Wykład 17

Strumień pola przyspieszeń grawitacyjnych w teorii Newtona.

W tym miejscu logiczny wywód prowadzący do zrozumienia istoty grawitacji à la Einstein, muszę przerwać i omówić zagadnienie ważne, ale proste i chyba Wam znane. Chodzi o prawo Gaussa w grawitacji niutonowskiej.

Siła malejąca z kwadratem odległości ma **nadzwyczajne** właściwości. Zacznijmy od pola przyspieszeń wytworzonego przez masę punktową. Jeśli poprowadzić sferę o środku w miejscu gdzie leży ta masa, to iloczyn przyspieszenia i powierzchni sfery, **nie zależy** od promienia tej sfery.

Gdybyśmy zrobili kuliste naczynie z małymi otworkami na powierzchni (gęsto rozlokowanymi), napełnili wodą i wprowadzili do środka cienką rurkę doprowadzającą w stałym tempie wodę, to, wskutek zaniedbywalnej ściśliwości wody, przepływ tej wody musiałby wyglądać tak, że jej prędkość skierowana byłaby centralnie, a wartość prędkości byłaby **odwrotnie proporcjonalna do kwadratu** odległości.

Tyle, bowiem, (na objętość) ile wody wpłynie do (wydzielonej myślowo) warstwy między promieniami r_1, a r_2 przez promień mniejszy, tyle samo musi wypłynąć przez promień większy. W czasie dt objętość wody wpływającej to $4\pi r_1^2 v(r_1)\mathrm{d}t$, a wody wypływającej $4\pi r_2^2 v(r_2)\mathrm{d}t$ Równość tych objętości oznacza właśnie, iż

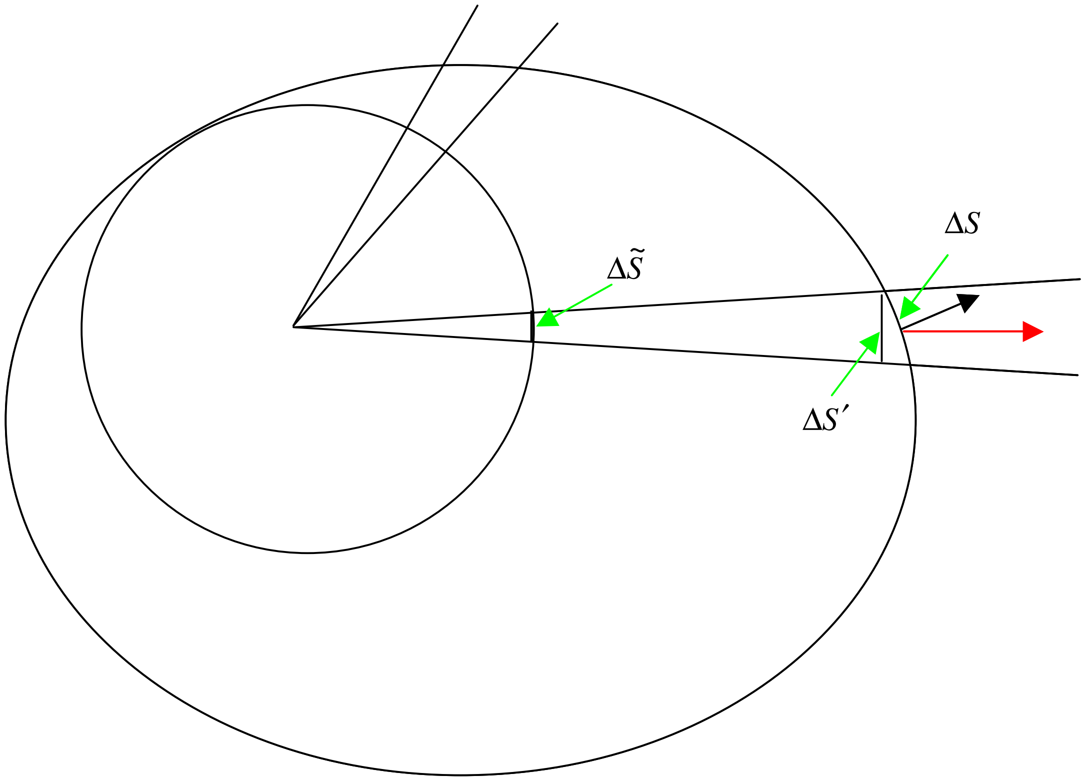
$4\pi r^2 v(r) = \Phi = \text{constans}$, dla wszystkich promieni.

Ze względu na oczywistą symetrię:

$$\vec{v}(r) = \frac{\Phi}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Wielkość Φ nazywa się **strumieniem** wielkości wektorowej, w tym wypadku prędkości. Jego sens jest tutaj oczywisty. Jest to ilość (w metrach sześciennych na sekundę) wody wpompowywanej do naczynia.

