, trajektorie nie ekstremalne i ich otoczenie **zupełnie się nie liczą**. Można ustawić szereg ekranów wycinających takie wkłady, a światło w punkcie docelowym, nawet tego nie zauważy! Oczywiście, dopóki przesłony nie zbliżą się do promienia na odległość porównywalną z długością fali. To jest wyjaśnienie niezwykle sugestywnej **zasady Fermata**. Obowiązuje ona dla wszystkich fal, nie tylko dla światła. Należy jednak unikać mówienia o najkrótszym **czasie**. Trzeba mówić o **fazie fali**.

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\lambda(\vec{r})} = \text{minimum}$$

W najprostszym przypadku **zwykłej** optyki, gdy zmienny jest współczynnik załamania, długość fali to $\lambda = Tv(\vec{r}) = Tc / n(\vec{r})$, gdzie T to okres drgań w fali, stąd w zasadzie Fermata można zastąpić odwrotność długości fali, **prędkością fazową:**

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{v(\vec{r})} = \text{minimum}$$

co daje **złudne** wrażenie, że fotonowi się gdzieś spieszy!

Można też użyć współczynnika załamania:**:**

$$\int_A^B n(\vec{r})\mathrm{d}l = \text{minimum}$$ [5]

W rzeczywistości, nawet dla światła, wskutek dyspersji, czas wędrowania paczki falowej, wyznaczony jest przez **prędkość grupową**, różną od prędkości fazowej. A w zasadzie Fermata **musi** być prędkość fazowa, bo to interferencja fal wyznacza istotny obszar w przestrzeni, w którym wiązka światła ma natężenie zauważalnie różne od zera.

W przestrzeni zakrzywionej i fale i cząstki wybierają tory o minimalnej długości.

W przestrzeni o zmiennej prędkości, promienie światła wybierają tory najkrótszej **drogi optycznej**, czyli najkrótszej fazy. Ruchy w przestrzeniach zakrzywionych, ale ze stałą prędkością jest tylko szczególnym przypadkiem tej samej zasady.

Ale i cząstki podlegające mechanice Newtona mają swoją bardzo piękna zasadę, dla której zasada wyboru drogi najkrótszej w przestrzeni zakrzywionej, ale bez potencjału, jest tylko szczególnym przypadkiem.

---

[5] Rozważmy promień światła startujący poziomo, w ośrodku, w którym, $n(z) = \sqrt{n_0^{\;2} - kz}$. Jaka będzie trajektoria? Tzw. „droga optyczna", która ma być minimalna wynosi:
$\int (\sqrt{n_0^{\;2} - kz})\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2} = \int (\sqrt{n_0^{\;2} - kz})\sqrt{1 + x'^2}\mathrm{d}z = \min$. Korzystając z reguły znajdowania praw zachowania, dostajemy: $\sqrt{n_0^{\;2} - kz}(x' / \sqrt{1 + x'^2}) = a = \sqrt{n_0^{\;2} - kz} / \sqrt{z'^2 + 1}$. Jeśli światło startuje z początku układu poziomo, to dla $z = 0$, musi być $z' = 0$, więc $a = n_0$. Podstawiamy tę wartość i wyliczamy $x' = n_0 / \sqrt{-kz}$, całkujemy w pamięci: $x = \frac{n_0}{\sqrt{k}}\sqrt{-z} + C$. Ponieważ startujemy z początku układu, musi być: $C = 0$, czyli: $z = -kx^2 / n_0^{\;2}$. To parabola. Wiązka będzie wnikać w obszar $z<0$, tj. **rosnącego** współczynnika załamania.

Dopiero dzisiaj uświadomiłem sobie, że dla dosyć prostego, ale pouczającego przypadku można ją z powodzeniem Wam zaprezentować. Tak jak się ją zazwyczaj prezentuje, przyprawia o ból głowy!

Pozwólcie, że zacytuję fragment z podręcznika wybitnego matematyka i fizyka teoretyka W. I. Arnolda: „Metody matematyczne mechaniki klasycznej".

„C. Jacobi w wykładach dynamiki z lat 1842-1843 (C. Jacobi, Vorlesungen uber Dynamic, Berlin 1866) wyraził opinię: >>We wszystkich niemal podręcznikach, nawet w tych najlepszych, zasada ta jest przedstawiona w taki sposób, że nie da się jej zrozumieć<<. Nie śmiem tu naruszać tej tradycji."

