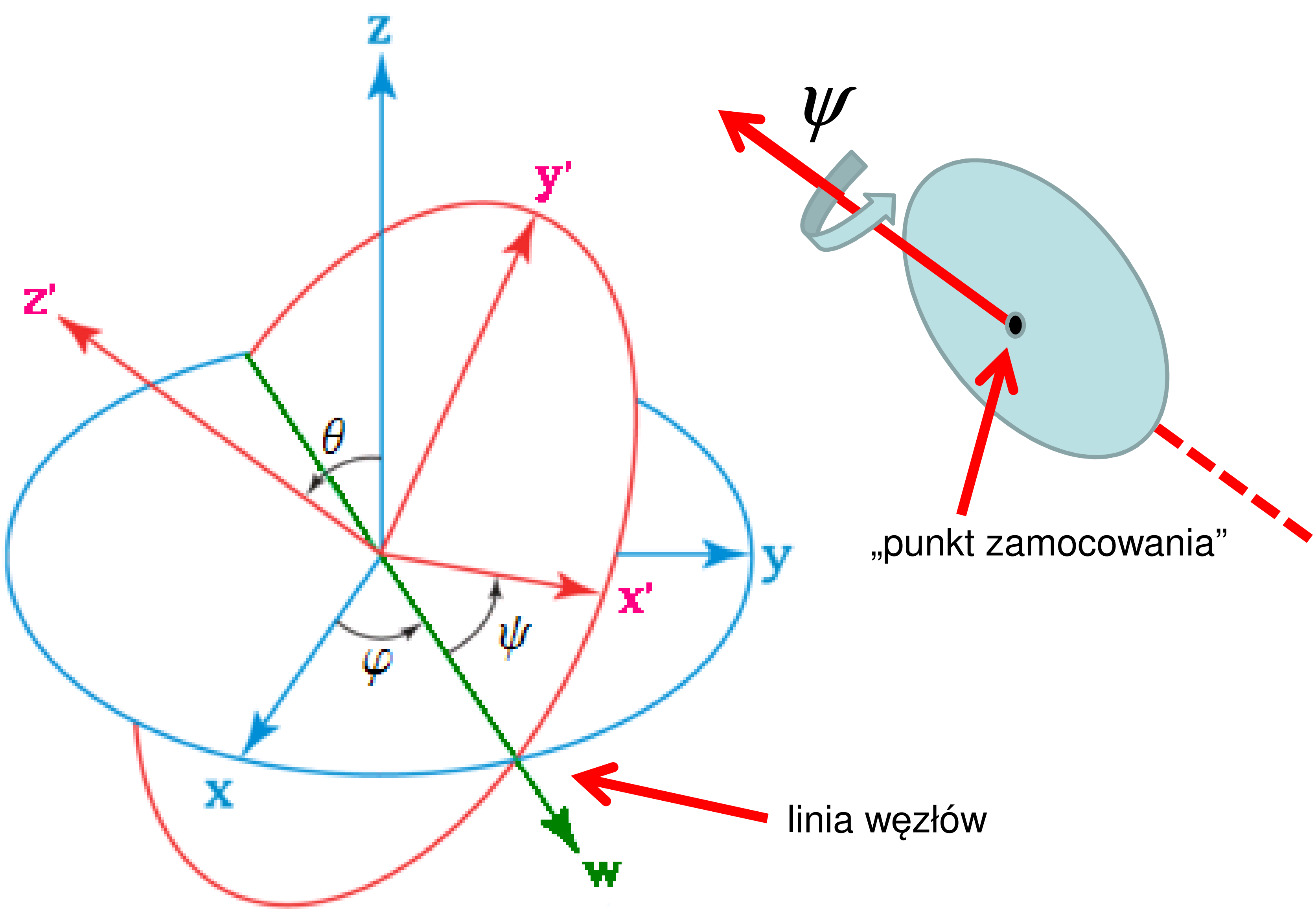
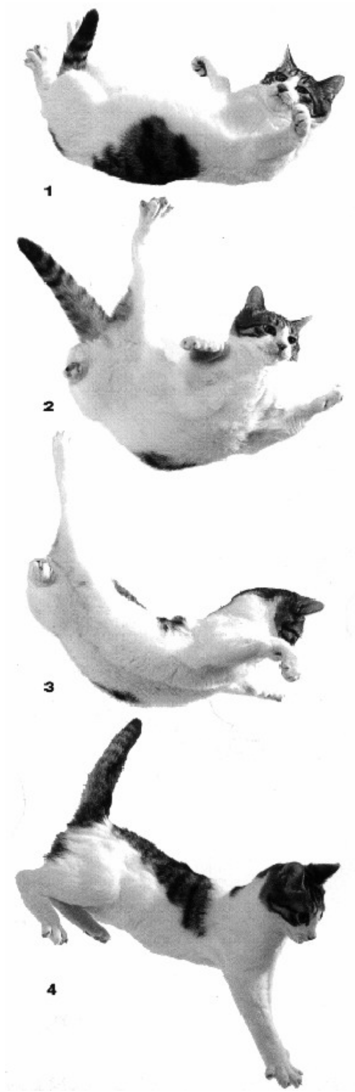