Nie trzeba wielkiej wyobraźni, by „zobaczyć”, iż ilość wody na sekundę przepływająca przez **dowolną,** nieruchomą powierzchnię otaczającą źródło wynosi Φ! Jeśli powierzchnia jest inna niż koncentryczna sfera, woda ma prędkość i prostopadłą i styczną do powierzchni. Ten stały strumień należy liczyć (po podzieleniu powierzchni na wiele małych kawałków) mnożąc przez wielkość pola powierzchni takiego kawałka **składową prostopadłą** do owego kawałka. Wprowadzając wektor $\vec{n}$ skierowany na zewnątrz i prostopadły („normalny”) do kawałka powierzchni, zapiszemy strumień wody jako sumę: $\sum \vec{v} \cdot \vec{n} \Delta S$.



Pomocne może być wyobrażenie sobie szeregu wąskich stożków, wzdłuż których płynie stały strumień, każdego przeciętego dwiema powierzchniami: prostopadłą pewnej ustalonej sfery $\Delta \tilde{S}$ i „skośną” pewnej dowolnej powierzchni: ΔS . Powierzchnia $\Delta S'$, będąca rzutem powierzchni ΔS , prostopadła do linii pola, jest mniejsza od powierzchni ΔS dokładnie o ten sam cosinus kąta, o który mniejsza jest składowa prędkości prostopadła do ΔS od całej prędkości. Dlatego $\Delta S \vec{n} \vec{v} = \Delta S v \cos(\vec{v}, \vec{n}) = \Delta S' v$. Z kolei ten iloczyn, dzięki temu, że powierzchnia $\Delta \tilde{S}$ jest mniejsza od $\Delta S'$ o taki sam czynnik (stosunek kwadratów promieni), o jaki większa jest prędkość na powierzchni małej sfery, przeto ten kawałek strumienia jest identyczny jak kawałek strumienia na małej sferze, a cały strumień przez owalną powierzchnię na rysunku, jest równy strumieniowi przez wybraną (dowolną) sferę koncentryczną.

W przypadku pola grawitacyjnego (podobnie elektrostatycznego) niekoniecznie coś płynie, (choć diabli wiedzą!), ale taka sama zależność od odległości powoduje, że dla każdej powierzchni obejmującej centrum:

$\sum \vec{g} \cdot \vec{n} \Delta S$ nie zależy od powierzchni i jest taka sama jak dla dowolnej koncentrycznej sfery, czyli $-4\pi GM$, no bo $4\pi r^2 \cdot \frac{GM}{r^2} = 4\pi GM$, a zwrot przyspieszenia i wektora normalnego (kierowanego zawsze na zewnątrz) jest przeciwny.

Jeśli pomyślana powierzchnia jest wytyczona **na zewnątrz** źródła, netto nic z powierzchni nie wypływa, a ściślej mówiąc, to co wpłynie przez część powierzchni zwróconą do źródła, wypłynie przez pozostałą część powierzchni.

Jeśli pole jest **sumą** (jak u Newtona) pól wytworzonych przez różne źródła[1], to strumień pola wypadkowego jest równy sumie strumieni od poszczególnych źródeł, (bo składowa normalna jest sumą składowych normalnych), a te są **albo** $-4\pi GM$, gdy źródło jest **obejmowane** przez powierzchnię, albo **zero**, gdy źródło jest na zewnątrz.

W efekcie

Strumień wektora $\vec{g} = -4\pi G \sum_{\text{wewnatrz}} M_i$

To jest właśnie prawo Gaussa[2].

Doskonale nadaje się to prawo do rozwiązania zagadnienia znalezienia pola wypadkowego od kuli. Ze względu na symetrię kuli, pole na pewno jest skierowane centralnie i jest jednakowe, (co do wartości), w równych odległościach od środka kuli. Ale ile wynosi owo $g(r)$?.

Prawo Gaussa zastosowane do sfery otaczającej masywną kulę i koncentrycznej ze środkiem kuli (większość kawałków kuli **nie** leży w środku sfery, dlatego słuszność prawa Gaussa dla dowolnej powierzchni, w tym także sfery **niekoncentrycznej,** jest kluczowa dla tego wywodu) daje natychmiastową odpowiedź:

[1] Zwróćcie uwagę na terminologię. Potoczny sens źródła, to miejsce, z którego wypływa woda. Jest też inny (np. „źródło radości"), bliższy znaczenia **przyczyna.** Fizycy mówią o źródłach pola grawitacyjnego i elektrostatycznego i niektórzy mogliby myśleć, że użyte jest to jako synonim przyczyny. Spotkacie się w przyszłości ze stwierdzeniem, że pole indukcji magnetycznej jest **bezźródłowe!** Przecież nie chodzi o to, że nie ma przyczyny tego pola! Prądy są taką przyczyną. Pole indukcji jest bezźródłowe, bo strumień, tak jak został powyżej zdefiniowany, jest **zero** dla pola indukcji. Używając pojęcia linii pola, powiemy, że dokładnie tyle linii indukcji wypływa z zamkniętej powierzchni ile do niej wpływa. Wewnątrz **nie ma żadnego źródła.** Hipotetyczny **monopol byłby** takim źródłem**.**

[2] W pełnej notacji: $\oiint \vec{g} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = -4\pi G \iiint \rho \mathrm{d}V$, gdzie ρ jest gęstością masy

$$4\pi r^2 g(r) = 4\pi GM(r),$$

gdzie $M(r)$ jest całkowitą masą **wewnątrz** kuli o promieniu r. Dla słuszności tego wyniku nie jest konieczne, by kula miała stałą gęstość, a jedynie, by rozkład gęstości nie naruszał obrotowej symetrii całej sytuacji fizycznej, tj., by nie wyróżniał żadnego kierunku. Gęstość wewnątrz kuli może się zmieniać dowolnie, ale tylko wzdłuż promienia. Na danej odległości, musi być stała.

