Wyznaczenie momentu bezwładności przy użyciu wahadła torsyjnego

Wahadło torsyjne

Równanie ruchu obrotowego krążka

$$I_0 \frac{d^2\alpha}{dt^2} = M$$

I_0 – moment bezwładności krążka
M – moment siły
D – moment kierujący

$$M = -D\alpha$$

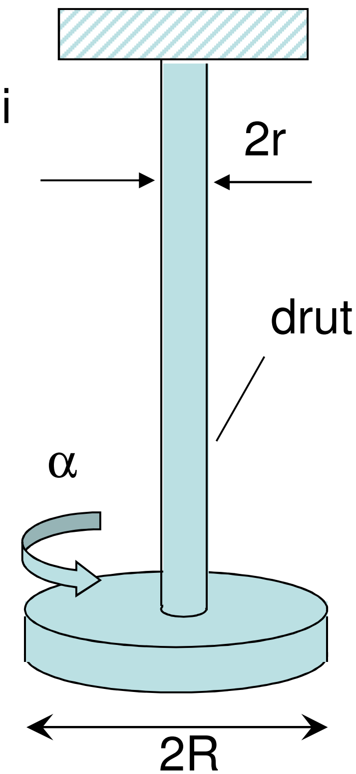
$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{D}{I_0}\alpha = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego

$$\Downarrow$$

$$\alpha = A\sin(\omega t + \varphi)$$



Częstość kołowa $\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$

Okres drgań $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$

$\Rightarrow$

1) Informacja o momencie bezwładności
2) Informacja o własnościach sprężystych drutu

Wahadło torsyjne

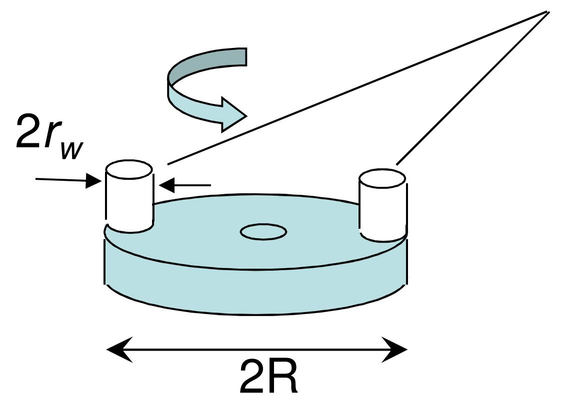
Nowy moment bezwładności
z tw. Steinera:

Dwa walce o masie *m*
Moment bezwładności walca względem osi
$I_w = 1/2mr^2$

$$I_1 = I_0 + 2[m(R-r)^2 + \frac{1}{2}mr^2]$$

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}}$$



Wyznaczając doświadczalnie T_0 oraz T_1 znajdziemy D oraz nieznany moment bezwładności I_0

Podczas drgań wahadła zachodzi odkształcenie drutu polegające na ścinaniu…

Odkształcenia sprężyste

Sprężystość (elastyczność) – własność powodująca, że odkształcone ciało dąży do stanu początkowego.

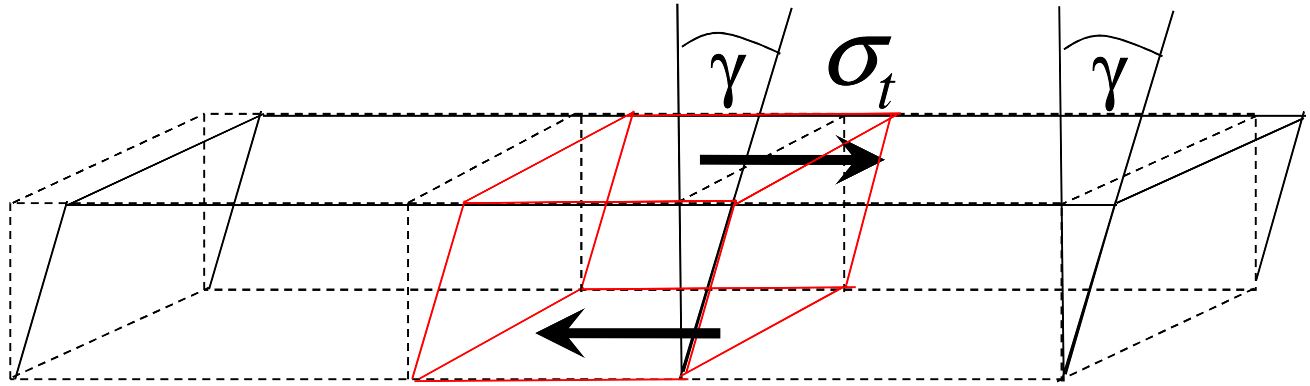
Dla idealnie sprężystych ciał naprężenia w nich wywoływane są jednoznacznymi funkcjami odkształceń.

Przy niewielkich odkształceniach własności ciał stałych
można opisywać traktując je jak ciała idealnie sprężyste, wtedy, jak to wykrył R. Hooke dla prostych odkształceń, odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia (sprawdźmy czy ono działa…).

… a potem zajmijmy się przypadkiem odkształcenia postaci bez zmiany objętości jakim jest tzw. ścinanie…

Ścinanie

Rozważmy kostkę prostopadłościenną przyklejonej do podłoża*



Każdy element górnej powierzchni kostki poddany jest naprężeniu stycznemu…

$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

F – siła działająca stycznie do górnej powierzchni kostki
S – powierzchnia górnej ścianki kostki

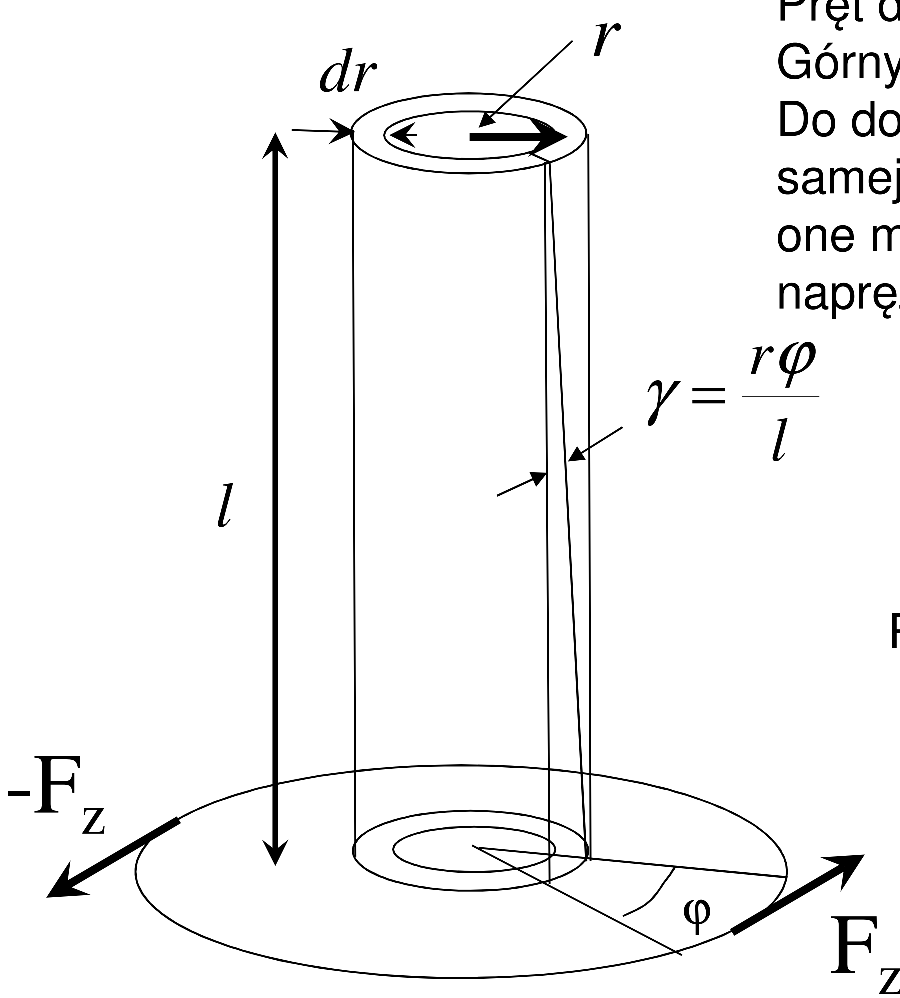
Odkształcenie kostki polega przesunięciu górnej ścianki w kierunku naprężenia, bez zmiany kształtu tej ścianki. Ścianka przednia i tylna przyjmują kształt równoległoboków, ścianki boczne pochylają się o kąt γ

W tym wypadku prawo Hooke'a ma postać: $\boxed{\gamma = \frac{\sigma_t}{G}}$ *G – moduł sztywności*

*Aby naprężenia powstające na brzegach nie miały znaczenia wysokość kostki powinna być znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów

Skręcanie (ścinanie) pręta

Pręt dzielimy na rurki o promieniu *r* i grubości *dr*
Górny koniec rurki jest zamocowany.
Do dolnego końca przykładamy parę sił o tej samej wartości i przeciwnych zwrotach – tworzą one moment skręcający pręt, który równoważą naprężenia ścinające powstałe w pręcie.



Każdy element rurki ulega ścinaniu o kąt γ

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$ *G – moduł sztywności*

Ponieważ

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l}$$

φ - *kąt skręcenia końca rurki*
l – długość rurki

Zatem naprężenie ścinające:

$$\sigma_t = \frac{r\varphi}{l} G$$

Skręcanie pręta

Moment sił sprężystości
równoważący moment sił zewnętrznych:

$$\sigma_t = \gamma G = \frac{r\varphi}{l} G$$

$$dM = \Delta F r$$

$$dM = \sigma_t \Delta S \, r$$

$$dM = \sigma_t \, 2\pi r \, dr \, r$$

$$\boxed{\sigma_t = \frac{\Delta F}{\Delta S}}$$

z definicji
naprężenia ścinającego

$$dM = \frac{r\varphi}{l} G \, 2\pi r^2 dr$$

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi \, r^3 dr$$

Δ F – siła styczna
ΔS – powierzchnia
przekroju rurki

Sumując przyczynki od rurek o różnych promieniach
dostajemy całkowity moment sił sprężystości równoważący
moment sił zewnętrznych

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} \varphi = D\varphi$$

$$\boxed{D = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} = \frac{G}{l} J}$$

D – moment kierujący
J – geometryczny moment bezwładności

$$\boxed{J = \iint_S r^2 dS}$$

Badając drgania torsyjne wahadła fizycznego możemy wyznaczyć moduł sztywności G materiału, z którego wykonany jest drut…

Materiał	Moduł sztywności GPa	Współczynnik Poissona
guma	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.46-0.49
miedź	40-48	0.35
stal	82	0.29
wolfram	132	0.17
szkło	17-30	0.2-0.3

Skręcanie wałów napędzających maszyny

Moc przekazywana przez wał napędowy:

P=Mω

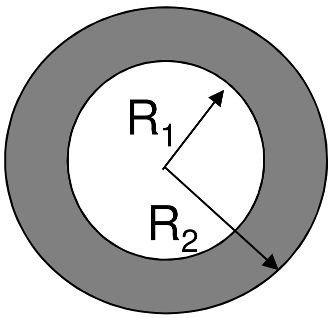
$$M = I\frac{d\omega}{dt}$$

$$P = \frac{d}{dt}(E_k) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right) = I\omega\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{dt}\omega = M\omega$$

Zamiast wałów stosuje się czasem rury…

$$M = \frac{2\pi G}{l}\varphi\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{G}{l}\frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}\varphi = \frac{G}{l}J_r\varphi$$

$$J_r = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$



Jaki powinien być promień zewnętrzny R_2 rury o promieniu wewnętrznym R_1, aby dawała ona taki sam moment skręcający jak pręt o promieniu R_1

$$\frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$

$$R_2 = \sqrt[4]{2}R_1 \cong 1{,}19$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2}R_1^2 - R_1^2}{R_1^2} = \sqrt{2} - 1$$

Warto używać pustych wałków!

