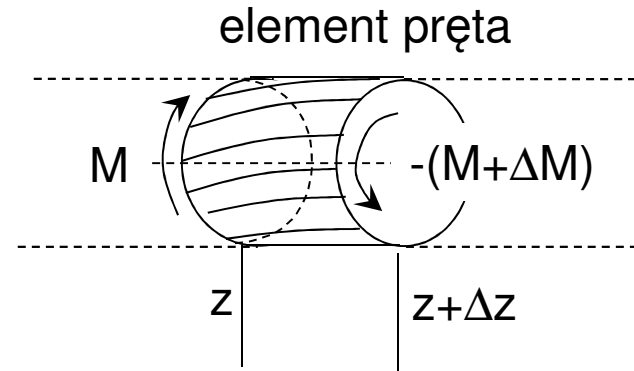
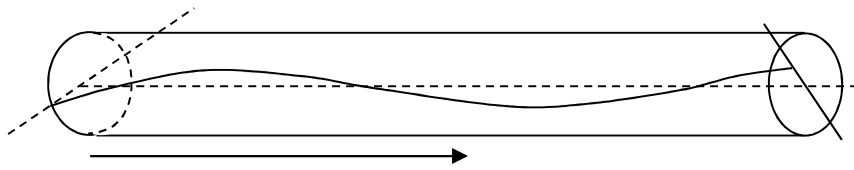


Fale skrętne w pręcie



$$M = G \frac{\pi R^4}{2} \frac{\varphi}{l} \quad l \rightarrow dz \quad \Rightarrow \quad M = G \frac{\pi R^4}{2} \frac{\Delta \varphi}{\Delta z}$$

Lokalne skręcenie o $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Rightarrow M(z) = G \frac{\pi r^4}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ $M(z)$ – moment skręcający
 G – moduł sztywności
 r – promień pręta

$$M(z + \Delta z) = M(z) + \frac{\partial M}{\partial z} \Delta z \quad \Rightarrow \quad \Delta M(z) = G \frac{\pi r^4}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Delta z$$

Pod wpływem wypadkowego momentu element pręta uzyskuje przyspieszenie kątowe i spełniony jest związek:

$$\Delta I \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta M \quad \text{gdzie, } \Delta I \text{ moment bezwładności plasterka o szerokości } \Delta z$$

Zatem:

$$\frac{\pi}{2} \rho r^4 \Delta z \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = G \frac{\pi}{2} r^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Delta z$$



$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{G}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Równanie falowe dla
fal skręceń w pręcie

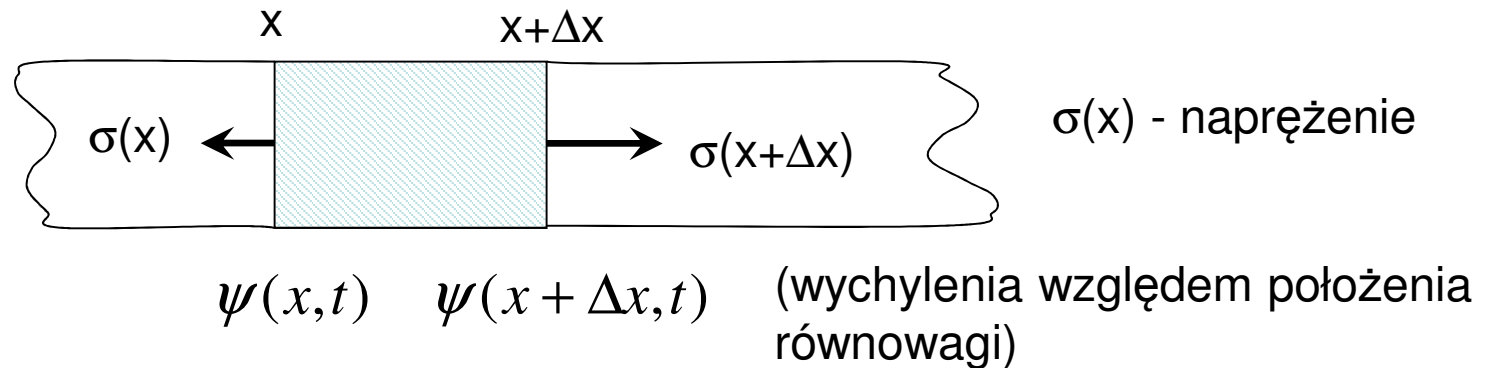
Prędkość fal skrętnych (fal ścinania):