http://pl.wikipedia.org/


©2004 JUBI


SSI.SLUPSK.PL



http://suppiya.wordpress.com/2008/04/06/falling_cat/

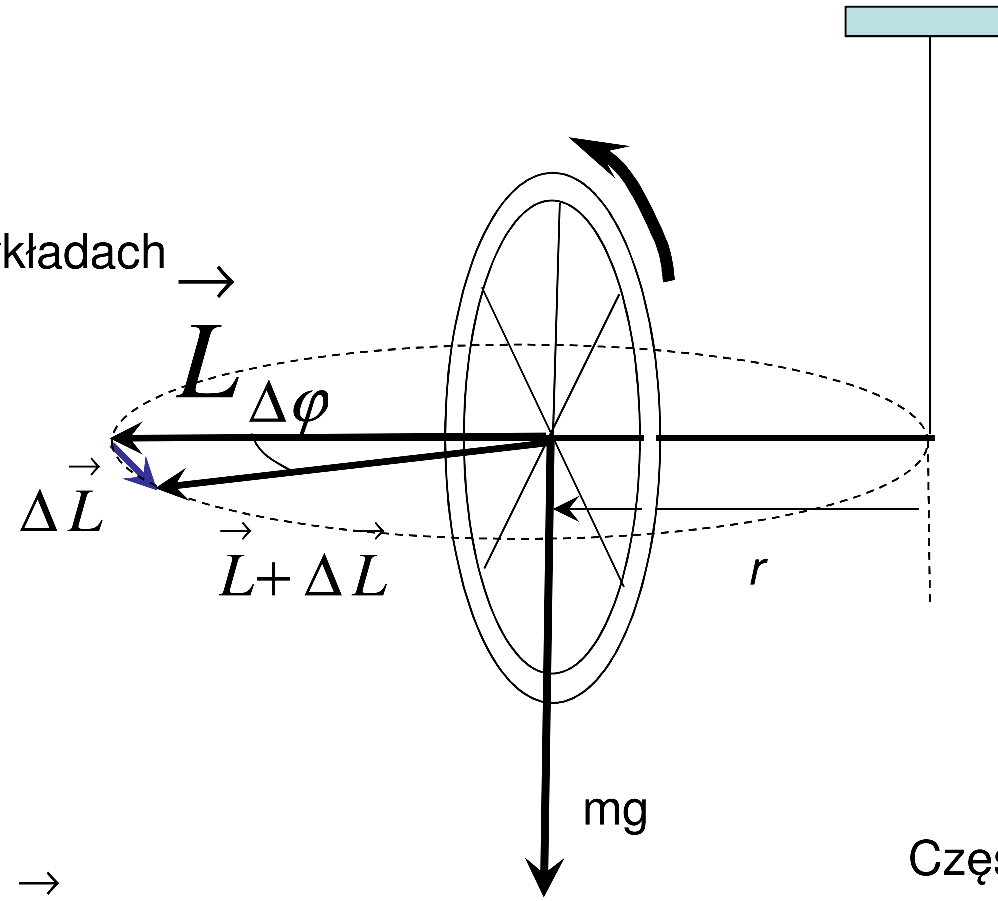
Warunek równowagi bryły sztywnej:

Znikanie sumy sił przyłożonych i sumy momentów sił przyłożonych.

Precesja koła rowerowego

$$\vec{L} \equiv \vec{J}$$

Oznaczenia na poprzednich wykładach



$$\Delta\varphi = \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} = \vec{M}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{\Delta\vec{L}}{\Delta t} \perp \vec{r} \perp \vec{F}$$

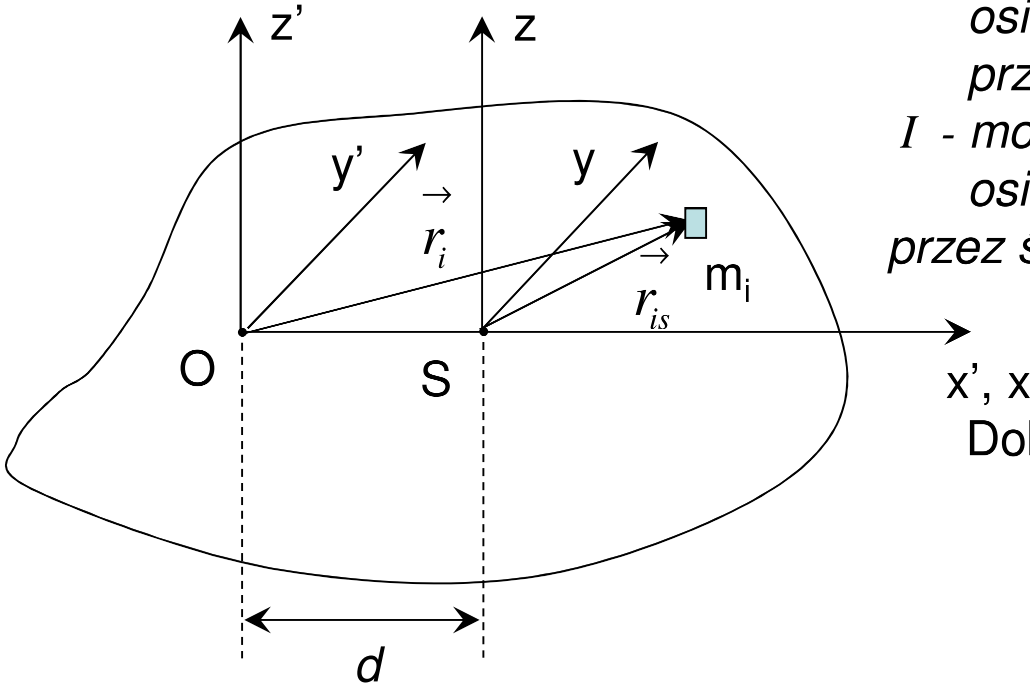
Częstość precesji:

$$\boxed{\Omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{mgr}{L}}$$

Niezwykłe własności żyroskopów

- Kolej jednoszynowa
- Kompas żyroskopowy

Twierdzenie Steinera



I_s - *moment bezwładności względem osi równoległej do osi* ***z*** *przechodzącej przez środek masy S*

I - *moment bezwładności względem osi równoległej do osi przechodzącej przez środek masy i odległej od niej o d.*

$$I = \sum m_i[(x_i^{'})^2 + (y_i^{'})^2]$$

Dobieramy osie układów wsp. tak aby:

$$x_i^{'} = x_{is} + d$$

$$y_i^{'} = y_{is}, \;\; z_i^{'} = z_{is}$$

$$I = \sum m_i[(x_{is} + d)^2 + y_{is}^2] = \sum m_i(x_{is}^2 + 2x_{is}d + d^2 + y_{is}^2) =$$