Sprężyna

Przy rozciąganiu sprężyny drut, z którego jest ona wykonana ulega skręceniu o kąt α (nie jest to jednak tak proste jakby się wydawało – trudno zauważyć skręcenie drutu, gdy rozciągamy sprężynę – jak to się dzieje - patrz dodatek).

$$\varphi = \frac{\Delta h}{R_s}$$

R_s – *promień sprężyny*

Skręcenie to wywoła pojawienie się momentu siły:

$$M = \frac{\pi r^4}{2}\frac{G}{l}\varphi$$

r – promień drutu
l – długość drutu

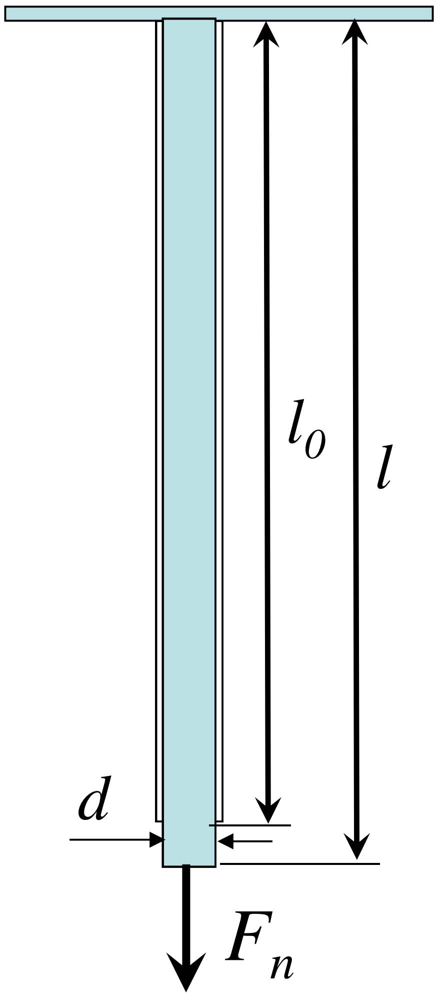
Moment sił sprężystości równoważy moment siły zewnętrznej *F* przyłożonej dokładnie wzdłuż osi sprężyny

$$M = R_s F$$

Łącząc powyższe wzory i biorąc pod uwagę, że długość drutu sprężyna wynosi $l = 2\pi N R_s$ (gdzie N – liczba zwojów sprężyny) dostajemy ostatecznie:

$$F = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}\Delta h \qquad F_z = -k\Delta h \qquad k = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}$$

Rozciąganie drutu



Wydłużenie względne: $$\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$$

Prawo Hooke'a (*dla niewielkich odkształceń*):

$$\boxed{\varepsilon = \frac{\sigma}{E}}$$

σ- *naprężenie normalne*
E – moduł Younga

$$\sigma = \frac{F_n}{S} \qquad F_n = SE\frac{\Delta l}{l_0}$$

Przewężenie względne:

$$\varepsilon_t = -\frac{\Delta d}{d_0}$$

Dla odkształceń sprężystych:

$$\boxed{\varepsilon_t = \mu\varepsilon} \quad \text{lub} \quad \boxed{\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}}$$

μ - *współczynnik Poissona*

Moduł Younga

Materiał	Moduł Younga (E) GPa
guma	0,01-0,10
Polietylen (LDPE)	0,2
Polipropylen (PP)	1,5-2,0
Osłonka wirusa	1-3
Poli(tereftalan etylenu) (PET)	2,0-2,5
Polistyren (PS)	3,0-3,5
Nylon	2-4
Drewno dębowe (wzdłuż włókien)	11
Beton wysokiej wytrzymałości (ściskany)	30
Magnez (Mg)	45
Stop glinu (aluminium) (Al)	69
Szkło (SiO_2, Na_2CO_3, $CaCO_3$)	72

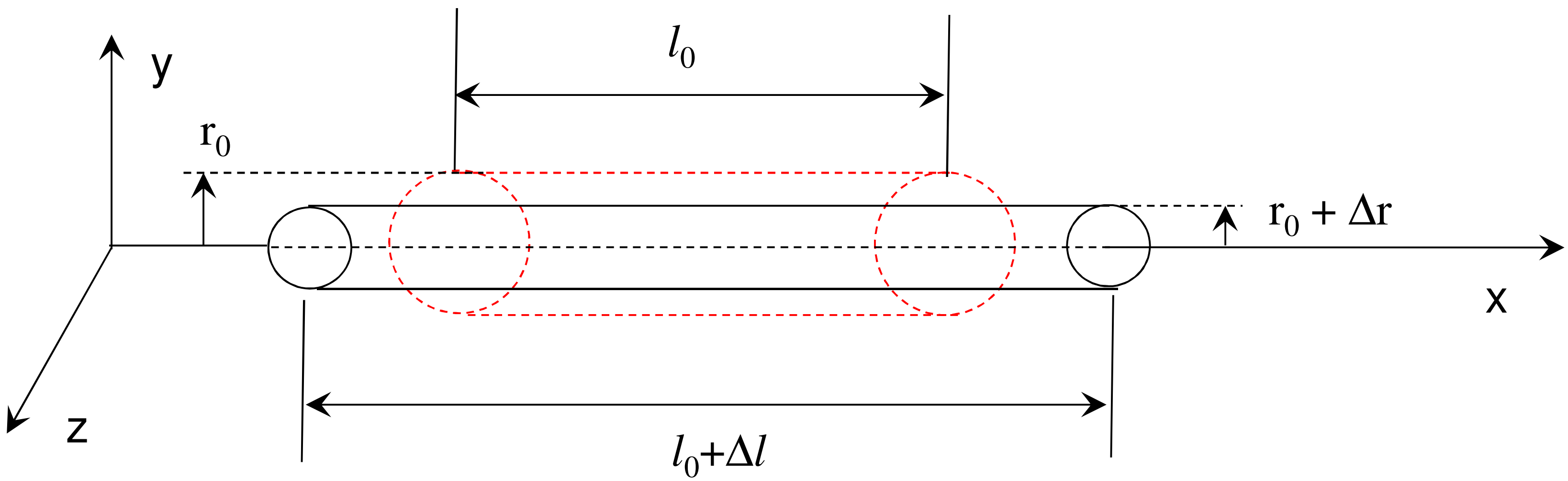
Materiał	Moduł Younga (E) GPa
Szkło (SiO_2, Na_2CO_3, $CaCO_3$)	72
Mosiądz (Cu, Zn) i Brąz (Cu, Sn)	103-124
Tytan (Ti)	105-120
Kompozyt z włókna węglowego	150
Żelazo kute i stal	190-210
Wolfram (W)	400-410
Węglik krzemu (SiC)	450
Węglik tytanu (TiC)	450-650
Miedź	100-115
Cynk	84
Ołów	16
Cyna	47
Nanorurka[1]	>1 000
Diament (C)	1 050-1 200

http://pl.wikipedia.org/

Współczynnik Poissona

Materiał	μ
Guma	0,46-0,49
Ołów	0,45
Aluminium	0,34
Stal	0,29
Szkło	0,2-0,3
Kwarc	0,2
Wolfram	0,17

Zmiana objętości pręta przy rozciąganiu



Zmiana objętości przy rozciąganiu:

$$\Delta V = \pi(r_0 + \Delta r)^2 (l_0 + \Delta l) - \pi r_0^2 l_0 =$$

$$\approx \pi r_0^2 l_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} + 2\frac{\Delta r}{r_0} \right) = V_0 \left(\frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E} \right) = V_0 \frac{\sigma}{E}(1 - 2\mu)$$

Doświadczenie pokazuje, że **$\Delta V/V \geq 0$** $\Rightarrow$ $\boxed{\mu \leq 1/2}$

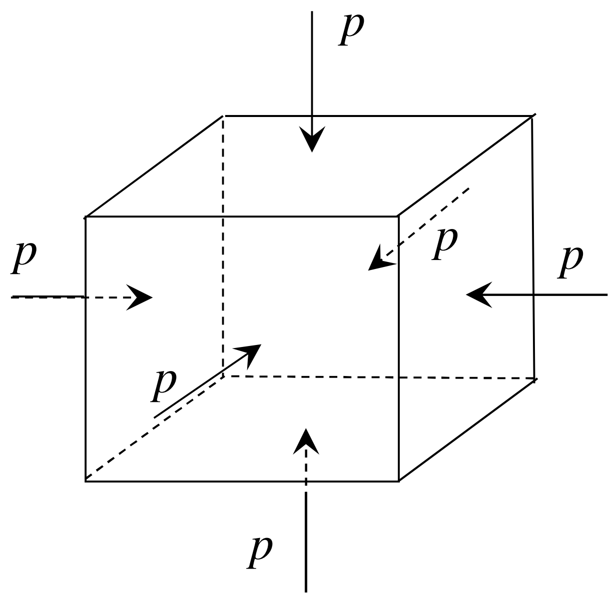
Odkształcenie objętości

Względna zmiana objętości:

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa p$$

$$K = \frac{1}{\kappa}$$

p – ciśnienie
κ- *współczynnik ściśliwości*
K – moduł ściśliwości



$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

Doświadczenie myślowe:

- każda z krawędzi ulega skróceniu o czynnik **(1-p/E)**
- jednocześnie w wyniku działania ciśnienia w kierunku poprzecznym poissonowskiemu wydłużeniu w stosunku **(1+μp/E)(1+μp/E)**

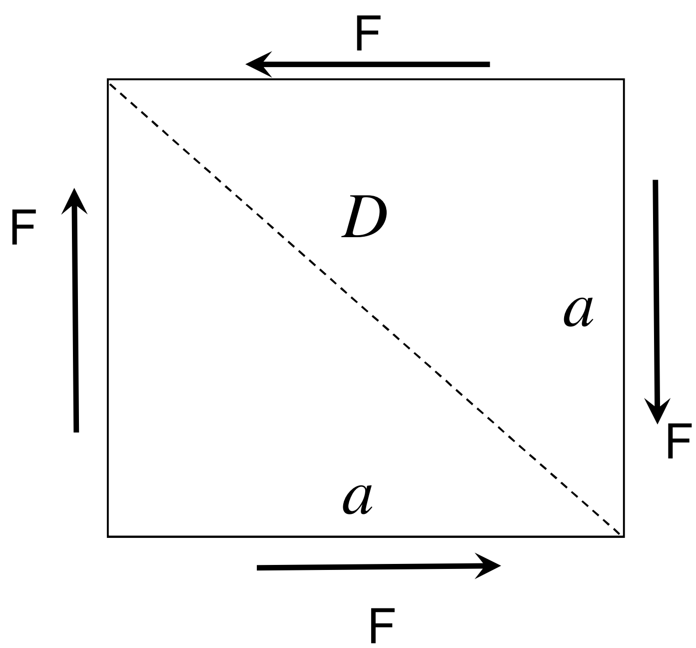
Długość krawędzi po deformacji:
$l=l_0(1-p/E)(1+\mu p/E)^2$