$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Prędkość fali nie zależy od promienia pręta! Nie ma różnicy pomiędzy prędkością fal skrętnych w pręcie i „dużym” ośrodku. Przy falach skrętnych występuje szczególny rozkład naprężeń, ale dla każdego rozkładu naprężeń fale będą rozchodzić się z taką samą prędkością. Ma to duże znaczenie w seismologii...

Fale podłużne

Rozważmy element pręta metalowego znajdujący się pomiędzy dwoma przekrojami w punktach x oraz $x + \Delta x$



Poddamy pręt odkształceniu (naciskamy, uderzamy pręt) w kierunku x . Odkształcenie to będzie propagować się w pręcie dzięki powstającym w nim naprężeniom...

Można przyjąć, że średnie przemieszczenie jakiego doznaje środek masy elementu pręta zawartego pomiędzy x oraz $x + \Delta x$ wynosi $\psi(x, t)$

Zatem równanie ruchu tego elementu ma postać:

$$\rho S \Delta x \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = S \sigma(x + \Delta x) - S \sigma(x)$$

Gdzie S – powierzchnia przekroju poprzecznego pręta, ρ - gęstość pręta

$\sigma(x)$, $\sigma(x + \Delta x)$ – naprężenia, odpowiednio w punktach x oraz $x + \Delta x$

Stąd:

$$\rho S \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = S \frac{\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x)}{\Delta x}$$

W granicy $\Delta x \rightarrow 0$ ↓

dostajemy
$$\rho \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a

gdzie E - moduł Younga,

$$\sigma = \varepsilon E$$

Względna zmiana długości
elementu Δx

$$\varepsilon = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}$$

Zatem :

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}$$

Równanie analogiczne do równania
falowego opisującego drgania struny.

Prędkość fal
podłużnych w pręcie :

$$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Fale podłużne – fale akustyczne

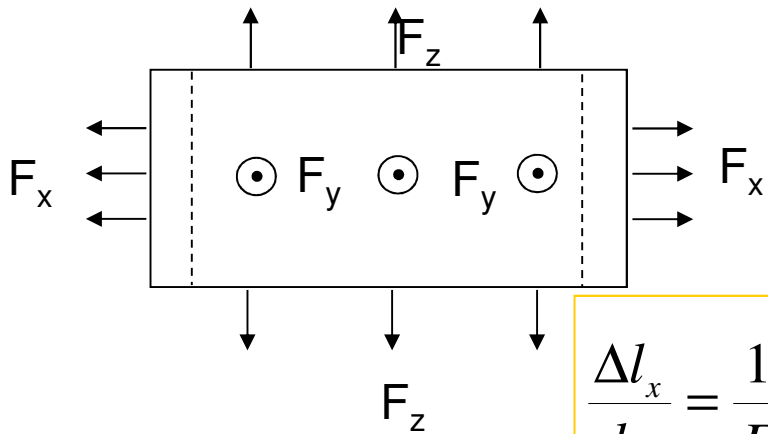
| Materiał | u_l (m/s) |
|-------------|-------------|
| ołów | 1200 |
| cyna | 2730 |
| mosiądz | 3710 |
| cynk | 3810 |
| szkło flint | 4000 |
| szkło crown | 5300 |
| żelazo | 5100 |

Prędkość dźwięku w powietrzu ~ 330 m/s. Wiadomo więc dlaczego Indianie przykładali uszy do szyn kolejowych...

Prędkość fal podłużnych w dużym ciele (np.. w Ziemi)

Przez ciało *duże* lub *grube* rozumiemy ciało, którego wymiary poprzeczne są dużo większe od długości fali dźwiękowej.