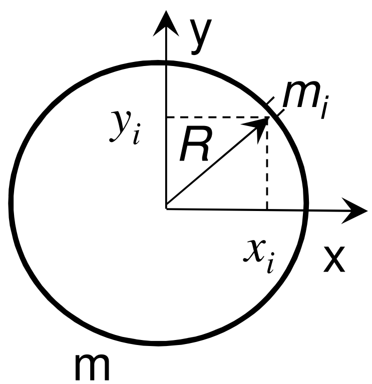
$$= \sum m_i(x_{is}^2 + y_{is}^2) + 2d\sum m_i x_{is} + d^2 \sum m_i$$

Z definicji układu środka masy: $\sum m_i x_{is} = 0$

Stąd: $\boxed{I = I_s + md^2}$

Obliczanie momentów bezwładności prostych brył

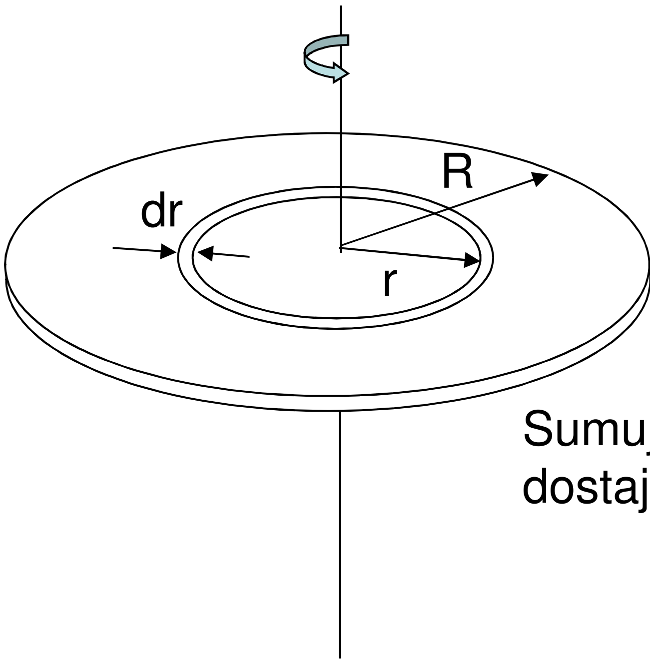
- korzystanie z symetrii
- całkowanie
- skalowanie i tw. Steinera



Obręcz o promieniu R i masie m
Moment bezwładności względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, prostopadłej do płaszczyzny obręczy.
Dzielimy obręcz na kawałeczki o masie m_i

$$I = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i R^2 = mR^2$$

Płaski krążek



Dzielimy krążek na cienkie obręcze
o promieniu *r* i szerokości *dr.*

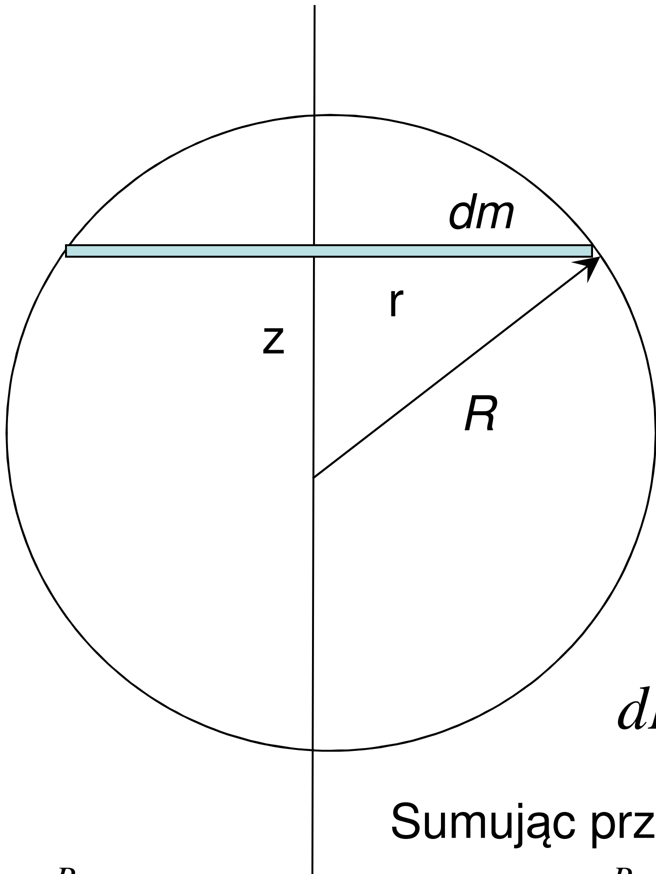
Moment bezwładności takiego pierścienia:

$$dI = dm\, r^2 = 2\pi r \frac{m}{\pi R^2} dr\, r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 dr$$

Sumując przyczynki od obręczy dla wszystkich *r* 0 do *R* dostajemy:

$$I = \frac{2m}{R^2}\int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2}\frac{1}{4}(R^4 - 0^4) = \frac{1}{2} m R^2$$

Moment bezwładności kuli



Dzielimy kulę o masie *m* na cienkie krążki o promieniu *r* i wysokości *dz* każdy.