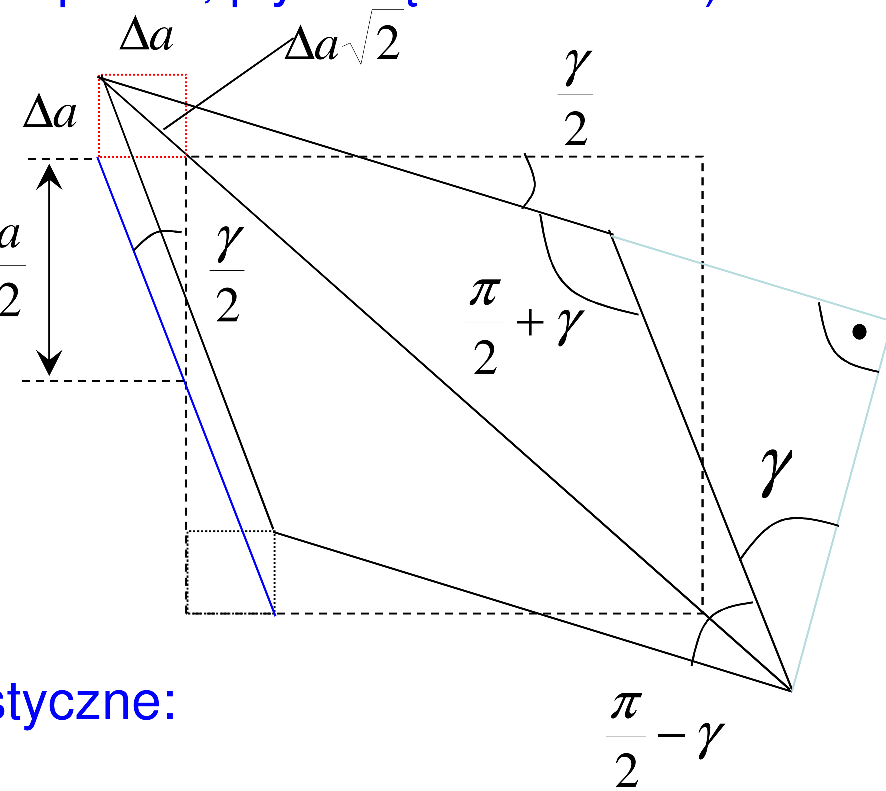
$$V = l_0^3\left(1-\frac{p}{E}\right)^3\left(1+\frac{\mu p}{E}\right)^6 \cong V_0(1-3\frac{p}{E})(1+6\frac{\mu p}{E}) \cong V_0\left(1-\frac{3(1-2\mu)}{E}p\right)$$

$$\boxed{-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1-2\mu)}{E}p} \Rightarrow \boxed{\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E} \text{ lub } K = \frac{E}{3(1-2\mu)}}$$

Związek pomiędzy modułem Younga i modułem sztywności.

Rozważmy ścinanie płytki…(w poziomie i w pionie, płyta się nie obraca)





d – grubość płytki

Naprężenie styczne:

$$\sigma_t = \frac{F}{ad}$$

$\frac{\gamma}{2}$ bo w efekcie ścinania w pionie i poziomie kąt ścięcia est dwa razy większy

Naprężenie normalne:

Wypadkowa siła wzdłuż przekątnej, do powierzchni przekroju płytki wzdłuż przekątnej…

$$\sigma_n = \frac{F\sqrt{2}}{ad\sqrt{2}} = \frac{F}{ad} = \sigma_t$$

$$\boxed{\sigma_n = \sigma_t}$$

Naprężenia normalne rozciąga przekątną

$$2\Delta D = 2\Delta a\sqrt{2}$$

Zmiana długości przekątnej:
- rozciąganie „podłużne”
- ściskanie poissonowskie

$$2\Delta D = \frac{\sigma_n}{E} D + \mu \frac{\sigma_n}{E} D = \frac{1+\mu}{E}\sigma_n D$$

$$\Downarrow$$

$$2\Delta a\sqrt{2} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_t a\sqrt{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_t$$

Zmiana kąta pomiędzy bokami

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

G – moduł sztywności

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2} = \frac{\Delta a}{a/2} = \frac{2\Delta a}{a}$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sigma_t}{2G}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{\sigma_t}{2G}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\sigma_t}{2G} = \frac{1+\mu}{E}\sigma_t$$

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}$$

$$\Downarrow$$

ograniczenie na wsp. Poissona

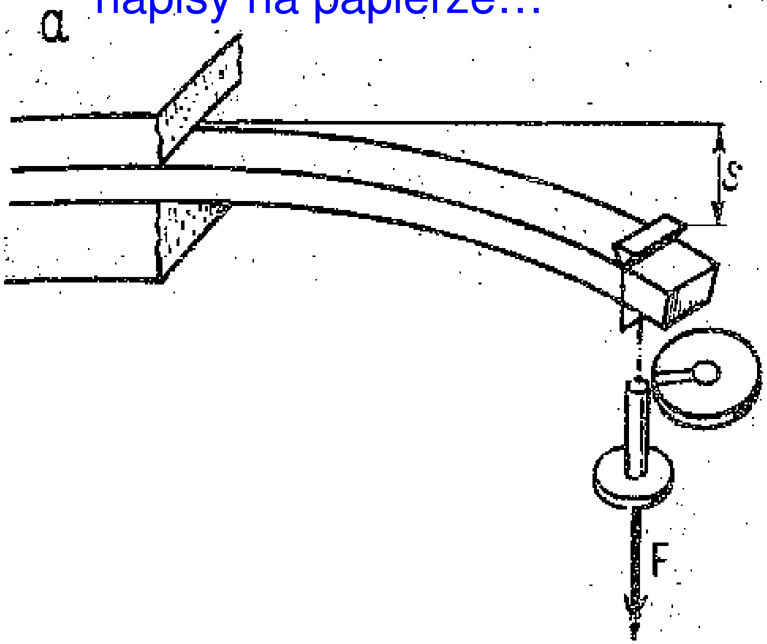
$$\boxed{\mu > -1}$$

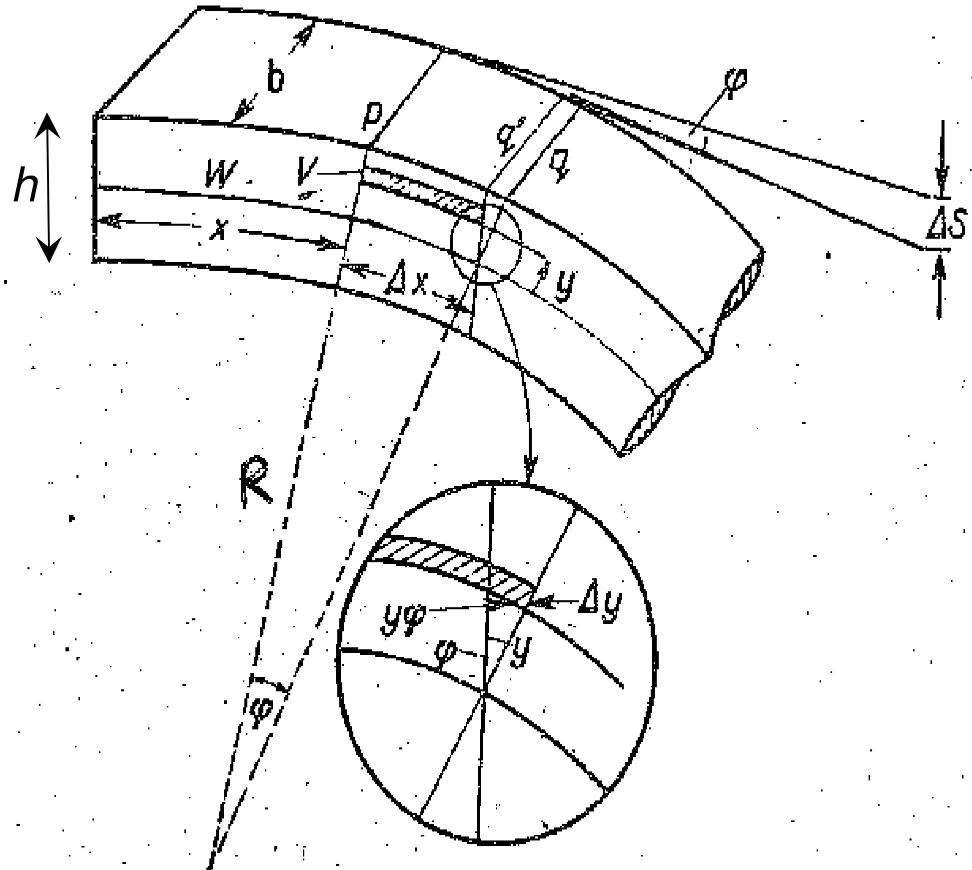
Czyli:

G mniejsze niż E (od 1/3 do 1/2 E)

Zginanie belki

Popatrzmy jak odkształca się
gumka myszka,
napisy na papierze…





- przed odkształceniem przekroje ***p***, ***q*** były równoległe (odległe od punktu zamocowania o x, x+ Δx
- po ugięciu przekroje tworzą kąt φ
- warstwa *V* znajdująca się w odległości *y* od warstwy W (neutralnej) wydłuża się o $\boldsymbol{\varphi y}$
- element belki o długości Δx i grubości Δy i szerokości *b* jest odkształcany pod wpływem siły $F_n = \sigma \Delta A$ (Δ*A – pole przekroju poprzecznego warstwy V)*

H. Szydłowski Pracownia Fizyczna (PWN)

$$\Delta F_n = \sigma \Delta A = E \varepsilon \Delta A$$

Powierzchnia elementu V :

$\Delta A = b \Delta y$

Wydłużenie względne (rysunek): $$\varepsilon = \frac{\varphi y}{\Delta x}$$

Stąd: $$\Delta F_n = E \frac{\varphi y}{\Delta x} b \Delta y$$

Moment tej siły względem warstwy W

$$\Delta M = y \Delta F_n = E \frac{\varphi}{\Delta x} b y^2 \Delta y$$

Sumując przyczynki od wszystkich warstw mamy:

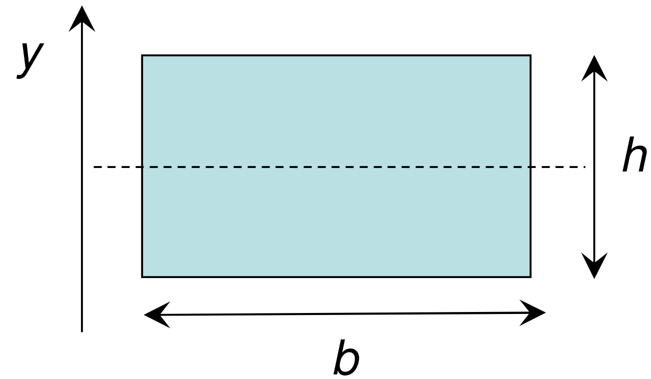
$$\boxed{M = E \frac{\varphi}{\Delta x} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = E \frac{\varphi}{\Delta x} J}$$

gdzie geometryczny moment bezwładności (element powierzchni zamiast masy)

$$\boxed{J = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \equiv \int_A y^2 dA}$$

Dla belki o przekroju prostokątnym (zginanej prostopadle do *h*)

$$J = \frac{1}{12} bh^3$$



Moment sił sprężystości wytworzony w elemencie belki o długości Δx :

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}J \Longrightarrow \varphi = \frac{M}{EJ}\Delta x$$

Belkę odkształca moment siły zewnętrznej *F*

$$M = (l - x)F \Longrightarrow \varphi = \frac{F}{EJ}(l - x)\Delta x$$

Ponieważ pomiędzy stycznymi do belki w punktach *p, q* wynosi φ, to przyczynek Δ*S* do ugięcia belki S wyniesie:

$$\Delta S = \varphi(l - x) \Longrightarrow \Delta S = \frac{F}{EJ}(l - x)^2\Delta x$$

Sumując ugięcia od wszystkich przyczynków Δx dostajemy:

$$S = \frac{F}{EJ}\int_0^l (l-x)^2\,dx = \frac{1}{3}\frac{F}{EJ} l^3$$

Dla belki o przekroju prostokątnym:

$$S = \frac{4}{bh^3}\frac{l^3}{E} F$$

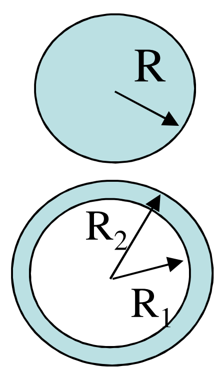
Im większy moment Geometryczny, tym trudniej zginać!
Materiał powinien być więc jak najdalej od osi zginania.
Puste w środku wytrzymalsze?
Mosty, konstrukcje i kości…