Nacisk nie może rozszerzać się na boki, dochodzi do ściskania w jednym wymiarze, tak jak w belce z uwięzionymi bokami...



Rozpatrzmy belkę, którą rozciągamy wzdłuż osi x, dbając o to, aby nie nastąpiło przewężenie w kierunkach y, z – odpowiada to przykładaniu sił prostopadłych do x...

Wydłużenie wzdłuż kierunku x

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E} \frac{F_x}{A_x} - \frac{\mu}{E} \frac{F_y}{A_y} - \frac{\mu}{E} \frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{E} \left(\frac{F_x}{A_x} - \mu \left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right)$$

Wydłużenia wzdłuż y, z

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{E} \left(\frac{F_y}{A_y} - \mu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z} \right) \right)$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{E} \left(\frac{F_z}{A_z} - \mu \left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y} \right) \right)$$

Boki „zamocowane” więc:

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{\Delta l_z}{l_z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{F_x}{A_x}$$

Stąd:
$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{E} \left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu} \right) \frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{E} \left(\frac{1-\mu-2\mu^2}{1-\mu} \right) \frac{F_x}{A_x}$$

Naprężenie Wzdłuż osi x
$$\sigma_x = \frac{F_x}{A_x} = \left(\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} \right) E \frac{\Delta l_x}{l_x}$$
 E – moduł Younga

$$E' = \left(\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} \right) E$$
 E' - efektywny moduł Younga dla ciała „grubego”...

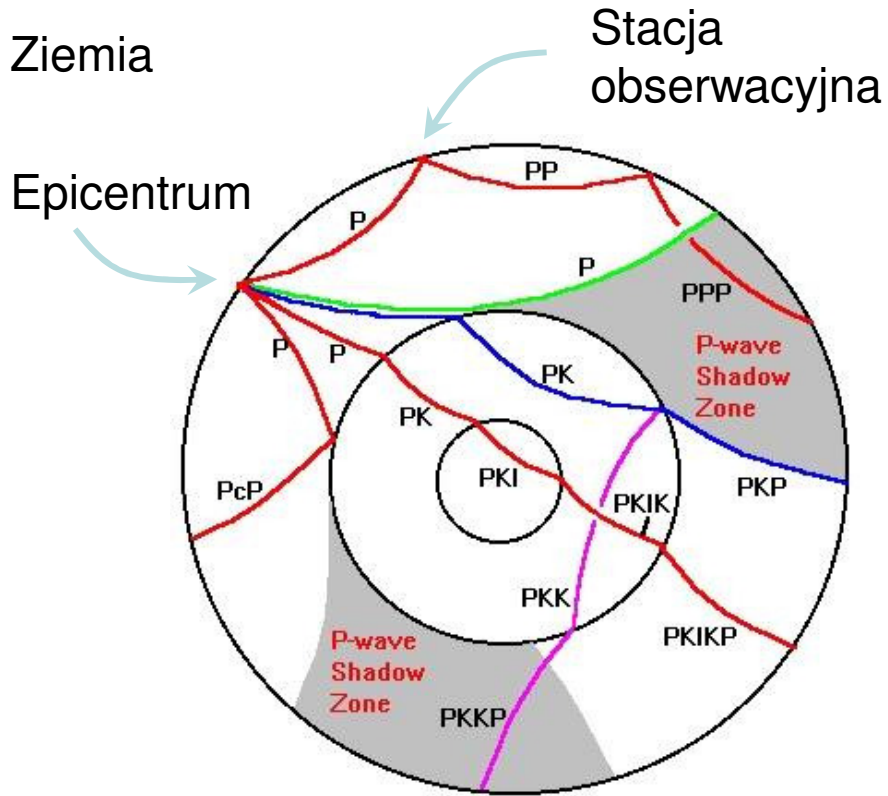
Sprężyste fale podłużne w ośrodku „dużym” :
$$u_l^\infty = \sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}$$

Sprężyste fale podłużne w pręcie :
$$u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Fale poprzeczne skręceń w pręcie:
$$u_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$
 G – moduł sztywności