Masa takiego krążka

$$dm = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi r^2 dz = \frac{3m}{4R^3} r^2 dz$$

Moment bezwładności krążka:

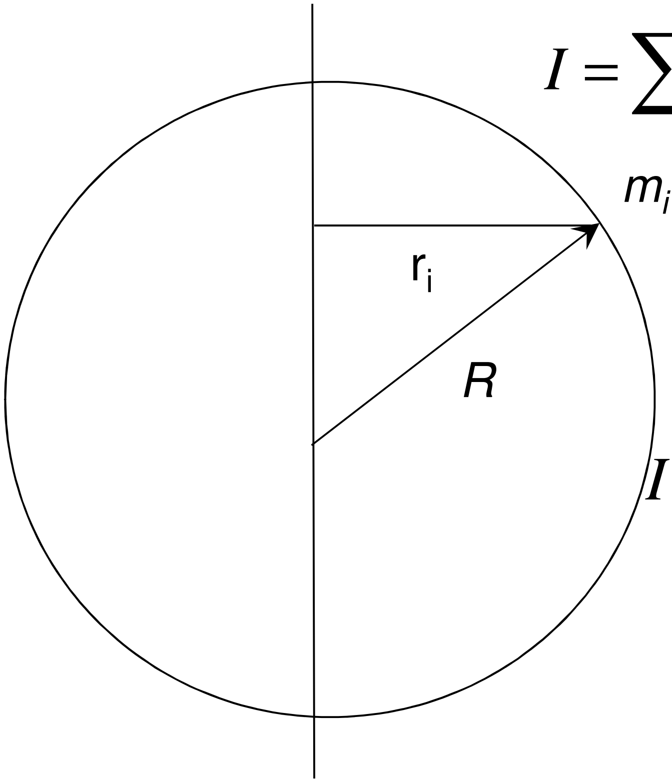
$$dI = \frac{1}{2}\frac{3m}{4R^3} r^4 dz = \frac{3m}{8R^3}(R^2 - z^2)^2 dz$$

Sumując przyczynki od krążków dla różnych *z* dostajemy :

$$I = \frac{3m}{8R^3}\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)^2 dz = 2\frac{3m}{8R^3}\int_{0}^{R}(R^2 - z^2)^2 dz = \frac{3m}{4R^3}\int_{0}^{R}(R^4 - 2R^2z^2 + z^4)dz$$

$$I = \frac{3m}{4R^3}(R^4R - 2R^2\frac{1}{3}R^3 + \frac{1}{5}R^5) = \frac{3}{4}mR^2(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \frac{2}{5}mR^2$$

Moment bezwładności sfery



$$I = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2$$

Z symetrii:

$$\sum m_i x_i^2 = \sum m_i y_i^2 = \sum m_i z_i^2$$

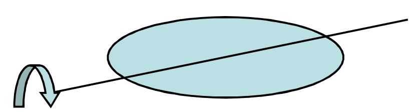
Zatem:

$$I = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = \frac{2}{3} \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

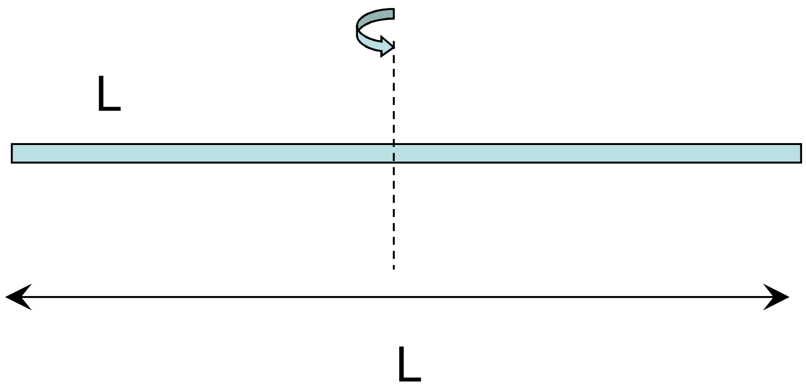
Ponieważ: $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = R^2$

$$I = \frac{2}{3} R^2 \sum m_i = \frac{2}{3} m R^2$$

Ten sposób można stosować do obliczania momentów bezwładności innych brył, np.. do obliczenia momentu bezwładności krążka względem osi pokrywającej się z jego średnicą, wykorzystując fakt, że znamy moment bezwładności względem osi prostopadłej do jego powierzchni…



Symetria i skalowanie



Moment bezwładności można często wyznaczyć posługując się argumentami skalowania i tw. Steinera

Obliczmy moment bezwładności pręta o masie m i długości *L,* względem osi prostopadłej przechodzącej przez jego środek masy

Korzystając z analizy wymiarowej dochodzimy do wniosku, że moment ten powinien mieć postać:

$$I = \alpha m L^2$$

α - pewien współczynnik bezwymiarowy

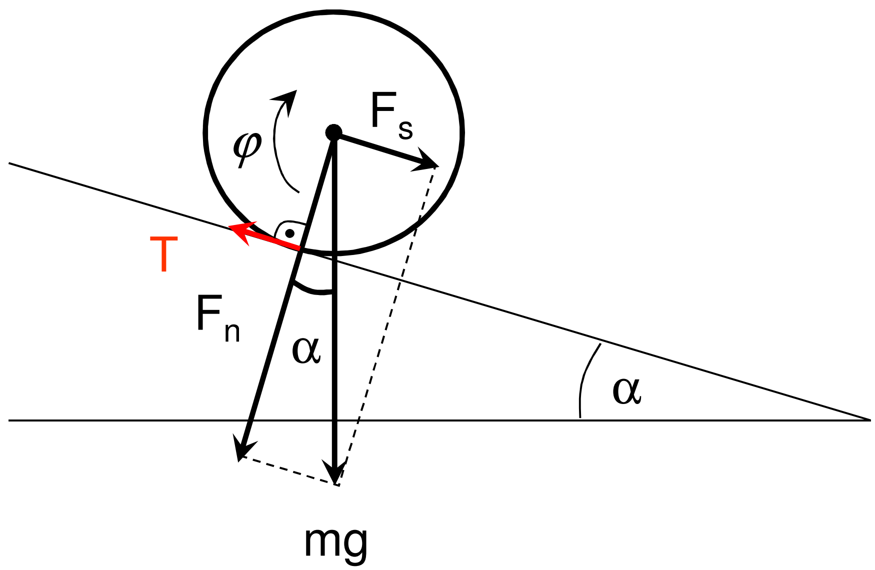
Podzielmy w myśli pręt na dwie równe części i obliczmy (korzystając z tw. Steinera) ich sumaryczny moment bezwładności względem środka pręta:

$$I_1 = 2\left[\alpha \frac{m}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{m}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2\right] = \alpha \frac{mL^2}{4} + \frac{mL^2}{16}$$