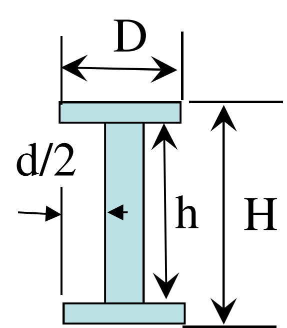
Ugięcie zależy od kształtu przekroju!

$$J_p = \frac{\pi}{4} R^4$$

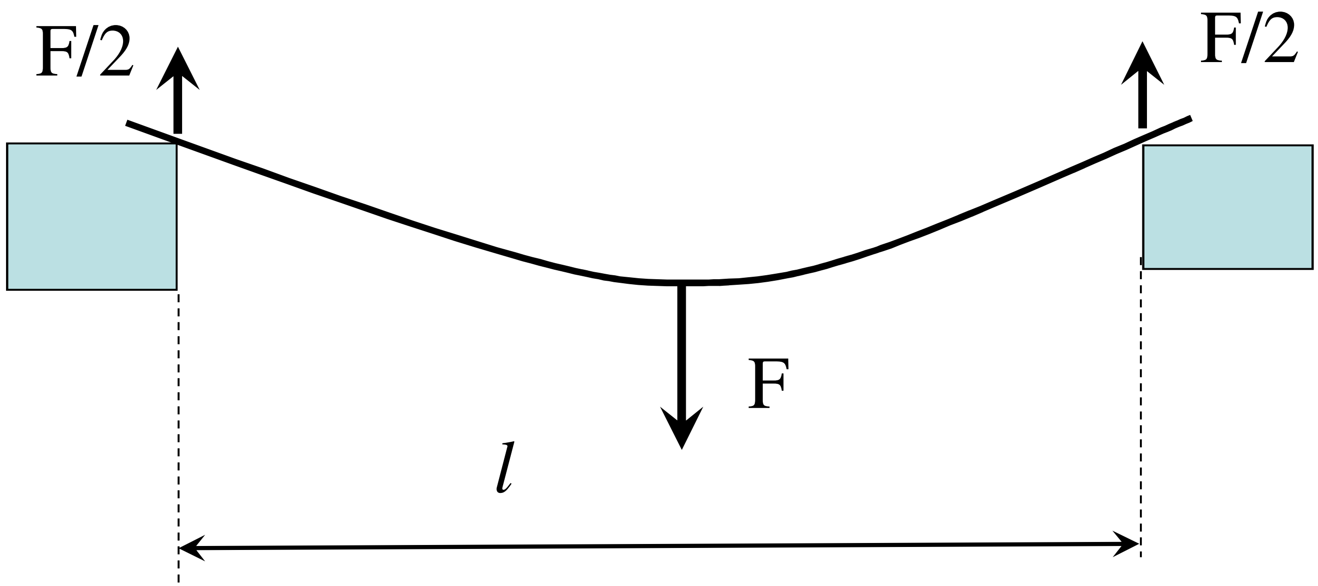
$$J_r = \frac{\pi}{4}(R_2^4 - R_1^4)$$

$$J_t = \frac{1}{12}(DH^3 - 2dh^3)$$





Podparcie (nieważkiej…) belki z dwóch końców



Belka zamocowana
z jednej strony

Belka podparta
z dwóch stron

$$S_1 = \frac{4}{bh^3}\frac{l^3}{EJ}F \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{4}{bh^3}\frac{(l/2)^3}{EJ}(F/2) = S_1/16$$

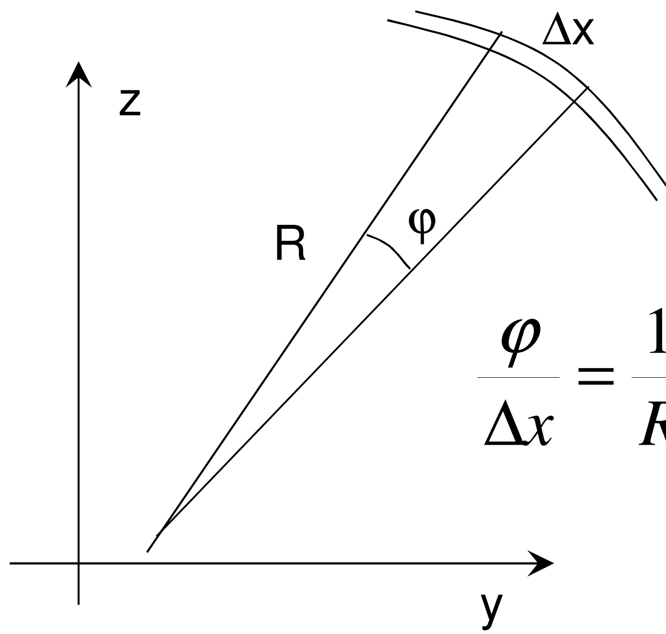
Czyli znacznie mniej się ugina!

Spróbujcie sami znaleźć ugięcie belki zamocowanej z dwóch stron…

Moment siły jeszcze raz…

$$M = E\frac{\varphi}{\Delta x}J$$

$$M(x) = \frac{EJ}{R(x)}$$



Promień krzywizny

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{R}$$

Z matematyki wiadomo, że krzywizna

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Dla małych ugięć:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Stąd można uzyskać informacje kształcie belki…

$$M(x) = EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$ ⟹ równanie na kształt belki

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{F}{EJ}(l - x)$$ dla x = 0 $z = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{F}{EJ}(l - x)^2 + C$$

$$z(x) = \frac{1}{6}\frac{F}{EJ}(l - x)^3 + Cx + D$$

warunki brzegowe

$$C = \frac{1}{2}\frac{F}{EJ}l^2$$

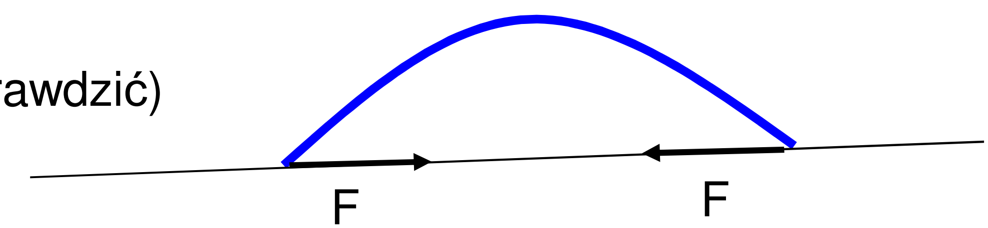
$$D = -\frac{1}{6}\frac{F}{EJ}l^3$$

Strzałka ugjęcia belki zamocowanej na jednym z końców

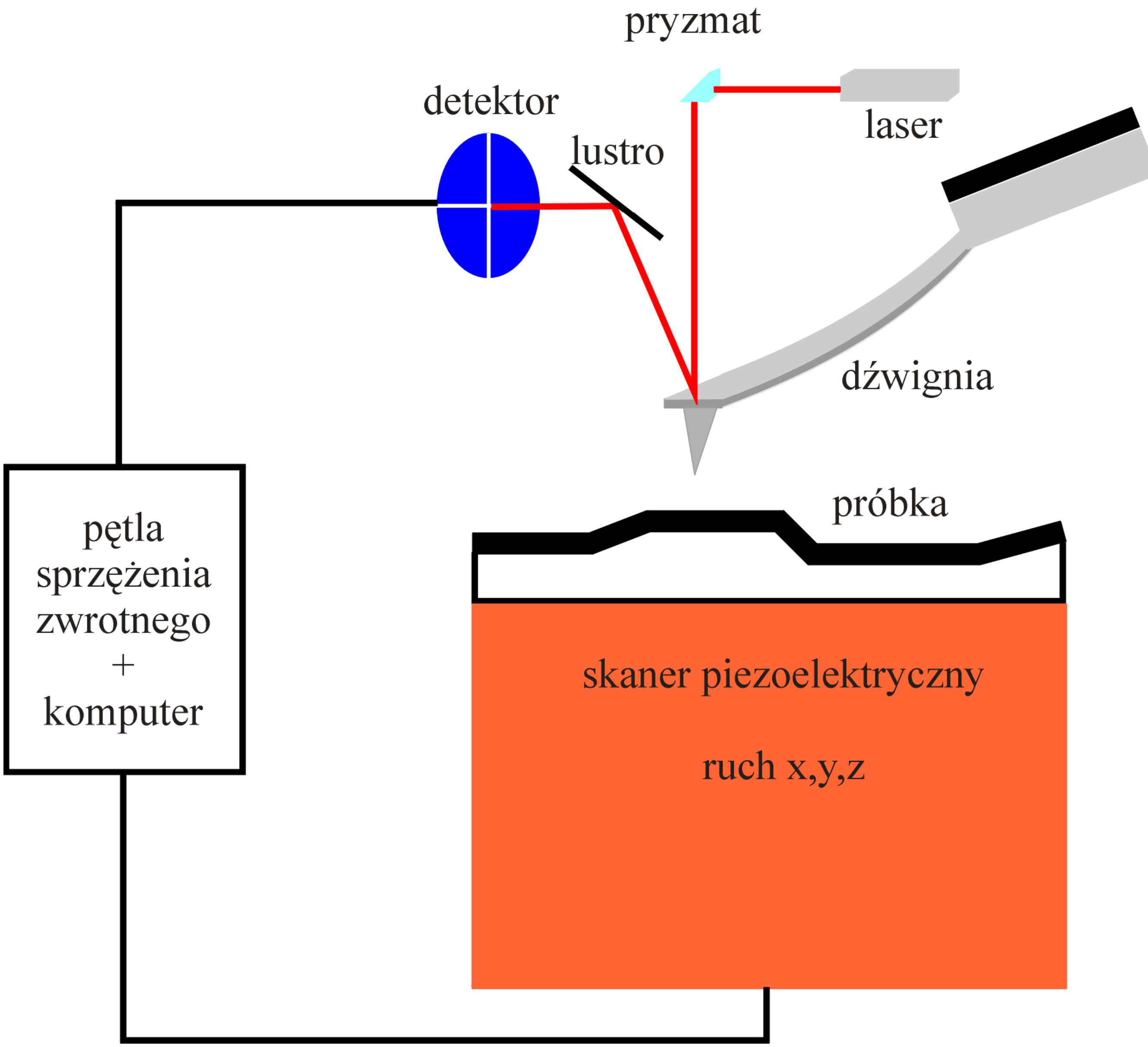
$$z(l) = \frac{1}{3}\frac{F}{EJ}l^3$$

Wyboczenie belki …(warto sprawdzić)