Ponieważ $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ $\Rightarrow G < E < E' \Rightarrow u_l > u_t$ **Fale podłużne są szybsze niż fale poprzeczne!**

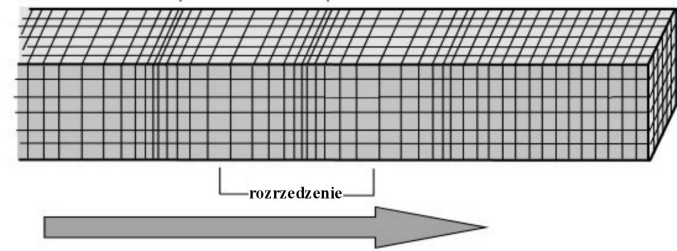
Fale sejsmiczne



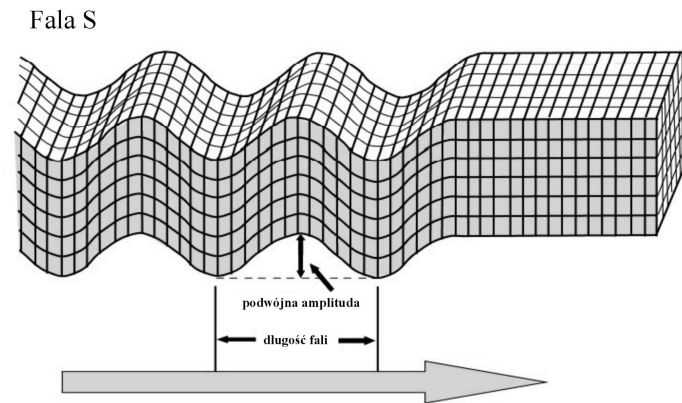
K- fale podłużne, które przeszły przez jądro (z niem. *kern*)

Fale powierzchniowe (Rayleigha i Love'a) podłużno-poprzeczne...

Fale podłużne P (primary)



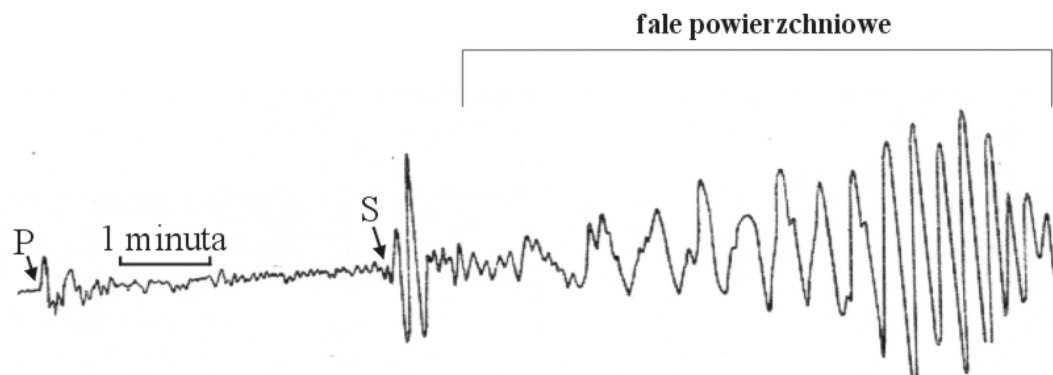
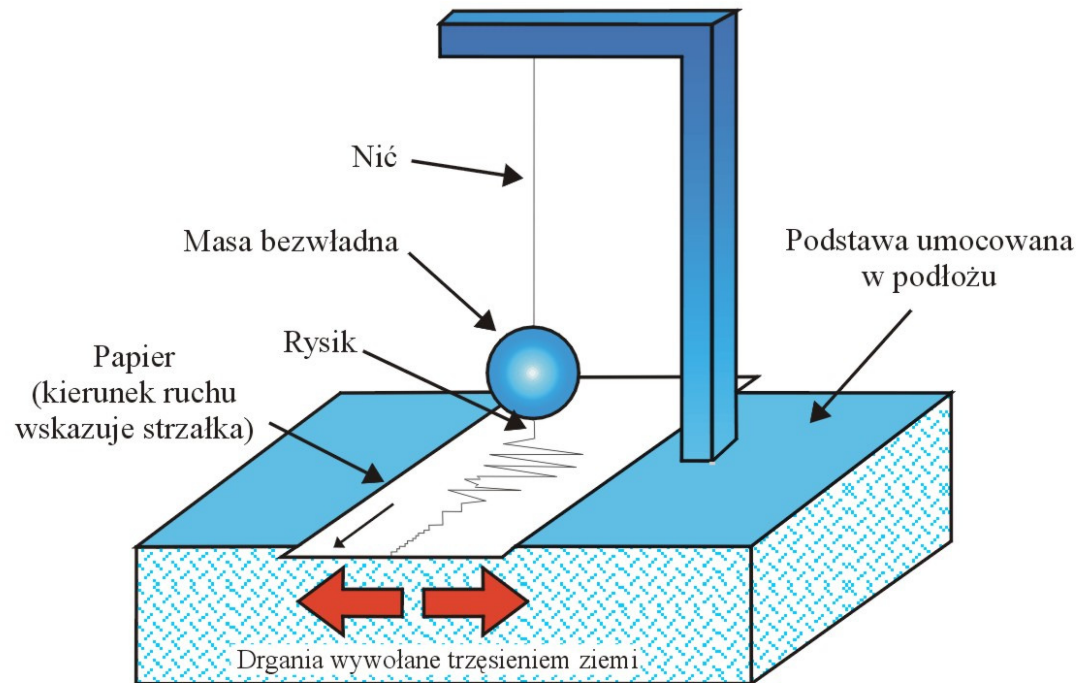
Fale poprzeczne S (secondary)



