Podstawy Fizyki I – Mechanika

Zadania domowe – Seria 6 (29 listopada 2018)

Zadanie 1

Dwustopniowa rakieta startuje pionowo w stałym polu grawitacyjnym o natężeniu g. Prędkość wyrzucanych gazów względem silnka wynosi $w = const$, a zużycie paliwa wynosi $\frac{dm}{dt} = \beta$, gdzie stała $\beta < 0$. Dla i-tego członu ($i = 1, 2$) dane są: masa pustego członu m_i oraz masa zabieranego paliwa M_i.

a) Jaką maksymalną prędkość v_k uzyska drugi stopień rakiety?
b) Porównaj wynik z jednostopniową rakietą o tej samej masie startowej i zabierającej tyle samo paliwa.

Odpowiedź:

a) $v_k = w \ln \left[\frac{(m_2+M_2)(m_1+m_2+M_1+M_2)}{m_2(m_1+m_2+M_2)} \right] - g\frac{M_1+M_2}{|\beta|}$
b) $v_{k,jednostopniowa} = w \ln \left[\frac{m_1+m_2+M_1+M_2}{m_1+m_2} \right] - g\frac{M_1+M_2}{|\beta|}$, $v_k - v_{k,jednostopniowa} = w \ln \left[\frac{(m_2+M_2)(m_1+m_2)}{m_2(m_1+m_2+M_2)} \right]$

Zadanie 2

Wiotka lina o długości L i masie M leży na stole i sięga kantu. W pewnej chwili do końca liny doczepiono masę m i całość zaczęła się zsuwać. Znajdź ruch końca liny pomijając tarcie.

Odpowiedź: $y(t) = \frac{m}{M} L[\cosh\left(\sqrt{\frac{Mg}{(M+m)L}} t\right) - 1]$

Zadanie 3

Na równi pochyłej leży dywan, szorstki od spodu i śliski od góry. Tarcie wystarcza do utrzymania dywanu na pochyłości. W pewnym momencie róg dywanu zawinięto i część zawinięta zaczęła się zsuwać ze stałym przyspieszeniem a. Ile wynosi a, jeśli kąt nachylenia równi wynosi α?

Odpowiedź: $a = \frac{g\sin(\alpha)}{3}$

Zadanie 4

Nierelatywistyczna cząstka o masie m porusza się w stałych, jednorodnych polach: elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ i magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ takich, że $\vec{E} \perp \vec{B}$, oraz $\vec{B}||\hat{e}_z$ i $\vec{E}||\hat{e}_x$. Prędkość początkowa cząstki jest prostopadła do $\vec{B}$. Znajdź ogólne postaci $\vec{r}(t)$ i $\vec{v}(t)$, jeśli w ośrodku występuje siła oporu $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$, gdzie stała $\alpha > 0$.

Wskazówka: Aby rozwiązać równania ruchu we współrzędnych x, y wygodnie jest wprowadzić pomocniczą zmienną zespoloną $z = \binom{x}{y} = x + iy$.

Odpowiedź:

$x(t) = x_0 + \frac{v_0 e^{-\beta t}}{\beta^2+\omega_0^2}(-\beta\cos(\omega_0 t + \phi) + \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)) + \frac{e\beta}{m}\frac{E\cdot t}{\beta^2+\omega_0^2}$,

$y(t) = y_0 + \frac{v_0 e^{-\beta t}}{\beta^2+\omega_0^2}(-\beta\sin(\omega_0 t + \phi) + \omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi)) - \frac{e\omega_0}{m}\frac{E\cdot t}{\beta^2+\omega_0^2}$,

$v_x(t) = v_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_0 t + \phi) + \frac{e\beta}{m}\frac{E}{\beta^2+\omega_0^2},$
$v_y(t) = -v_0 e^{-\beta t}\sin(\omega_0 t + \phi) - \frac{e\omega_0}{m}\frac{E}{\beta^2+\omega_0^2}$
$\omega_0 = \frac{qB}{m},\ \beta = \frac{\alpha}{m}$

Zadanie 5

Klocek uderza z prędkością $v_\circ$ pod kątem α w płaską powierzchnię przy współczynniku tarcia f w taki sposób, że jego podstawa jest równoległa do tej powierzchni. Oblicz kąt odbicia β i prędkość końcową v klocka.

Odpowiedź: $\tan(\beta) = \tan(\alpha) - 2f,\ v = v_0\sqrt{1 + 4f\cos(\alpha)(f\cos(\alpha) - \sin(\alpha))}$