$$M(x) = EJ\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$



ZASADA DZIAŁANIA MIKROSKOPU SIŁ ATOMOWYCH

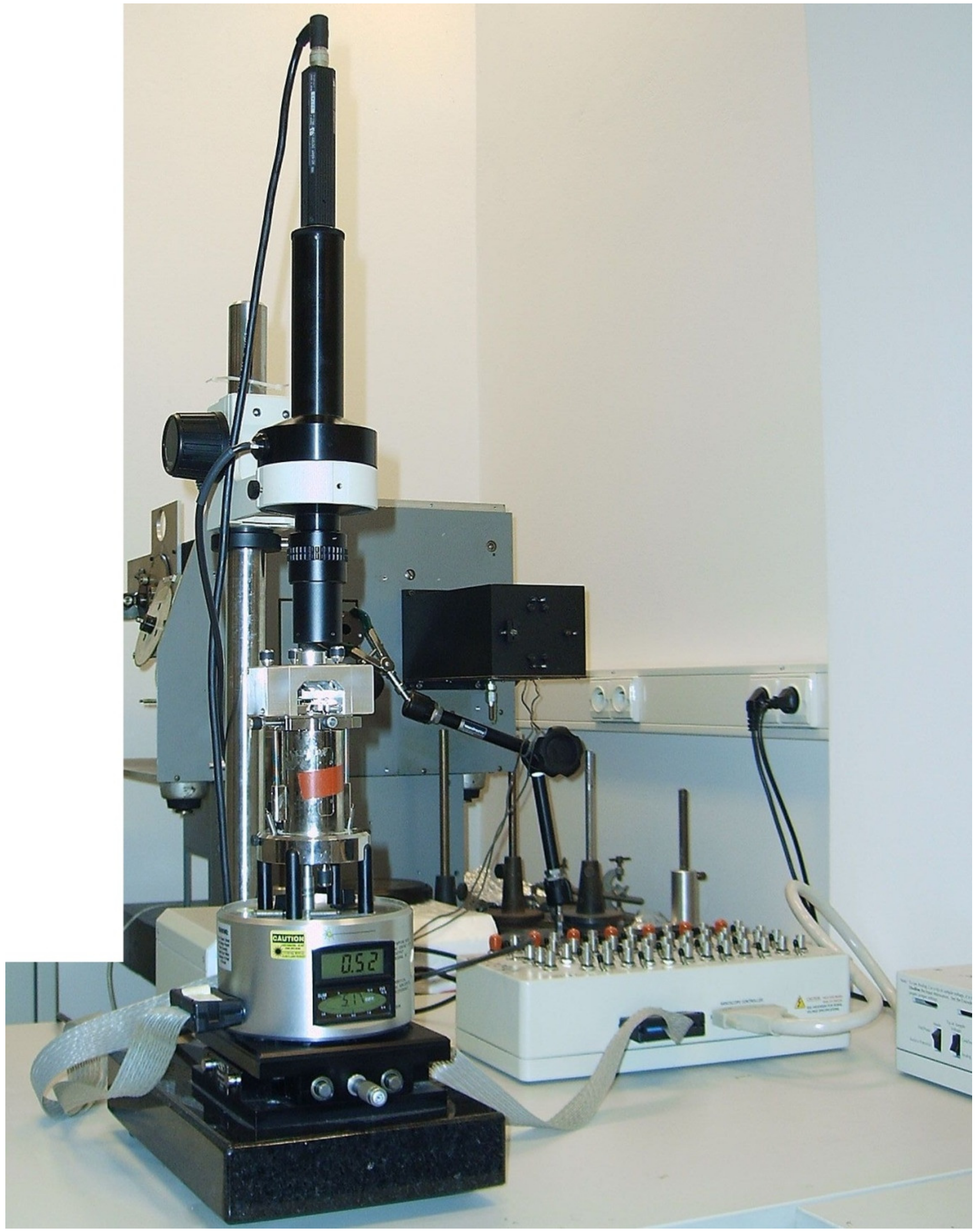


Mikroskop AFM

mikroskop
optyczny
z kamerą

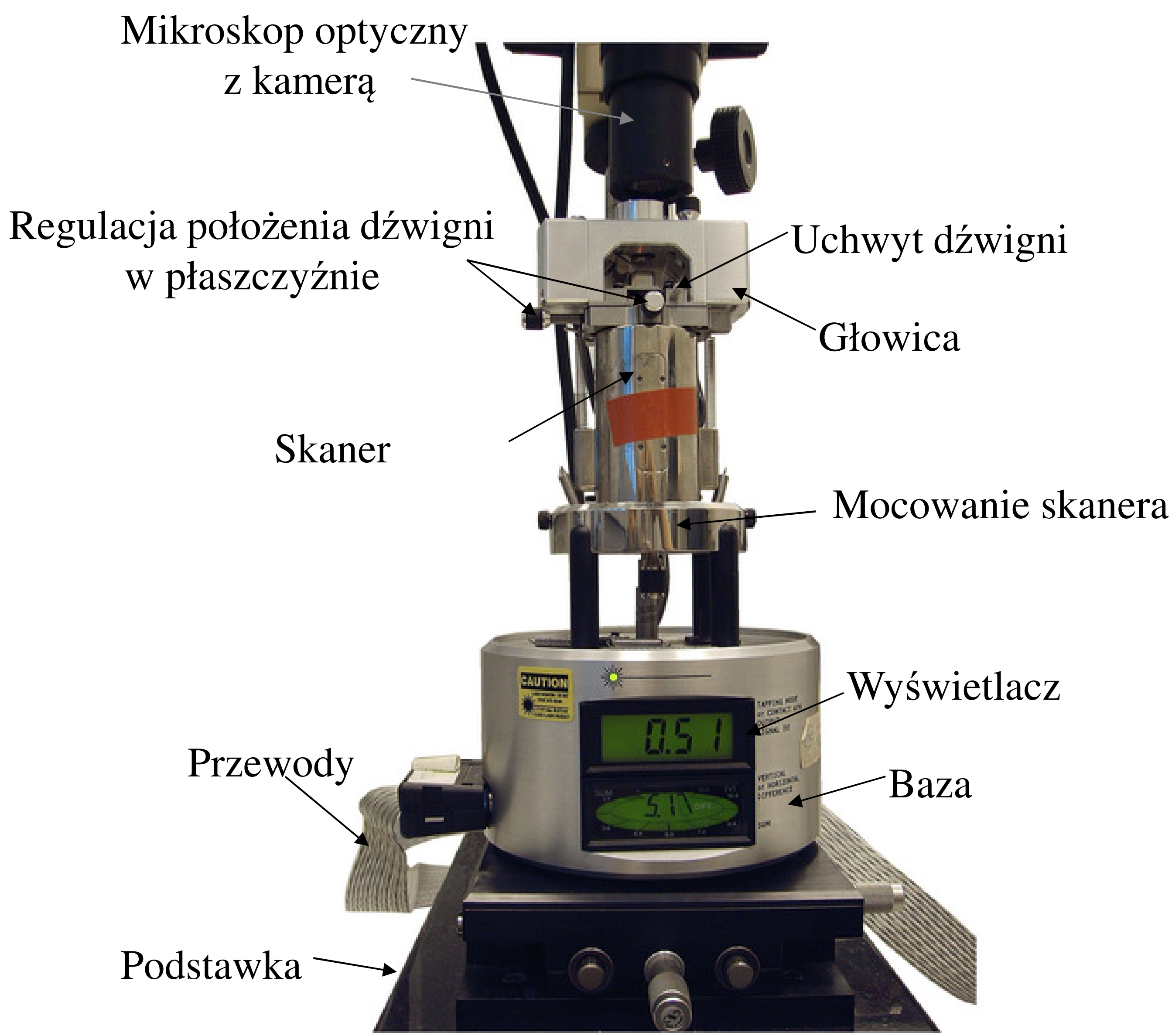
AFM
~25cm

podstawa

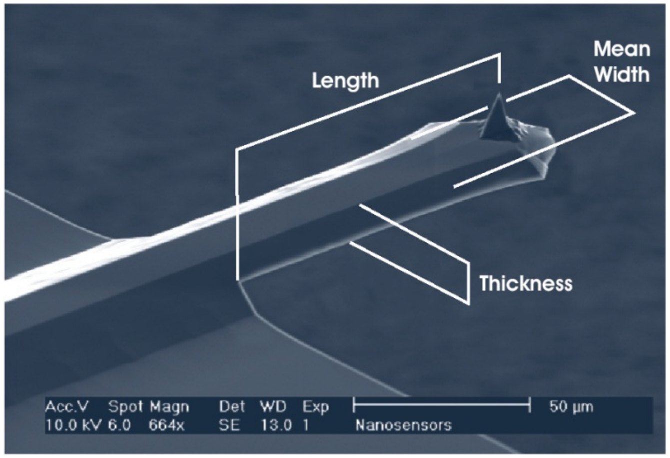


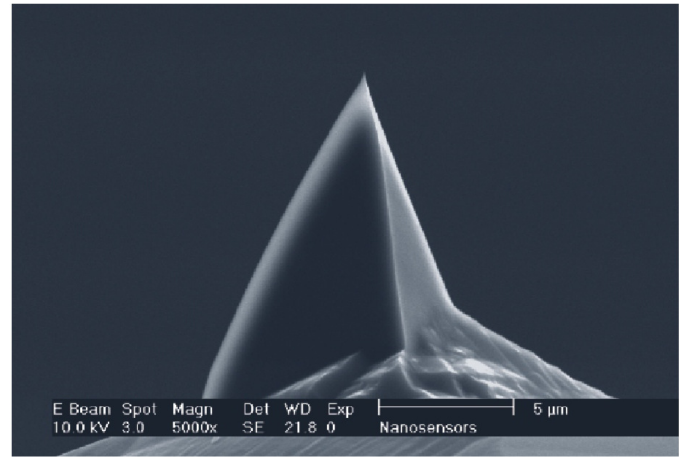
MultiMode AFM
+Nanoscope IIIa
Digital Instruments
(obecnie Veeco)

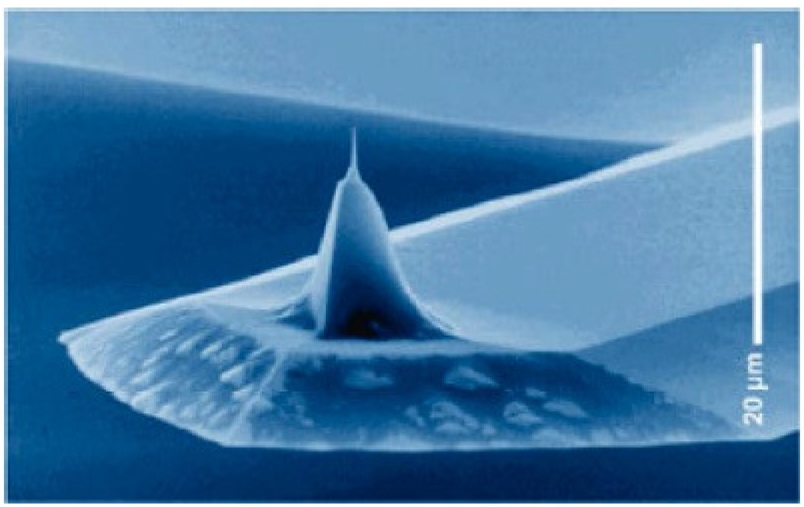
Budowa mikroskopu AFM: ruchoma próbka



Dźwignia „tapping mode”