Gdy interesuje nas pole na zewnątrz ciała wytwarzającego pole, jest to po prostu cała masa ciała, a wynik jest identyczny, jak dla masy punktowej umieszczonej w środku.

Dla kuli **jednorodnej** o promieniu R, pole przyspieszenia w punkcie wewnątrz, w odległości r wyliczamy z powyższego wzoru biorąc proporcjonalną do objętości masę **części kuli** $M_{\text{wew}} = \frac{r^3}{R^3} M$ **.** Daje to**:**

$$\vec{g}(\vec{r}) = \begin{cases} -\dfrac{GM}{r^3}\vec{r} & \text{dla } r > R \\ -\dfrac{GM}{R^3}\vec{r} & \text{dla } r < R \end{cases}$$

To było łatwe!

Zauważmy, na marginesie, że konsekwencją prawa Gaussa jest to, że pole grawitacyjne **w próżni**, mające w pewnym obszarze **ustalony** jeden kierunek, musi (w tym obszarze) być **stałe.** No, bo zastosowanie prawa Gaussa do prostopadłościanu o jednej z krawędzi wzdłuż pola, daje równość iloczynu wartości pola przez **jednakowe** powierzchnie prostopadłe do tego kierunku, a więc i równość przyspieszeń.

Pole przyspieszeń - czy może być jednorodne?

„Paweł i Gaweł w jednym stali domu,

Paweł na górze, a Gaweł na dole;

Paweł, spokojny, nie wadził nikomu,

Gaweł najdziksze wymyślał swawole."

Pozornie, takie pole jednorodne, bardzo łatwo jest skonstruować jako pole sił bezwładności. Wystarczy wziąć układ poruszający się ze stałym przyspieszeniem.

Wystarczy nawet, na początek, rozpatrzyć zaledwie dwóch obserwatorów: nazwę ich Paweł i Gaweł.

Niewątpliwie Paweł i Gaweł doznawali w swoim życiu działania grawitacji. Niezmiennej w czasie. Niezmienna w czasie była też względna sytuacja ich obu. Jakkolwiek sensownie potrafili zdefiniować odległość między sobą, pozostawała ona stała (przy założeniu, że Paweł i Gaweł zajmują jakieś standardowe położenia na swoich poziomach). Grawitacja pomagała, na przykład, przesyłać przedmioty od Pawła do Gawła. Wystarczyło wystawić za okno cukierek, czy jabłko i puścić z rąk, a niebawem Gaweł mógł sobie cukierka, czy jabłko pochwycić. Trzeba też zwrócić uwagę, iż na to, by i Paweł i Gaweł zajmowali stabilną pozycję w tym polu grawitacyjnym, ich stopy (albo inne części ciała) muszą być w stanie specyficznego napięcia, które zresztą przenosi się wyżej, słabnąc stopniowo przy zbliżaniu się do czubka głowy.

Jak wytworzyć analogiczną sytuację daleko poza Ziemią? No cóż. O tym właśnie mówi **zasada równoważności**. Jeśli posadzić Pawła do pojazdu i Gawła do identycznego pojazdu (ustawionego za Pawłem) i zaprogramować silniki odrzutowe ich pojazdów na **stałe** przyspieszenie (o wartości, powiedzmy 9,81m/s^2), to wydaje się, iż powstanie dokładnie sytuacja jak z wiersza Fredry!

Każdy z braci, zajmując pozycję równoległą do osi rakiety, odczuwa w stopach, gdy stoi, (albo w pośladkach, gdy siedzi w fotelu) owo napięcie zwane ciężarem. Paweł może, wypuściwszy cukierka, posłać go Gawłowi.

Bez konieczności uwzględniania szczególnej teorii względności, wszystko jest cacy. Ale uwaga! **Są pewne rafy, które musimy zacząć omijać**.

Pierwsza, niezbyt groźna. W jakim sensie ich przyspieszenie ma być stałe? To jest jasne. To nie może być zwyczajne $\ddot{x} = \text{constans}$. Jeśli sytuacja miałaby trwać kilkadziesiąt lat, to nawet ze skromnym 9,81m/s^2, osiągnęliby oni prędkości skrajnie relatywistyczne! Przerabialiście ten temat dość dokładnie na ćwiczeniach. Ponownie pojawił się na wykładzie w związku z ruchem ładunku w jednorodnym polu elektrycznym. To siła wgniatająca w fotel ma być stała. To ma być przyspieszenie stałe w układzie **kowędrującym**, czyli takim, (co **chwilę innym**) układzie **inercjalnym**, którego **stała** prędkość jest równa chwilowej prędkości (tym razem Pawła, albo Gawła), w pewnym **wybranym punkcie** linii świata. Ruch ze stałym przyspieszeniem (w powyższym sensie) opisany jest równaniem:

$$x^2 - c^2t^2 = L^2$$

Zaraz to ponownie udowodnię, bo to szalenie ważne.