Ale ***I*=*I*$_1$** $\Longrightarrow$ $\alpha m L^2 = \alpha \frac{mL^2}{4} + \frac{mL^2}{16}$ $\Longrightarrow$ $\alpha = \frac{1}{12}$ $\Longrightarrow$ $I = \frac{1}{12} m L^2$

Toczenie bez poślizgu…

…jako obrót względem chwilowej osi obrotu



$$I\frac{d\omega}{dt} = M \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M \qquad I\varepsilon = M$$

ε- przyspieszenie kątowe

$$M = R_\perp F = RF_\perp = mgR\sin(\alpha)$$

$$\Downarrow$$

$$\varepsilon = \frac{mgR\sin(\alpha)}{I}$$

toczenie bez poślizgu to $\omega = \frac{v}{R}$

$$\varepsilon = \frac{a}{R} \Rightarrow a = \frac{mR^2}{I} g\sin(\alpha)$$

I – moment bezwładności względem chwilowej osi obrotu

Z tw. Steinera $\boxed{I = I_s + mR^2}$ $\Rightarrow$

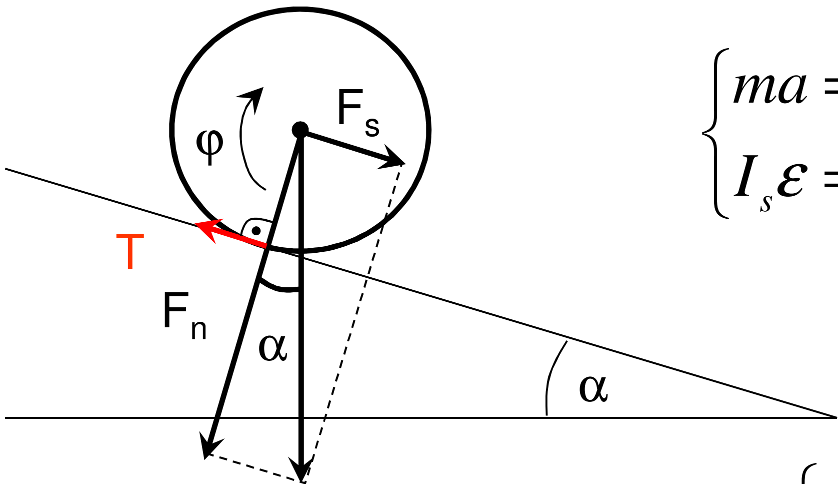
$I = \frac{3}{2}mR^2$ dla walca

$I = 2mR^2$ dla obręczy

Obręcz toczy się wolniej!

I_s – moment bezwładności Względem środka masy

Jeśli chcemy znać wartość siły tarcia…
Toczenie jako złożenie ruchu obrotowego i postępowego…



$$\begin{cases} ma = mg\sin(\alpha) - T & \Leftarrow \text{ ruch postępowy} \\ I_s\varepsilon = TR & \Leftarrow \text{ ruch obrotowy względem środka masy} \end{cases}$$

toczenie bez poślizgu $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$

$$\begin{cases} ma = mg\sin(\alpha) - T \\ T = \dfrac{I_s}{R^2}a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{mR^2}{I_s + mR^2} g\sin(\alpha) \\ T = \dfrac{I_s}{R^2}a \end{cases}$$

Walec

$$\begin{cases} a = \dfrac{2}{3} g\sin(\alpha) \\ T = \dfrac{1}{3} mg\sin(\alpha) \end{cases}$$

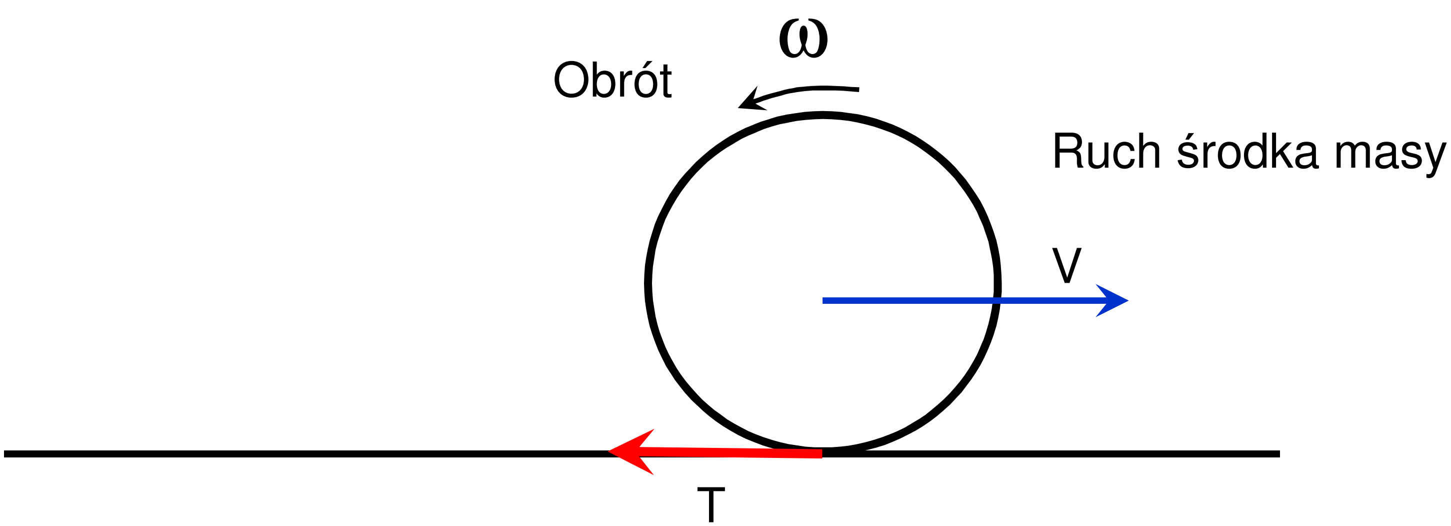
Obręcz

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} g\sin(\alpha) \\ T = \dfrac{1}{2} mg\sin(\alpha) \end{cases}$$

Toczenie bez poślizgu gdy $T<T_{max}$!!!