Przed laty, gdy zaczynałem mieć wykłady mechaniki teoretycznej wypracowałem swój sposób dowodzenia zasady Jacobiego, który uważam za zrozumiały, ale bynajmniej nie łatwy. Dlatego, z ogromnym żalem, (bo sama zasada jest sformułowana prosto, jej sens fizyczny jest piękny, a użyteczność w rozwiązywaniu problemów, niesamowita), musiałem się zgodzić, że o niej wspomnę, ale na zasadzie „mądrzy ludzie udowodnili". A tego **organicznie nie znoszę.** Wolę wybrać sytuację szczególną, łatwiejszą, ale pokazać **wszystkie** elementy rozumowania.

Oto owo wyprowadzenie:

Rozpatrzmy ruch cząstki w płaszczyźnie *x,z* pod działaniem siły potencjalnej opisanej potencjałem $V(z)$. W problemie tym są dwa prawa zachowania. Składowej poziomej pędu:

$$m\dot{x} = p_x$$

i całkowitej energii:

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + V(z) = E$$

Przepisujemy drugie prawo w postaci:

$2m(E - V(z)) = m^2(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) = (1 + z'^2)p_x{}^2$, dzielimy przez $(1 + z'^2)$ i wyciągamy pierwiastek: $\sqrt{2m(E - V(z))}\dfrac{1}{\sqrt{1 + z'^2}} = p_x$

Jeszcze tylko mnożymy ułamek w liczniku i mianowniku przez d*x*/d*z*, oznaczane jako *x'* i mamy: $\sqrt{2m(E - V(z))}\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2 + 1}} = p_x$

Lewa strona jest pochodną po *x'* wyrażenia $\sqrt{2m(E - V(z))}\sqrt{x'^2 + 1}$**, a zarazem stałą.** Zatem równanie toru spełnia zasadę:

$$\int_A^B \sqrt{2m(E - V(z))}\sqrt{x'^2 + 1}\,\mathrm{d}z = \text{minimum} = \int_A^B \sqrt{2m(E - V(z))}\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2}$$

Jest to dokładna analogia zasady Fermata.

Wiemy skąd inąd, że w polu ciężkości z potencjałem mgz, wszelkie rzuty opisywane sa parabolami. Nic dziwnego, że przykład z optyki z współczynnikiem załamania z liniową funkcją pod pierwiastkiem, doprowadził nas też do paraboli.

Nie ukrywam, że dobierając dający się łatwo rozwiązać przykład ilustrujący zasadę Fermata, wiedziałem o lotach piłek tenisowych i o zasadzie Jacobiego.

Teraz zasadne jest zapytać, dlaczego prawa mechaniki przewidują tę samą trajektorię, która w **narzucający się sposób** wynika z interferencji fal?

Chyba wiecie, dlaczego!!! **Bo materia, to też fale.** Stało się to jasne osiemdziesiąt kilka lat temu. A dla fal de Broglie'a, długość fali (nierelatywistycznej) cząstki, to

$$\lambda = \frac{\hbar}{p} = \frac{\hbar}{mv(\vec{r})} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V(\vec{r}))}},$$

Zasada Jacobiego ma prędkość w **liczniku** a nie w mianowniku jak zasada Fermata. Po prostu dla fal materii o innych prędkościach od fal elektromagnetycznych, inny jest też związek długości fali z prędkością ruchu paczek falowych. To, że dla światła (w niektórych zresztą tylko przypadkach) pojawia się czas jako wielkość najkrótsza, to czysty przypadek nie warty wzmiankowania. **Liczy się faza.**

Sens falowy zasady Jacobiego (i innej, podobnej podanej przez siebie) przeczuwał współczesny mu Hamilton, ale do odkrycia i udowodnienia falowego charakteru wszelkiej materii było jeszcze daleko.

To, dlatego, Newtonowi, traktującemu światło jako rój zwykłych cząstek, dla wyjaśnienia prawa załamania musiało wyjść, że współczynnik załamania jest **proporcjonalny** a nie odwrotnie proporcjonalny do prędkości tegoż światła w ośrodku!

Harmonia między mechaniką, optyką a geodezyjnymi (i, nieco ogólniej, zasadą Fermata a zasadą Jacobiego) jest możliwa dzięki **faktycznemu falowemu** charakterowi materii.

$$\int_A^B \frac{\mathrm{d}l}{\lambda(\vec{r})} = \text{minimum}$$

Według mnie jest to najciekawsze równanie fizyki. Jest równie prawomocne w optyce, mechanice kwantowej (a przez to w zwykłej mechanice i mechanice relatywistycznej, czyli elektrodynamice cząstek), w teorii grawitacji, w teorii strun, czyli teorii wielowymiarowych czasoprzestrzeni, z których n-4 jest zwartych w mikroskopowych rozmiarach. A poza tym bije w oczy swoją oczywistością.