Początek układu, wynikający z powyższego zapisu, wybrany jest „chytrze”. Nie byłoby wygodnie umieścić go w punkcie startowym, choć oczywiście można napisać:

$$\tilde{x} = x - L = \sqrt{L^2 + c^2 t^2} - L\,,$$

co oznacza przesunięcie początku o *L,* i mamy ten (pozornie) wygodny sposób odliczania odległości od punktu startowego. Na chwilę to on się nawet przyda, bo wartość przyspieszenia **początkowego** w układzie, w którym rakiety startowały, możemy obliczyć **błyskawicznie** bez dwukrotnego różniczkowania. Mnożymy i dzielimy przez sumę dostając

$$\tilde{x} = \frac{L^2 + c^2 t^2 - L^2}{\sqrt{L^2 + c^2 t^2} + L} = \frac{1}{2}\frac{c^2}{L} t^2 \frac{2L}{\sqrt{L^2 + c^2 t^2} + L}$$

Dla krótkich czasów, człon z t^2 jest pomijalny w mianowniku i ostatni ułamek ≈ 1, a to co zostaje w wyrażeniu na przebytą od startu odległość, to wzór z gimnazjum na ruch jednostajnie przyspieszony (w zwykłym sensie). Wartością przyspieszenia jest c^2/L. Gdy przyspieszenie ma być umiarkowane (np. ziemskie, *g*) odległość *L* jest **gigantyczna:** c^2/g.

Początek układu współrzędnych, w którym ruch Gawła opisany jest równaniem: $x = \sqrt{L^2 + c^2 t^2}$, bez zbędnej stałej, jest środkiem hiperboli. Dla małych przyspieszeń jest on bardzo daleko od wierzchołka hiperboli.

A teraz następna, **bardzo poważna rafa**. Czy Paweł i Gaweł mają poruszać się z takimi samymi przyspieszeniami??

Na pierwszy rzut oka tak. Przecież pole ma być jednorodne, a przyspieszenie takie samo.

No, ale skoro ich odległość **własna**, no zwykła odległość, którą przebywają cukierki spuszczane Gawłowi przez Pawła ma być stała, to ich odległość oceniana przez obserwatorów z Ziemi, (dla których Paweł i Gaweł pędzą jak szaleni – im później, tym bardziej) **ulegająca skróceniu Lorentza** musi maleć!!!!!!

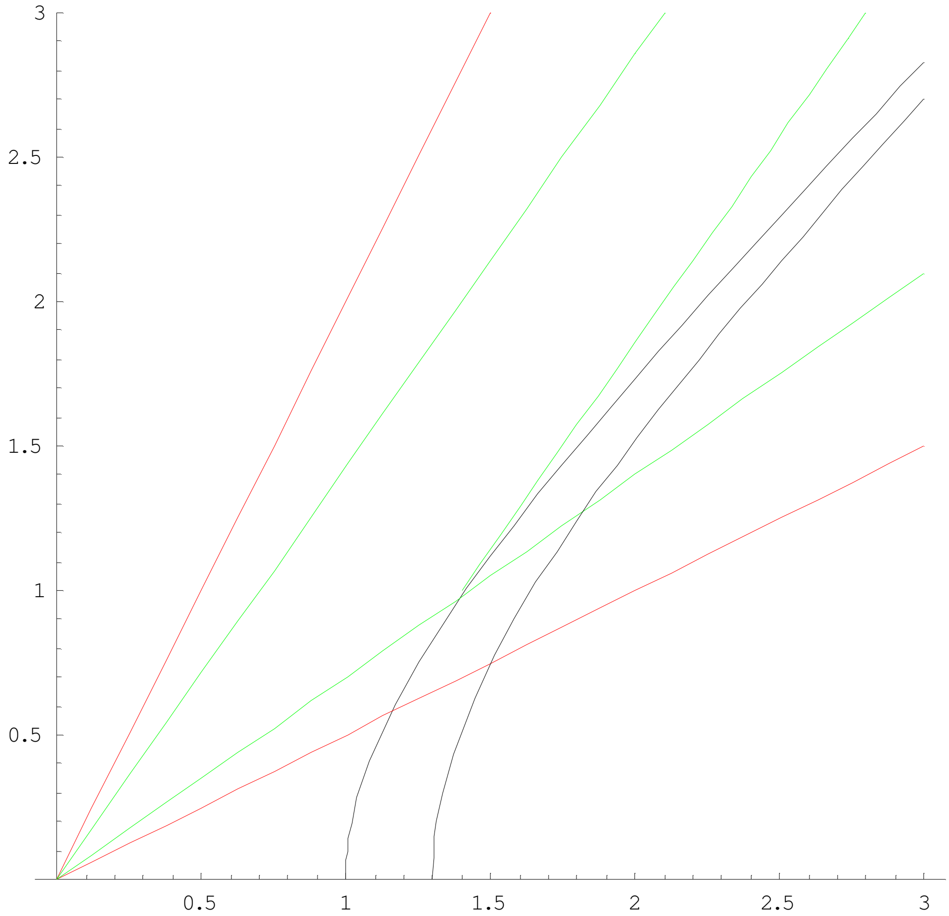
Gdyby poruszali się z jednakowymi przyspieszeniami, czyli według równań:

$$\tilde{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt{L^2 + c^2 t^2} - L$$

$$\tilde{x}_{\mathrm{P}} = \sqrt{L^2 + c^2 t^2} - L + d_{\mathrm{PG}}$$

to ich odległość w układzie Ziemi byłaby stała równa d_{PG} z powyższego wzoru. A to oznaczałoby, że ich odległość własna, przy takich ruchach, by rosła[3]. Ale Paweł i Gaweł **mają** być w jednakowej odległości, jeśli trick z siłami bezwładności ma symulować stabilny stan w polu grawitacyjnym. Paweł i Gaweł **w naszym układzie** muszą się zbliżać! Przyspieszenie Pawła musi być trochę mniejsze niż Gawła! **O ile?**

Równanie ruchu w postaci $x^2 - c^2t^2 = L^2$, czyli z początkiem układu w środku hiperboli jest piękne. Rozważmy układ inercjalny o początku w tym samym punkcie, ale pędzący z jakąś prędkością *V*. Na wykresie są dwa takie układy o kolorowych osiach.



[3] Skoro odległość rośnie, czyli skoro obserwatorzy **nie są nieruchomi wzajemnie,** pojęcie odległości własnej nieco się rozmywa. Może Gaweł, w wybranej przez siebie chwili, w swoim układzie kowędrującym, zmierzyć odległość do Pawła w tej chwili (i porównać z pomiarem późniejszym), ale dla Pawła zdarzenie na jego linii świata, które posłużyło Gawłowi do pomiaru odległości, nie jest równoczesne w jego układzie kowędrującym (wybranym dla tego zdarzenia) z punktem na linii świata Gawła, który on wybrał do pomiaru. Choć Paweł i Gaweł nie mogliby uzgodnić, co jest ich odległością (i kiedy?), to każdy, z osobna, stwierdzić by musiał nieustanne oddalanie się partnera. Nie musimy tego dowodzić inaczej, niż stwierdzając, że stała odległość, we wspólnym dla obu, układzie kowędrującym, coraz to szybszym, **musiałaby** przekładać się na **malejącą** odległość w układzie Ziemi. A skoro ta nie maleje, **nie ma miejsca na stałą** odległość własną. Zaprzeczeniem stwierdzenia: „odległość własna jest stała" nie jest zdanie: „odległość własna jest zmienna", ale zdanie „nie da się zdefiniować sensownie odległości własnej, która byłaby stała". Można definiować **różne** wielkości spełniające **niektóre** cechy, jakie przysługiwać powinny pojęciu odległości własnej, ale żadna z nich nie będzie stała.

Ponieważ lewa strona równania jest **niezmiennikiem**, więc w tym nowym układzie, linia świata Gawła opisana jest równaniem

$$x_G'^2 - c^2 t_G'^2 = x_G^2 - c^2 t_G^2 = L_G^2$$

Własność w chwili *t'* = 0, ruchu opisanego równaniem

$$x_G'^2 - c^2 t_G'^2 = L_G^2$$

doskonale znamy! Wszystko jest dokładnie tak, jak na Ziemi **w chwili startu!**

Gaweł ma prędkość 0, odległość L_G i przyspieszenie c^2 / L_G! Ze względu na prędkość Gawła =0, ten właśnie układ jest **kowędrujący** z Gawłem dla punktu na jego linii świata wyznaczonym przecięciem hiperboli linią *t*' = 0. Czyli osią *x*'.

Niesamowite. Człek marnuje paliwo, rozpędza się i rozpędza, a tu jakiś cwaniaczek mówi: Zaczynasz bracie wszystko od początku! Masz prędkość zero, odległyś od (tego samego!) początku układu o pierwotne *L*. Oczywiście, ta cudowna redukcja odległości, to efekt kontrakcji Lorentza. Wszak układ Ziemi pędzi względem kowędrującego, więc sprzeczności nie ma. W układzie Ziemi Gaweł jest już dalej niż *L* od początku układu, a w układzie kowędrującym tylko *L.*

W starym układzie, punkt *t'* = 0, *x'* =*L* to punkt, w którym Gaweł już jest od dłuższego czasu w podróży!! Zgodnie w transformacją Lorentza:

$$x = L / \sqrt{1 - V^2 / c^2}$$
$$t = VL / (c^2 \sqrt{1 - V^2 / c^2})$$

jest to punkt na hiperboli. Ten właśnie, dla którego układ o prędkości *V* jest układem kowędrującym. Na rysunku linie *t'* = 0 dla dwóch prędkości przecinają, każda, hiperbolę Gawła w punkcie danym powyższymi wzorami.