Żeby toczenie odbywało się bez poślizgu, siła tarcia musi mieć odpowiednią wartość! Zwiększając kąt α przy danym współczynnika tarcia f można doprowadzić do poślizgu…(sprawdzamy eksperymentalnie dla walca i obręczy) Wtedy siła tarcia przyjmuje maks. wartość $T_{max} = fmg\cos(\alpha)$

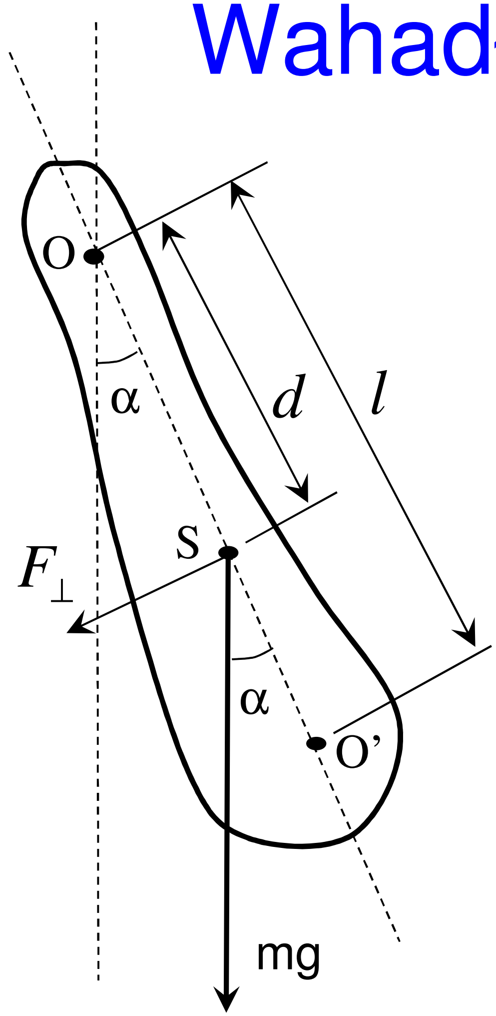
Ruch obręczy – przykład połączenia ruchu postępowego i obrotowego



Obręcz wraca …

- ruch z poślizgiem (T=Tmax)
- ruch bez poślizgu (wartość siły tarcia dostosowuje się do sytuacji….)

Wahadło fizyczne



O – punkt zawieszenia wahadła

d - odległość od punktu zawieszenia do środka masy

I – moment bezwładności względem O

$$I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = M \qquad M = -F_\perp d$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{mgd}{I}\sin(\alpha)$$

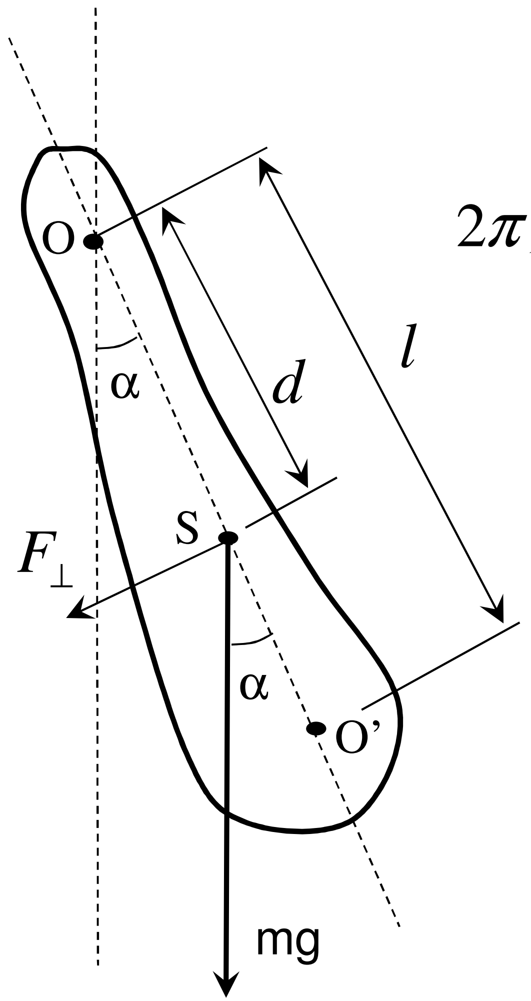
Dla małych kątów *α:*

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\alpha = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego

Częstość drgań $\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$ Okres drgań $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}$

Wahadło rewersyjne



Jaką długość *l* musi mieć wahadło matematyczne, aby miało okres *T* identyczny z wahadłem fizycznym?

$$2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \boxed{l = \frac{I}{md}}$$

długość zredukowana wahadła fizycznego

Jaki okres będzie miało wahadło fizyczne jeśli zawiesimy je w punkcie *O'* odległym o *l* od punktu *O*?