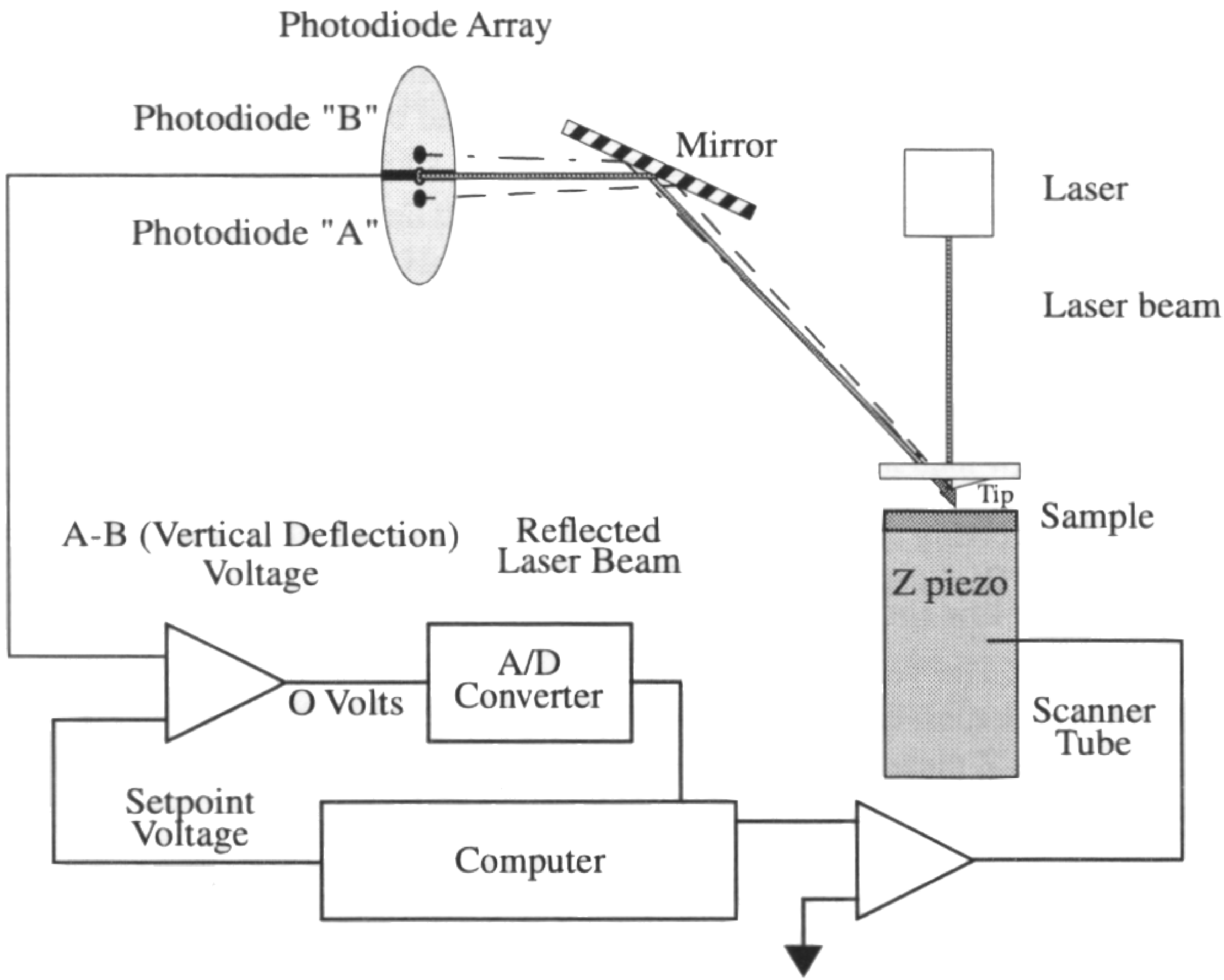




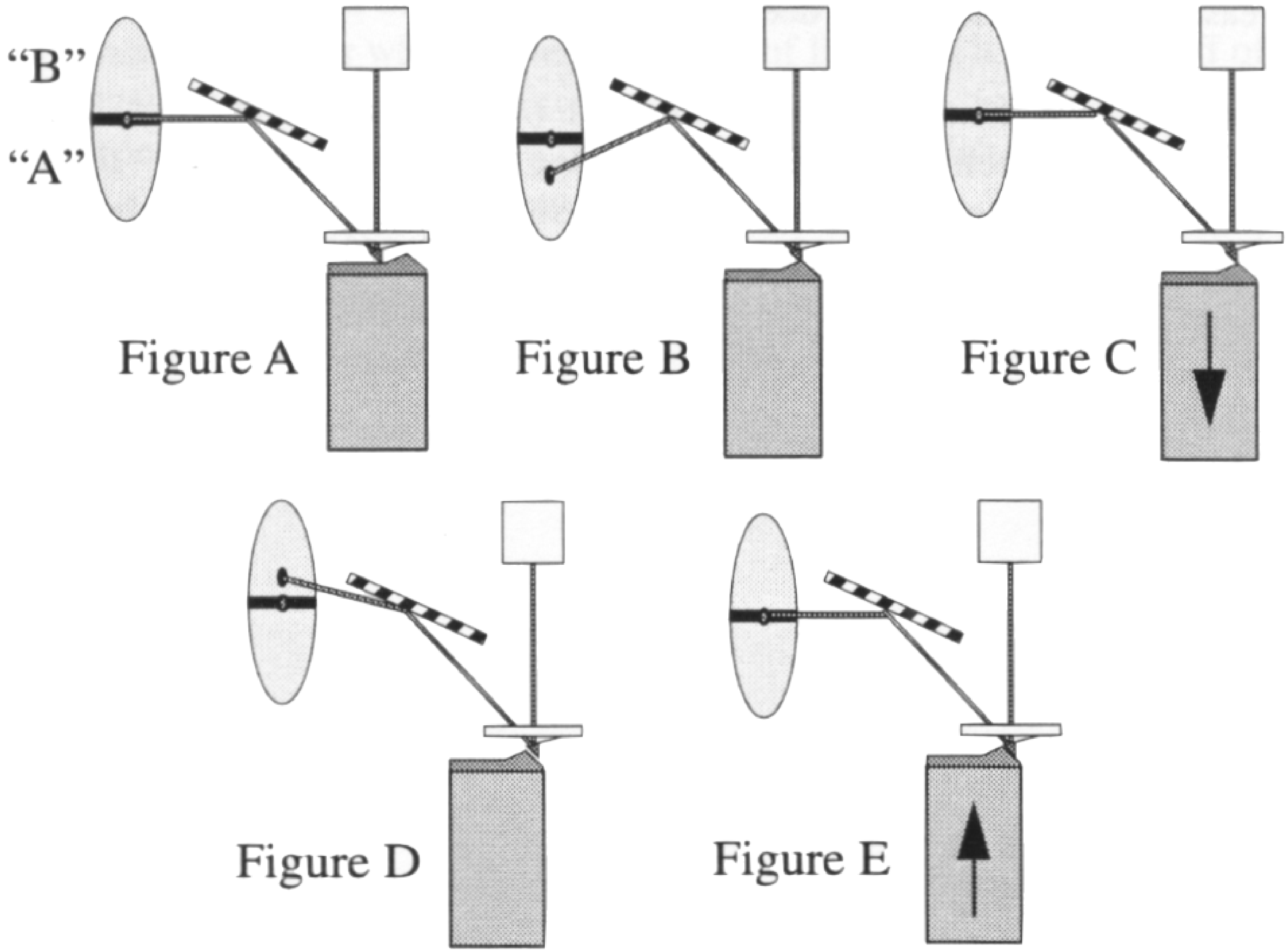
Długość	**125 µm**
Szerokość	**30 µm**
Grubość	**3 µm**
Wysokość	**10 µm**
Stała sprężystości	**100 N/m**
Częstość rezonansowa	**~300 kHz**
Promień krzywizny	**10 nm**
Kąt rozwarcia stożka	**30°**

www.nanosensors.com

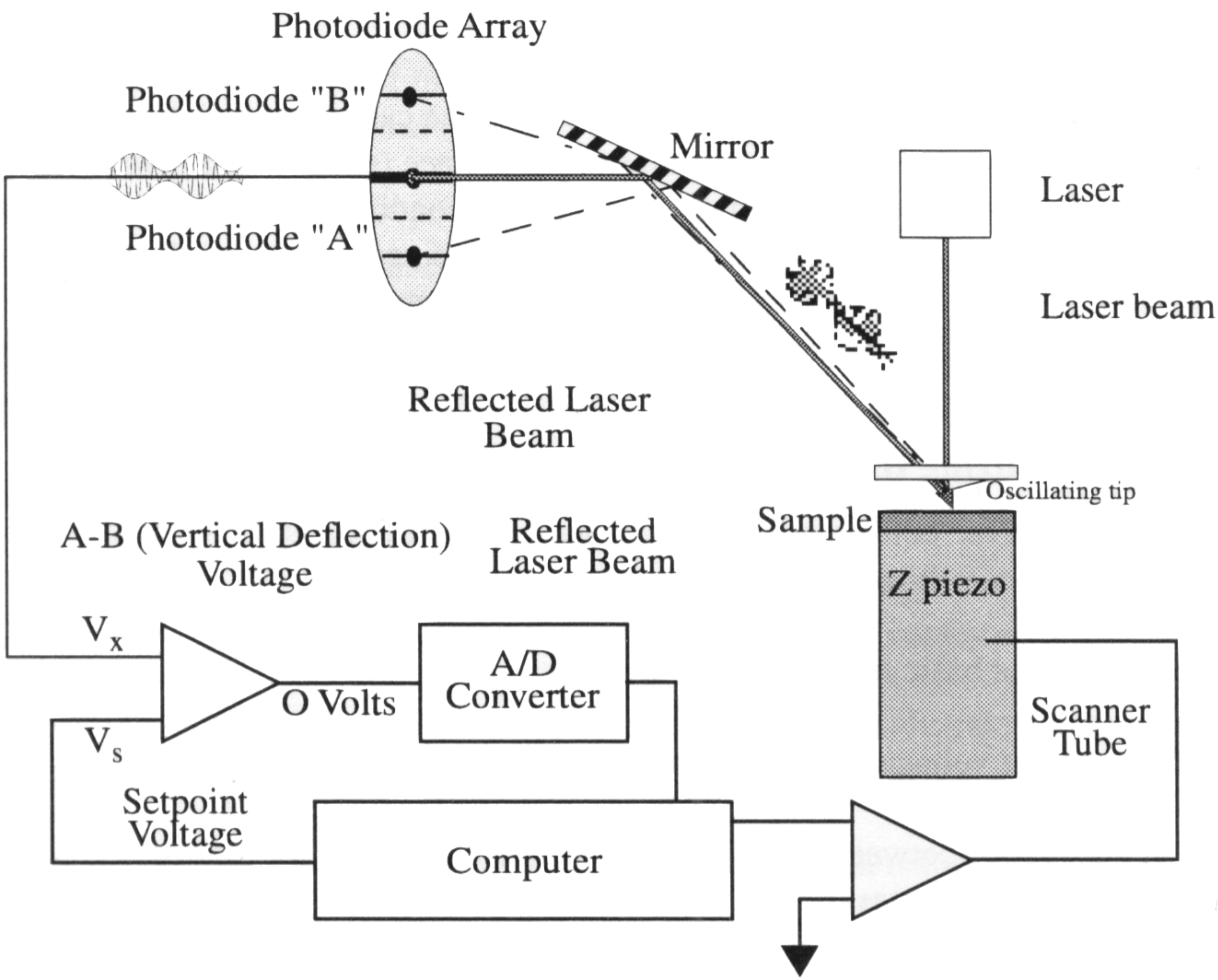
Tryb kontaktowy („contact mode”)



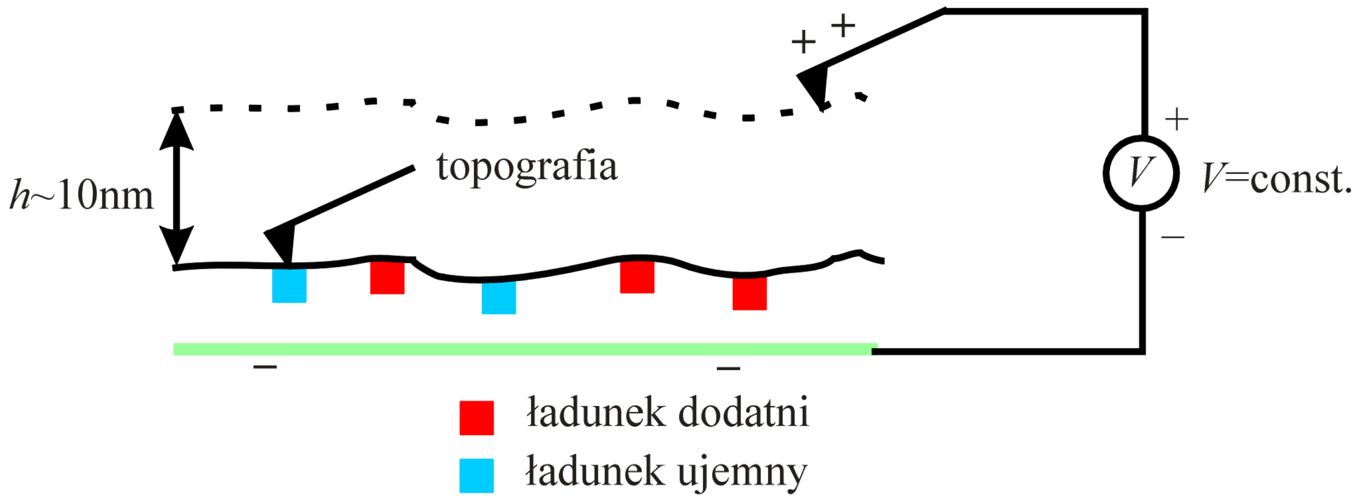
Tryb kontaktowy („contact mode”)



(TappingMode™ AFM)