<http://www.pgi.gov.pl/>

Rejestracja fal sejsmicznych

- składowa pionowa - Z
- składowa pozioma wzdłuż kierunku N-S (północ-południe)
- składowa pozioma wzdłuż kierunku W-E



Seismogram trzęsienia ziemi w Turcji (1909) na stacji Pułkowo w Rosji

Zasada działania seismografu do rejestracji drgań poziomych. Przy rejestracji drganiach pionowych używa się ciężarka na sprężynie...

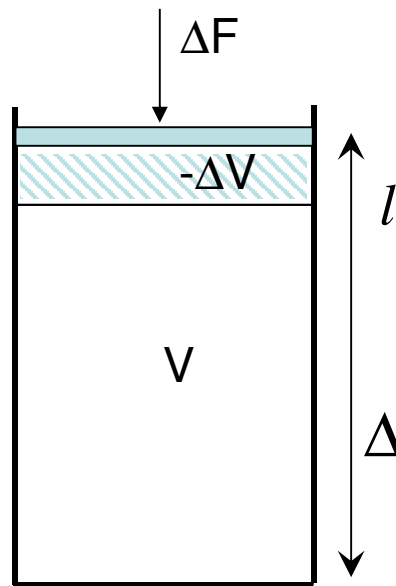
Fale dźwiękowe w powietrzu

Fale dźwiękowe w powietrzu to fale podłużne, w których mamy do czynienia z przemieszczającymi się zagęszczeniami i rozrzedzeniami gazu...

Sytuacja jest więc bardzo podobna do tej z jaką mamy do czynienia w przypadku poznanych już sprężystych fal podłużnych...

Prędkość fal podłużnych: $u_l = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Aby skorzystać z analogii należy wyznaczyć efektywny moduł Younga dla gazu...



$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} \quad l = \frac{V}{S} \quad \Delta l = \frac{\Delta V}{S} \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta p = \frac{\Delta F}{S} = -E_{eff} \frac{\Delta l}{l} = -E_{eff} \frac{\Delta V}{V}$$

$$\Delta p = -E_{eff} \frac{\Delta V}{V} \quad \longrightarrow \quad E_{eff} = -\frac{\Delta p}{\Delta V} V \quad E_{eff} = -\frac{dp}{dV} V = K$$

Dla słupa gazu (cieczy) rolę modułu Younga przejmuje moduł ścisłości K !!!