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{I'}{mg(l-d)}}$$

I' – moment bezwładności względem *O'*
z twierdzenia Steinera:

$$I' = I_s + m(l-d)^2 \qquad I = I_s + md^2$$

Czyli: $$I_s = I - md^2 = lmd - md^2 = md(l-d)$$

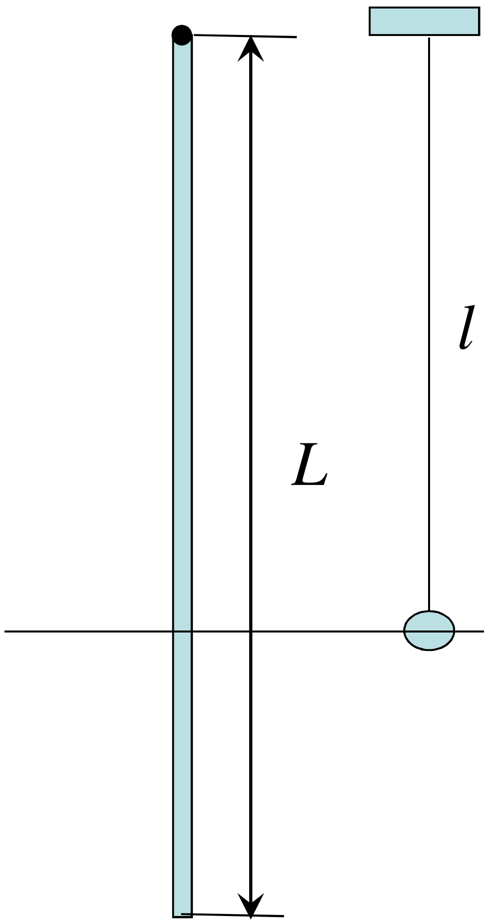
$$I' = md(l-d) + m(l-d)^2 = m(l-d)l$$

Zatem: $$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m(l-d)l}{mg(l-d)}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = T$$

$\boxed{T=T'}$

Przy zawieszeniu w punktach O i O' okresy są równe!

Długość zredukowana dla pręta zawieszonego na jednym z końców



$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}} \qquad I = \frac{1}{3}mL^2 \quad d = \frac{L}{2}$$

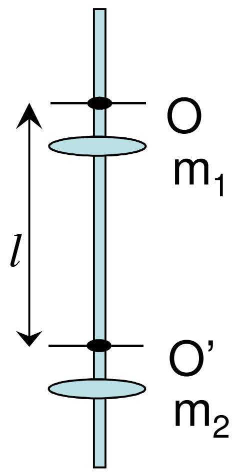
$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$ okres wahań pręta

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$ okres wahadła matematycznego

$$l = \frac{2}{3}L$$

Zawieszając obok siebie pręt i kulkę na nitce o długości 2/3 *L* można się przekonać, że okresy ich drgań są równe...

Wahadło rewersyjne



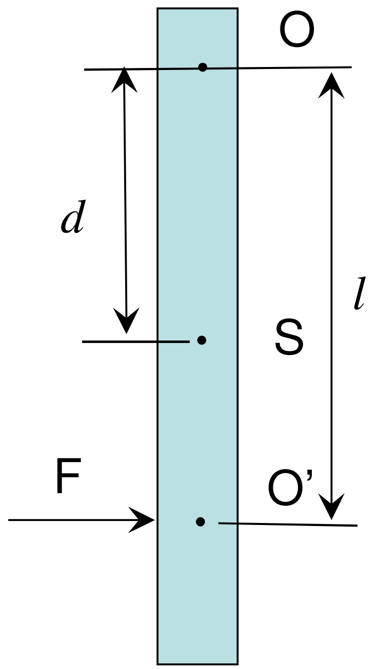
Wahadło składa się z pręta zaopatrzonego w dwie stałe osie pryzmatyczne *O* i *O'* (osie pryzmatów zwrócone do środka) Przesuwając masy m_1 oraz m_2 można zmienić położenie środka ciężkości wahadła. Masy przesuwamy dopóty, dopóki okresy wahań wokół osi O i O' nie zrównają się, wtedy Odległość OO' będzie odpowiadała długości zredukowanej wahadła fizycznego l. Znając odległość OO'= l oraz okres drgań *T* można wyznaczyć przyspieszenie ziemskie, tak jak zrobił to H. Kater w 1818 r...

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}}$$

Grawimetria – badanie zmian siły ciężkości w terenie (na jednakowym poziomie lub zależności od wysokości)
(poszukiwanie kopalin, badanie wyrobisk i innych form wewnątrz ziemi…

Dokładność współczesnych grawimetrów – 10^{-8} g = 0,01 mGal (1 Gal = 0,01 N/kg)

Uderzenie bryły



W jakiej odległości od punktu O należy uderzyć bryłę, aby bryła podczas uderzenia dokonała obrotu wokół punktu O?

Ruch postępowy środka masy:

$$F = ma = m\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} \Longrightarrow Fl = ml\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t}$$

Aby ruch środka masy można było opisać jako obrót wokół punktu O to powinien być spełniony związek:

$$\Delta \upsilon = d\Delta\omega$$

d – odległość środka masy od punktu O
$\Delta\omega$ - przyrost prędkości obrotowej bryły

$$Fl = mld\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Fl – moment siły F względem punktu O, więc powinno być spełnione dla ruchu obrotowego bryły…