EFM – Electric Force Microscopy (Kelvin Probe Microscopy)



$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + \ldots$$

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\omega_0}{k}$$

Siła elektryczna (gradient) ⇔ zmiana częstości rezonansowej

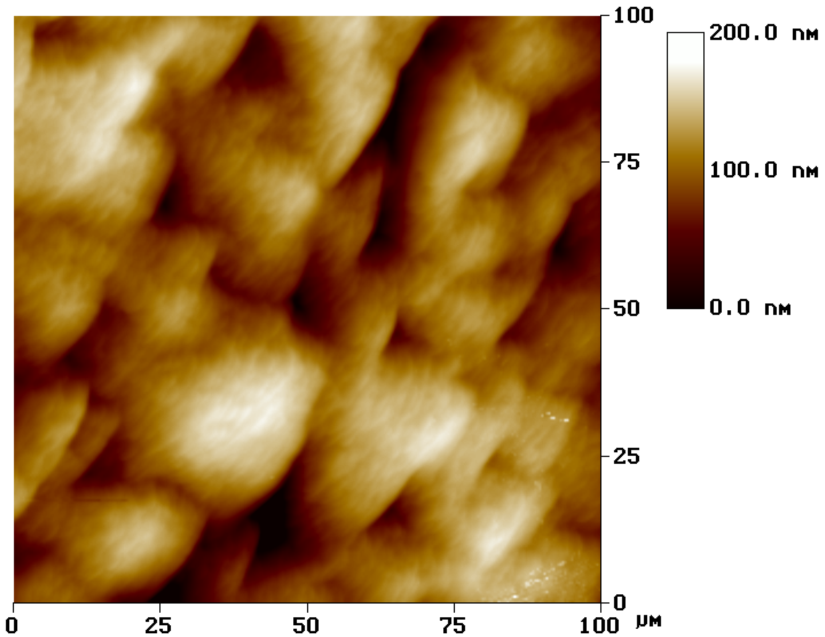
Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

Przyciąganie ⇔ Spadek częstości
Odpychanie ⇔ Wzrost częstości

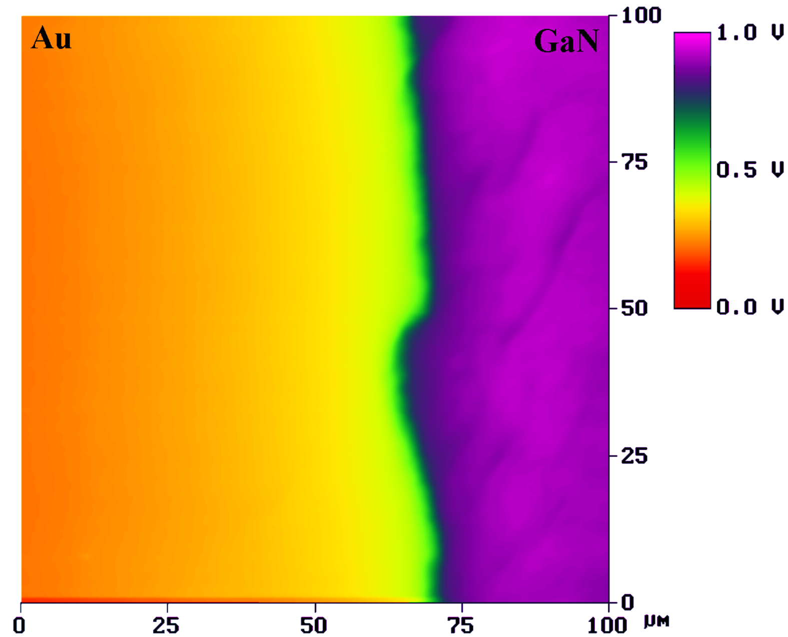
Doświadczenie w skali makro
z ciężarkiem na brzeszczocie
i magnesami…

Dioda Schottky'ego Au/GaN

(złącze metal-półprzewodnik)