Jeśli ktoś jest niewiernym Tomaszem, może policzyć prędkość[4] w tym punkcie i przekonać się, że wynosi ona *V*. Ponieważ sytuacja w nowym układzie (w odniesieniu do zupełnie nowego zdarzenia, jakim jest punkt powyższy) jest identyczna jak na początku w starym układzie, przyspieszenie startującego (od nowa!) Gawła jest ponow-

---

[4] Łatwiejszym sposobem ustalenia, że prędkość na hiperboli jest identyczna z prędkością układu jest zróżniczkowanie równania hiperboli: $2x\mathrm{d}x - 2c^2 t\mathrm{d}t = 0 = -2c^2 (t, x) \otimes (\mathrm{d}t, \mathrm{d}x)$, gdzie $(t, x) \otimes (\mathrm{d}t, \mathrm{d}x) \equiv t\mathrm{d}t - \frac{1}{c^2} x\mathrm{d}x$ jest **niezmienniczym** iloczynem skalarnym. Oznacza to, że wektor wodzący (*t,x*) punktu na hiperboli i wektor styczny (d *t*, d*x*) są ortogonalne i mogą być utożsamione z osiami układu kowędrującego. Sytuacja jest **analogiczna** jak dla rodziny okręgów (opisanych niezmienniczymi równaniami $x^2+y^2 = L^2$). Wektor wodzący od środka jest **dla wszystkich** okręgów, o różnych promieniach, **ortogonalny** do wektora stycznego, a punkty przecięcia taką linią, w obróconym układzie przybierają wspólną wartość 0. Długości łuków pomiędzy parą takich przecięć, są, w **oczywisty** sposób tym większe, im większy jest okrąg.

nie c^2/L. A więc to naprawdę jest ten rodzaj ruchu **jednostajnie przyspieszonego**, o jaki nam chodzi.

A co z Pawłem? Tym z przodu. On ma być w tym układzie kowędrującym zarówno nieruchomy względem Gawła, no i oddalonym o stałą wielkość $L_P - L_G$. Oznacza to, iż jego odległość od początku, w każdym układzie kowędrującym (Gawła) musi być też stała, tyle, że większa.! Hiperbola Pawła ma być **podobna** (w sensie proporcjonalności wszystkich wymiarów) do Gawłowej Dodatkowym cudem jest teraz to, że układ kowędrujący Pawła jest identyczny z układem kowędrującym Gawła. Oczywiście dla punktu na hiperboli przeciętej tą sama linią czasu $t' = 0$.

Wierzchołek hiperboli Pawła ma być dalej od **wspólnego** środka hiperbol:

$$x_P{}^2 - c^2 t_P{}^2 = L_P{}^2$$

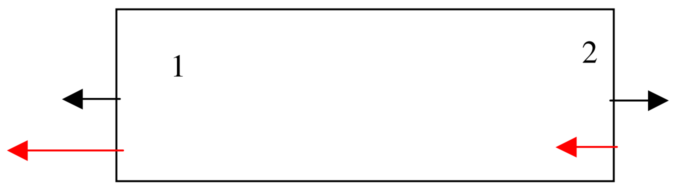
$$a_P = c^2 / L_P < c^2 / L_G$$

Przyspieszenie Pawła jest mniejsze od przyspieszenia Gawła.

Gdyby tych Pawłów i Gawłów miało być wielu, w różnych początkowych odległościach od tego śmiesznego punktu, to ich przyspieszenia muszą regularnie **maleć** przy oddalaniu się od płaszczyzny $z = 0$. Jeśli obserwatorzy poruszają się w prawo, to pole grawitacyjne (pozorne) skierowane jest w lewo, w kierunku tego dziwnego punktu, gdzie przyspieszenie, zgodnie z wzorem, dąży do nieskończoności. Zamiast być stałe – **rośnie w kierunku wyznaczonym przez pole i maleje w kierunku przeciwnym**.

Prawo Gaussa w próżni musi ulec **modyfikacji**. Zamiast wielkości L, używanej dotychczas (kojarzącej się ze stałą) wprowadzę zmienną, z, której różne wartości z przedziału od zera do nieskończoności parametryzują wszelkie możliwe hiperbole i różnych możliwych Pawłów, czy Gawłów. Jest to **współrzędna** położenia w układzie z polem grawitacyjnym, (czy jak kto woli w układzie nieinercjalnym), która charakteryzuje (cały czas) wzajemnie nieruchomych różnych Pawłów i Gawłów. Prawie zupełnie tak, jak pionowa zmienna z na Ziemi. W zależności od z, przyspieszenie każdego z obserwatorów (można myśleć o zegarach, albo **potencjalnych** obserwatorach nieruchomych względem przynajmniej jednego realnego Gawła) jest **inne!!**