Prędkość dźwięku w powietrzu

Przemiana izotermiczna (Newton...)
(wymiana ciepła z otoczeniem)

$$pV = \text{const}$$



$$Vdp + pdV = 0$$



$$-\frac{dp}{dV}V = p \equiv E_T$$

Efektywny moduł
Younga

$$u_l = \sqrt{\frac{p}{\rho}}$$

Przemiana adiabatyczna
(brak wymiany ciepła z otoczeniem)

$$pV^\kappa = \text{const}$$



$$V^\kappa dp + p\kappa V^{\kappa-1} dV = 0$$



$$-\frac{dp}{dV}V = \kappa p \equiv E_A$$

$$u_l = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}$$

Warunkach normalnych:

$$u_{IT} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 280 \frac{m}{s}$$

$$u_l = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}} = 332 \frac{m}{s}$$

Zgodne
z doświadczeniem!

Proces przewodnictwa jest za wolny aby ciepło przepłynęło z obszarów zagęszczeń do rozrzedzeń (czyli żeby wyrównać temperaturę)....

Prędkość dźwięku w helu

Dla powietrza:

$$\kappa_p = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$$

$$\rho_p = 1,29 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Dla helu:

$$\kappa_{He} = \frac{c_p}{c_v} = 1,66$$

$$\rho_{He} = 0,1785 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$u_{He} = \sqrt{\frac{\kappa_{He} p}{\rho_{He}}} = 971 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

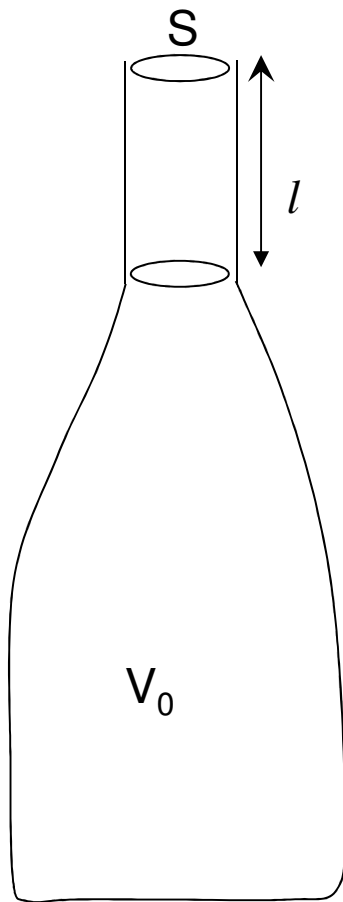
Po wciągnięciu do płuc helu częstotliwość emitowanych przez nas dźwięków rośnie! (wymiary strun głosowych nie zmieniają się...)

$$v_p = \frac{u_p}{\lambda} \quad v_{He} = \frac{u_{He}}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{He}}{v_p} = 2.92$$

Dlatego wdychając hel, możemy mówić „wysokim” głosem...

Częstotliwość drgania podstawowego dla butelki

Rozważamy ruch powietrza w szyjce o długości l
Pod wpływem zmian ciśnienia w środku butelki
(objętość V_0). Jeśli przesunąć powietrze w szyjce
o Δx , to zmiana ciśnienia w środku wyniesie (dla
procesu adiabatycznego):



$$\Delta p = -\frac{\kappa p}{V_0} \Delta V = -\frac{\kappa p}{V_0} S \Delta x$$

Pojawi się siła zwrotna:

$$F_x = \Delta p S \quad \Rightarrow \quad F_x = -\frac{\kappa p}{V_0} S^2 \Delta x$$

Będzie ona działać na powietrze w szyjce, stad równanie
ruchu:

$$\rho l S \frac{\partial^2 (\Delta x)}{\partial t^2} = -\frac{\kappa p}{V_0} S^2 \Delta x$$

Stąd częstość
drgań (dla modu
podstawowego) :

$$\omega^2 = \frac{\kappa p}{\rho} \frac{S}{V_0 l} = u^2 \frac{S}{V_0 l}$$

Dobrze to sprawdzić doświadczanie!