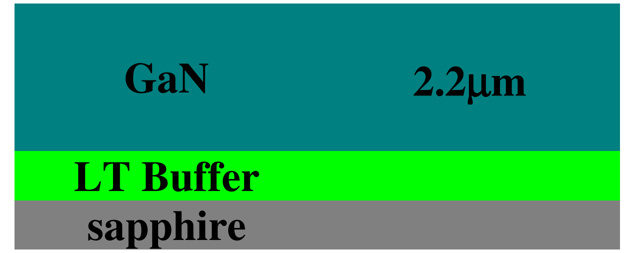
topografia

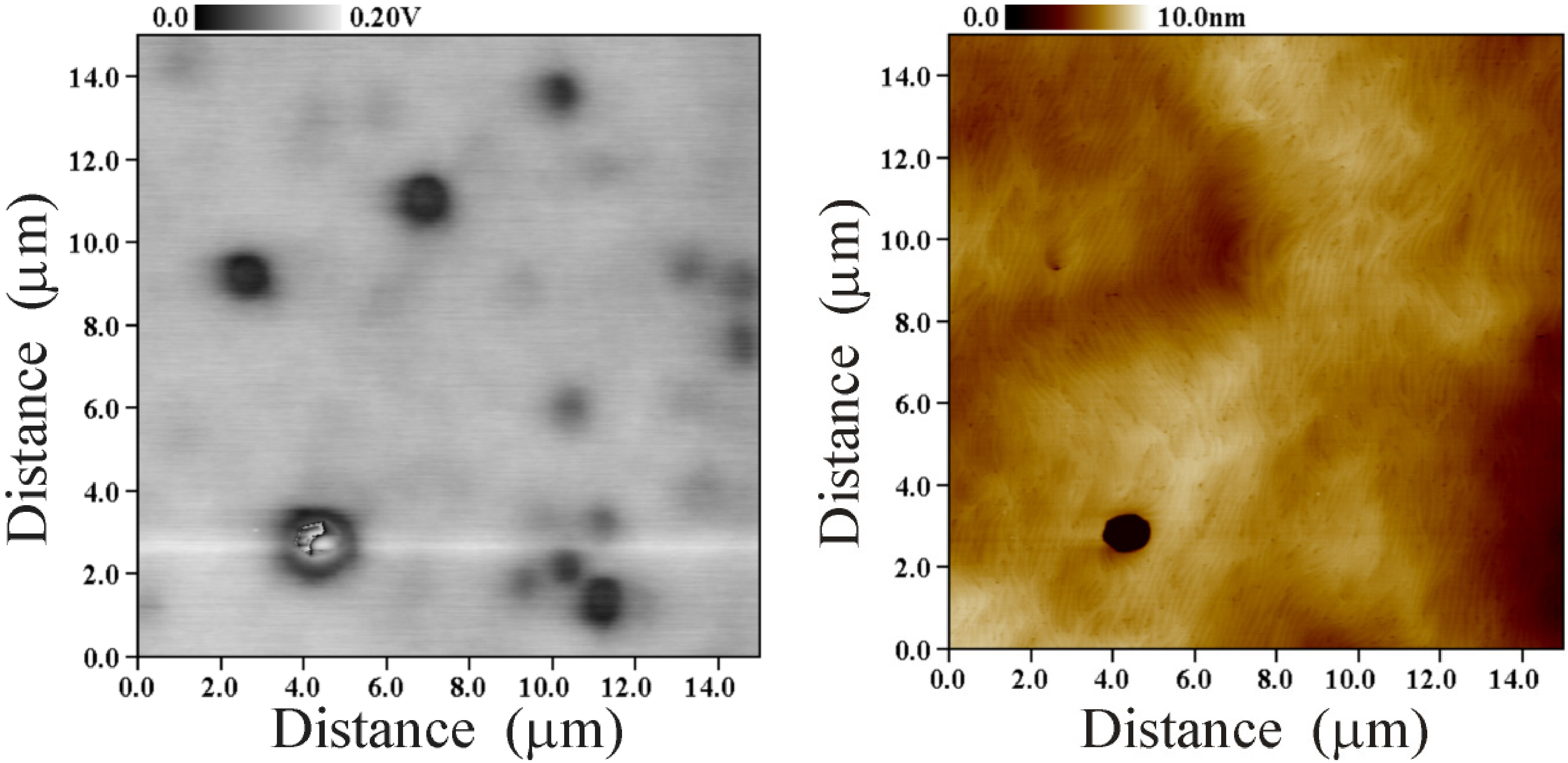


potencjał

granica półprzezroczystej warstwy Au

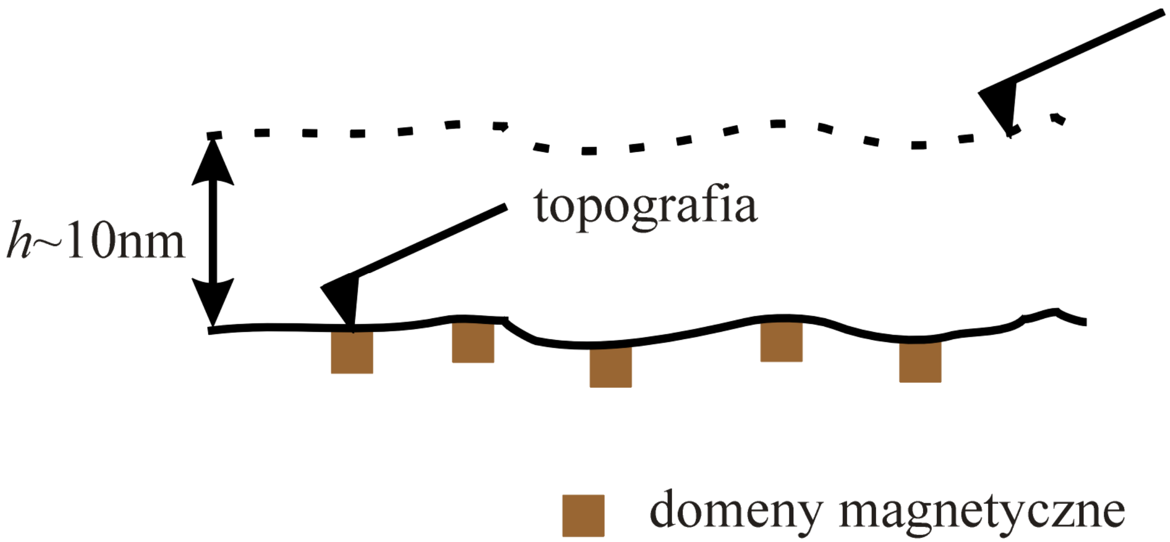
GaN





potecjał (KPFM) **topografia (AFM)**

MFM – Magnetic Force Microscopy

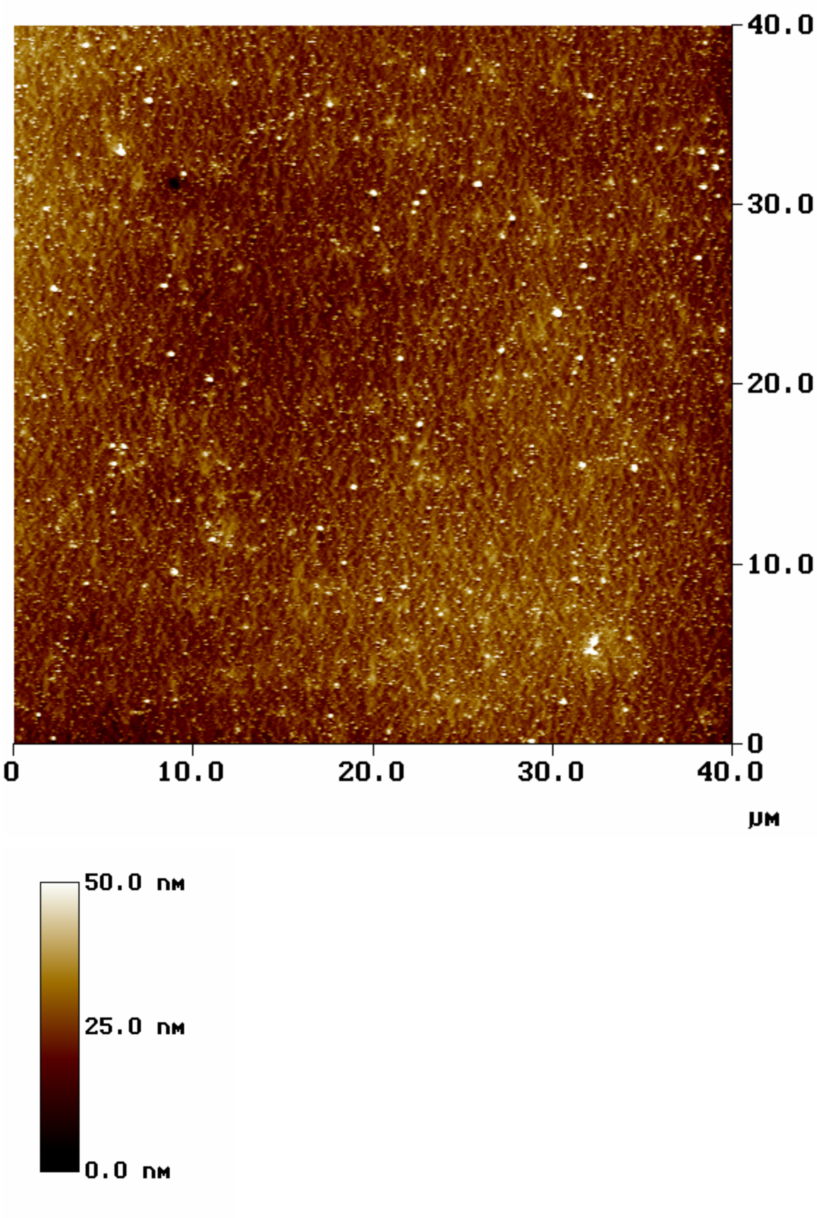


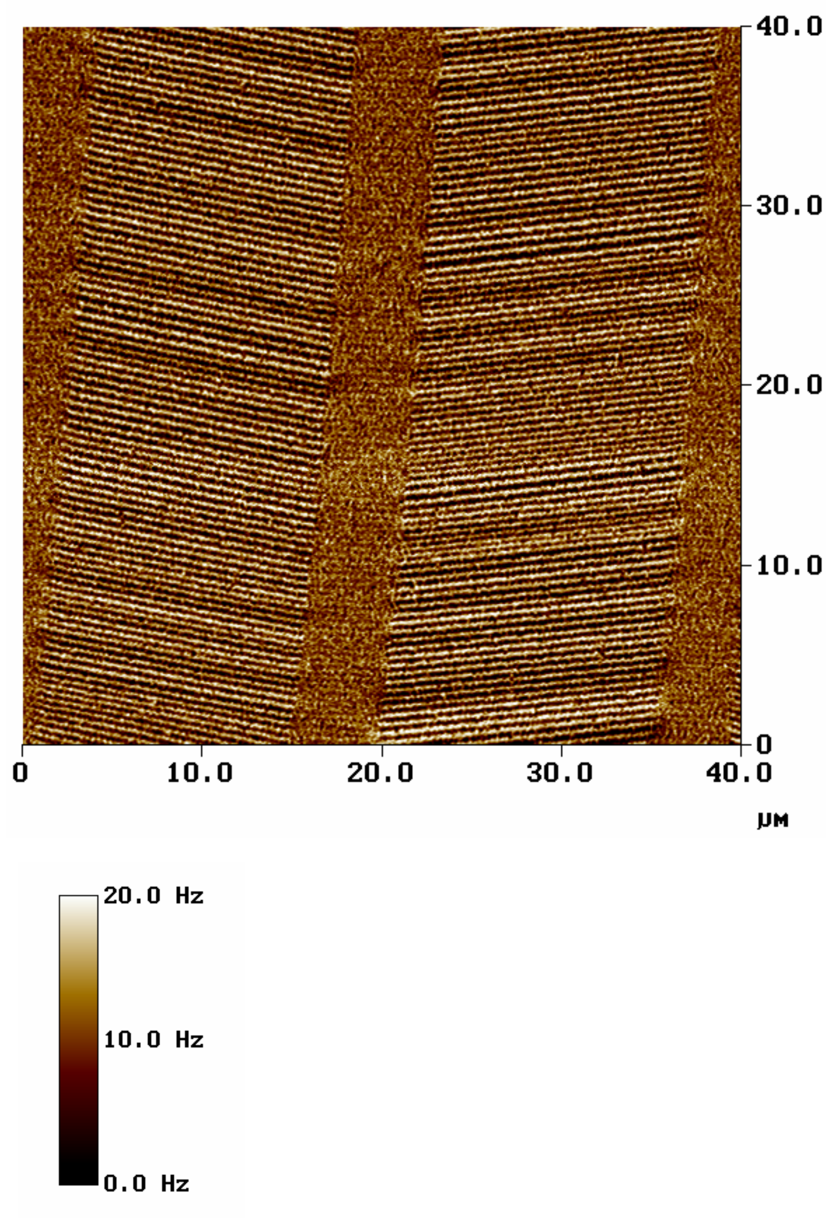
$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x} + \ldots \qquad \Delta\omega_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\omega_0}{k}$$

Siła magnetyczna (gradient) ⇔ zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

Mikroskop sił magnetycznych (MFM)





Nanorurki węglowe

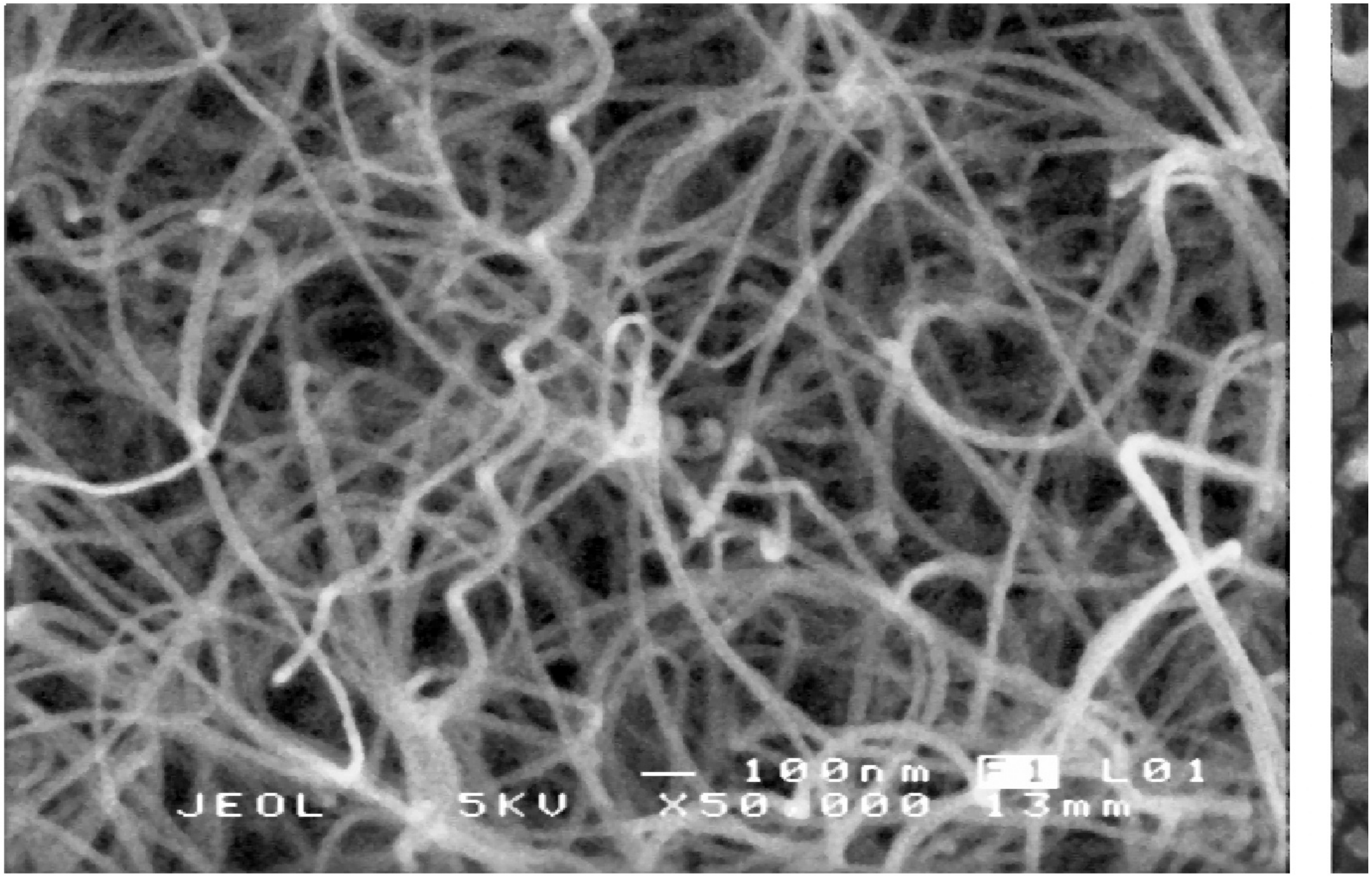
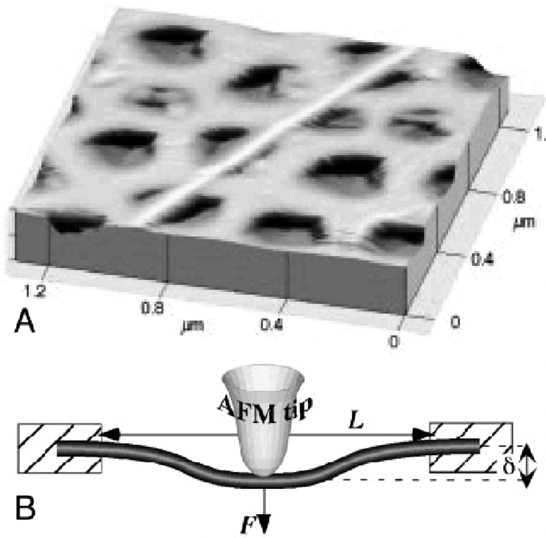


Figure 3. Scanning electron (SEM) micrographs of MWNTs

L. Forroro et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes*,

Moduł Younga dla nanorurki?



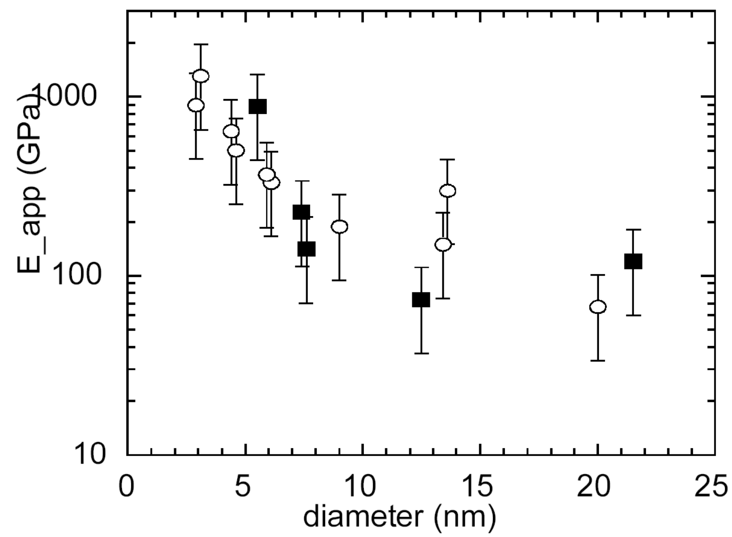


Figure 5. Dependence of the apparent Young's modulus (E_app) on the diameter of SWNT bundles meaured using AFM. The untreated bundles are represented by the open circles and the hydrogenated and irradiated bundles by the filled squares.

L. Forroro et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes* (Wikipedia)

A. Volodin et al.,Phys. Rev. Lett. **84**, 3342 (2000)
Palaci et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 175502 (2005)

Veeco

www.veeco-europe.com