Ponieważ $g(z) = -c^2 / z$, więc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} g(z) = c^2 / z^2 = \frac{g^2}{c^2}$



Scałkujmy[5] to równanie po walcu (albo prostopadłościanie) o podstawie S i osi skierowanej wzdłuż pola, zawartego między współrzędnymi z_1 i z_2. Mnożymy wyrażenie (dla każdej ze stron równania) przez $S\mathrm{d}z$ i sumujemy po plasterkach. Po lewej stronie dostaniemy $-Sg(z_1)+ Sg(z_2)$, po prawej całkę objętościową $\sum \frac{g^2}{c^2} \Delta V$. Lewa strona jest strumieniem po **całej** powierzchni walca z przyspieszenia $\vec{g}$.

$$\oiint \vec{g} \cdot \vec{n} \mathrm{d}S = \frac{1}{c^2} \iiint \vec{g}^{\,2} \mathrm{d}V$$

Kwadrat przyspieszenia wnosi wkład do prawa Gaussa w próżni.

To jest **kluczowa** nowość w stosunku do teorii grawitacji Newtona! O tym, że jest to efekt „minkowskości” czasoprzestrzeni, świadczy współczynnik c^2 we wkładzie do strumienia. W słabym polu, istnienie tego wkładu mogło uchodzić niezauważone, aż do czasów Einsteina.

Chcąc interpretować otrzymany wynik w kategoriach teorii Newtona (co nie jest do końca konsekwentne, ale ludzie to uwielbiają, i z taką interpretacją można się często spotkać), należałoby najpierw odpowiedzieć sobie na pytanie, czy w warunkach wystarczającej stosowalności prawa Newtona, energia ciała wytwarzającego pole ma coś do rzeczy, czy nie? Oczywiście, że ma! „Podgrzanie” ciała zwiększające jego energię całkowitą, zwiększa też masę całego ciała, choć nie zmienia mas samych składników!. To nie suma mas nukleonów i elektronów stanowiących Słońce wchodzi do wzoru Newtona (i do prawa Gaussa), ale całkowita energia. Składa się na nią i energia promieniowania, i energia kinetyczna elektronów i jąder, i energia pola magnetycznego, i

[5] Nie trzeba formalnie znać całek objętościowych, by zrozumieć, że chodzi tu o procedurę jaką musielibyśmy wykonać, chcąc obliczyć masę cieczy w naczyniu, znając jego rozmiary i gęstość (masę właściwą) cieczy, zmienna w określony sposób z wysokością.

ujemna energia wiązania w jądrach helu (jego znaczna część powstała już w czasie życia Słońca), deuteru, węgla, że wymienię te najważniejsze składniki.

To jest **praprzyczyna** gruntownej różnicy między polem elektrostatycznym a polem grawitacyjnym. Źródłem pola elektrostatycznego są ładunki cząstek, skalary. Wkład do elektrycznego prawa Gaussa od ładunków „szalejących" w obłąkanym tańcu wewnątrz powierzchni Gaussa, jest dokładnie taki sam jak od ładunków spoczywających!

Skąd o tym wiemy? No cóż. Wiemy! Bezpośrednim dowodem jest **neutralność atomów.** Pomyślcie. Porównajmy mol wodoru z molem deuteru. Protony w wodorze mają prędkości, co najwyżej termiczne, czemu w temperaturze pokojowej odpowiada 1/40 eV. (razy 3/2). Protony w deuteronach wirują z prędkością rzędu 1/10*c*, czemu odpowiada energia rzędu kilu **milionów** elektronowoltów. Gdyby wkład od „tańczących" protonów rósł o czynnik $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ (tak jak rośnie wkład od żwawiej się ruszających cząstek do energii spoczynkowej Słońca, czy innego grawitującego ciała), to owe pół procenta oznaczałoby iż mol deuteru ma ładunek 500 kulombów. Mol deuteru w kuli o promieniu metra wytworzyłby napięcie 4,5 **bilionów** woltów. Ludzie!

A co z wkładem do prawa Gaussa elektronów na orbitach? W takim uranie prędkości dochodzą do, chyba 90% prędkości światła.

Nie ma mowy o jakimkolwiek uzależnieniu efektywnego (w sensie prawa Gaussa) ładunku od prędkości. Już prędzej można dopuścić niezależną od prędkości, ale stałą różnicę między wartością bezwzględną ładunku protonu a ładunkiem elektronu, (choć teoretycy z obrzydzeniem patrzą na taką podejrzliwość – runęłyby wszelkie podstawy rozumienia elektrodynamiki jako rezultatu pewnej subtelnej symetrii). Oczywiście na bardzo dalekim miejscu po przecinku.

Przy takim założeniu próbka neutralnej materii, musiałaby zawierać stosowną proporcję jonów. Np. 10^{23} protonów i 10^{23}+100 elektronów (gdyby ładunek protonu wynosił (1+1/1000 000 000 000 000 000 000) ładunku elektronu. Te sto elektronów uczepione atomów oznaczałoby istnienie pewnej liczby jonów ujemnych i pewnej liczby swobodnych elektronów (w sumie 100) w próbce 1/6 mola gazu szlachetnego).