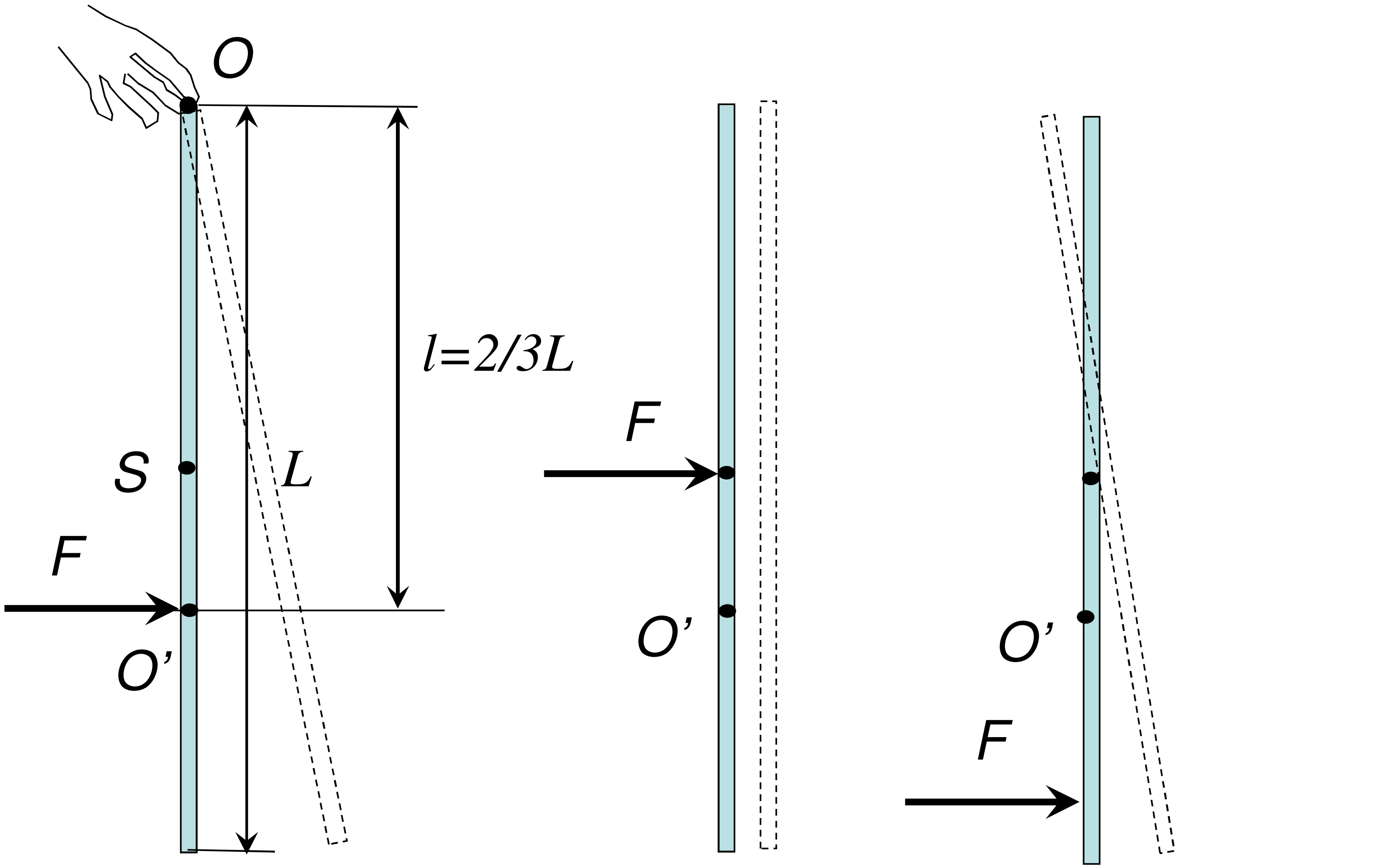
$$Fl = I\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Zatem:

$$l = \frac{I}{md}$$

Czyli bryłę należy uderzyć dokładnie w odległości równej długości zredukowanej wahadła fizycznego...

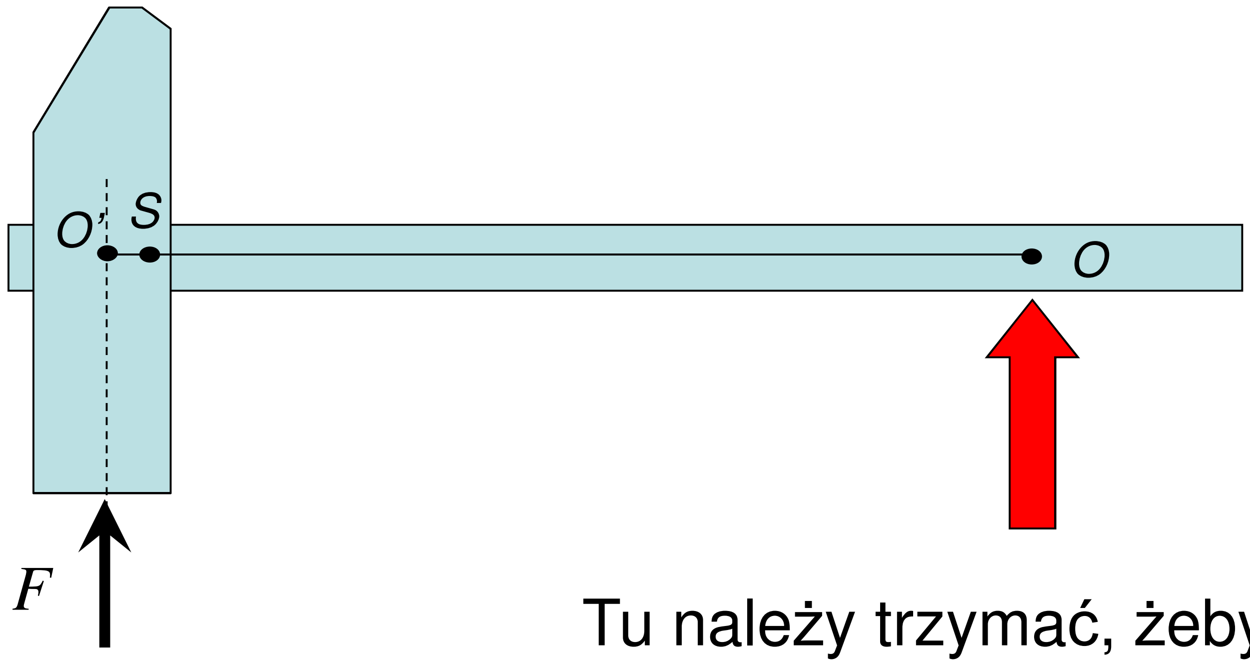
Uderzenie pręta



obrót wokół końca | ruch postępowy | koniec pręta się cofa…

O' – środek uderzenia pręta (trzymanego na końcu)

Trzeba uważać gdzie się trzyma młotek…



Tu należy trzymać, żeby nie bolało!