Robiono taki eksperyment, w którym wypuszczano z neutralnego zbiornika gaz, ale odpowiednia para elektrod blisko wylotu, **uniemożliwiała,** by wydostał się jakikolwiek jon! Wylatywały całe atomy **wynosząc hipotetyczną** różnicę ładunku. Na końcu zostać by musiała tylko ta setka jonów (i jakiś mały ułamek początkowych atomów, np. 1% co dawałoby łączny ładunek 99 porcji). Taka liczba ładunków elementarnych w kuli o promieniu 1cm wytworzyłaby napięcie 14 μV. Już do wykrycia, **gdyby co.** Zauważcie. **Rozważaliśmy hipotetyczną różnicę na 21 miejscu po przecinku.** A żadnego „ładowania przez opróżnianie” nie zaobserwowano. Gdyby wkład do prawa Gaussa miał się zmieniać wraz z prędkością tak, jak się zmienia wkład do pola grawitacyjnego szalejącej cząstki, „ładowanie przez wypuszczanie” byłoby **milion milionów miliardów silniejsze.**

Z drugiej strony mamy doświadczenie Etvösa mówiącego coś dokładnie przeciwnego o masach. Każdy ruch, czy oddziaływanie zmieniający energię (tej samej cząstki) odbija się na jej masie bezwładnej i natychmiast na sile oddziaływania (by przyspieszenie ani drgnęło)! I to, z kolei, z dokładnością co najmniej **jednej milionowej milionowej**

Powiedzmy więc sobie od razu, korzystając z naszego rozumienia związku masy z energią spoczynkową złożonego ciała, że w prawie Gaussa powinniśmy pisać nie gęstość masy a gęstość energii **dzielonej przez c^2.**

Nowo wprowadzony przeze mnie wkład, wyznaczony – **co podkreślam** – zupełnie bez odwoływania się do energii, czy XIX wiecznego prawa Gaussa, zawiera akurat takie c^2 w mianowniku i jeśli jeszcze pomnożyć i podzielić to przez $-4\pi G$, można już próbować $-\frac{\vec{g}^2}{4\pi G}$ interpretować jako gęstość energii **samego pola grawitacyjnego.**

Najdziwniejsze w tym wszystkim, (co uzasadnia moją niechęć do tego rozumowania), jest to, iż klasyczna gęstość energii pola grawitacyjnego jest podobna, ale dwa razy mniejsza!. W przeciwieństwie do gęstości pola elektrostatycznego ma ona ponadto znak ujemny. Pole grawitacyjne jest **drastycznie** niepodobne do pola elektrycznego. To, że w przybliżeniu nierelatywistycznym oddziaływanie wydaje się takie podobne jest pod tym względem szalenie mylące. To dlatego relatywistyczna teoria grawitacji **jest zupełnie, zupełnie niepodobna** do relatywistycznej elektrodynamiki.

Jeśli strumień w próżni nie jest zachowany, to i w przypadku sferycznym, na zewnątrz materii gwiazdy, czy innego tworu, stosując **znalezione przeze mnie** zmodyfikowane prawo Gaussa, do obszaru między dwiema **bliskimi** sferami, dostaję:

$$-4\pi r^2 g(r) + 4\pi(r+\mathrm{d}r)^2 g(r+\mathrm{d}r) = 4\pi r^2 \sqrt{g_{rr}}\,\frac{g^2}{c^2}\,\mathrm{d}r$$

Wzięliśmy warstwę infinitezymalną. Całkowanie po powierzchniach sprowadza się do banalnego pomnożenia powierzchni sfery przez przyspieszenie. **Antycypując** krzywiznę przestrzeni, grubość warstwy potrzebnej do wyznaczenia jej objętości zapisałem jako $\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r$

$$\frac{\mathrm{d}(r^2 g(r))}{r^2\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r} = \frac{g^2}{c^2}$$

Wielkość $r^2 g(r)$ **nie jest stała**. Prawo odwrotnych kwadratów nie może być spełnione.

Powyższy wzór, który udało mi się „wydłubać" z zasady równoważności, za pomocą Pawła i Gawła, jest małą cząstką wyrafinowanych równań pola Einsteina, ale **wystarczającą** dla pełnego, ścisłego opisu pola grawitacyjnego o symetrii sferycznej.

Ta zmiana w prawie Gaussa dla przyspieszeń, to fakt niezwykłej doniosłości. To ona powoduje swoisty kryzys przyspieszeń. Przy wchodzeniu w obszar silniejszego pola, jego narastanie staje się też silniejsze, co tym bardziej przyspiesza wzrost i (okaże się), dla **skończonej wartości promienia**, przyspieszenie dąży do nieskończoności. Tak jak w przypadku jednowymiarowym, gdy zaczyna się od przyspieszenia g, w pewnym miejscu, to w odległości c^2/g od tego miejsca, w kierunku pola, dochodzi się do przyspieszenia nieskończonego i coś się musi dziać niezwykłego. To będzie słynny horyzont Schwartzschilda.