Przepływ cieczy i gazów (czyli płynów)

Opis przepływu cieczy

Idealizacja cieczy rzeczywistej
- nieściśliwa
- nie posiada lepkości

Gazy – gdy przepływają powoli można nie brać pod uwagę ich ściśliwości i traktować je jak nieściśliwe ciecze.

Euler: znajomość prędkości przepływu w każdym punkcie cieczy o współrzędnych x, y, z

$$\upsilon_x = f_1(x, y, z, t) \quad \upsilon_y = f_2(x, y, z, t) \quad \upsilon_z = f_3(x, y, z, t)$$

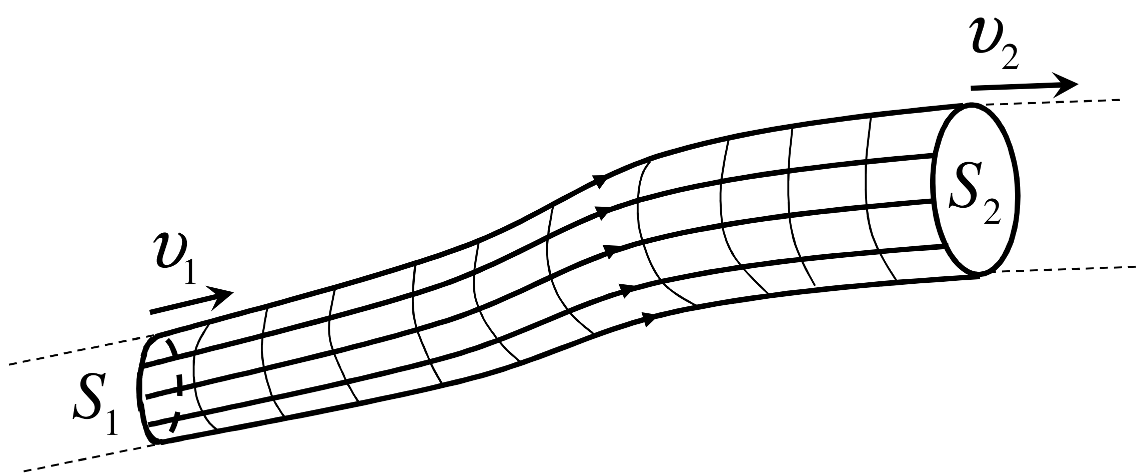
Lagrange: znajomość losów określonej cząstki cieczy

$$\boxed{\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} \\ \upsilon_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned}} \xrightarrow{\text{równanie toru}} \boxed{\begin{aligned} dx &= \upsilon_x dt = f_1(x, y, z, t)dt \\ dy &= \upsilon_y dt = f_2(x, y, z, t)dt \\ dz &= \upsilon_z dt = f_3(x, y, z, t)dt \end{aligned}}$$

Linia prądu: krzywa w każdym punkcie styczna do prędkości cieczy przepływającej przez ten punkt.

Przepływ stacjonarny – układ linii prądu nie zależy od czasu, a wiec charakteryzuje równocześnie tory przebiegane przez poszczególne cząstki...

Wiązka przylegających do siebie linii prądu tworzy „**rurkę prądu**”



W **przepływie stacjonarnym** masa cieczy zawarta w pewnej objętości jest stała, tzn. przez każdy przekrój poprzeczny rurki prądu w jednostce czasu przepływa taka sama masa cieczy:

$$m = S\upsilon\rho = const$$

gdzie *S* – powierzchnia przekroju poprzecznego rurki (w dowolnym miejscu),
υ- średnia szybkość przepływu cieczy dla tego przekroju,
ρ - gęstość cieczy

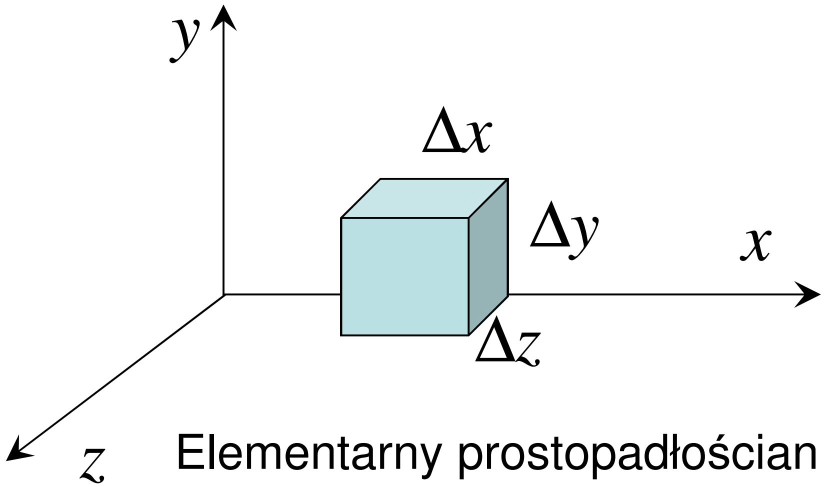
Dla nieściśliwej cieczy idealnej:

$$S\upsilon = const \Longrightarrow$$

Szybkość stacjonarnego przepływu jest większa, tam gdzie rurki skupiają się zaś mniejsza, gdy się rozszerzają…

Jeśli podzielić cały przepływ cieczy na rurki o jednakowej (np. jednostkowej) wartości $S\upsilon$.

Szybkość przepływu (objętość na jednostkę czasu) proporcjonalna do liczby rurek, przecinających jednostkę powierzchni przekroju prostopadłego do przepływu.



Elementarny prostopadłościan o krawędziach $\Delta x, \Delta y, \Delta z$

W kierunku osi x przez tylną ściankę prostopadłościanu przepływa w czasie Δt objętość:

$$V(x) = \upsilon_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Przez ściankę przednią prostopadłościanu wypływa w czasie Δt objętość:

$$V(x+\Delta x) = (\upsilon_x + \frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}\Delta x)\Delta y \Delta z \Delta t$$

Wypadkowy wypływ wzdłuż x:

$$\Delta V_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Analogicznie wzdłuż kierunków y i z dostaniemy:

$$\Delta V_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \qquad \Delta V_z = \frac{\partial v_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

Dla cieczy nieściśliwej objętość cieczy wpływającej do prostopadłościanu, musi być równa objętości cieczy wypływającej z niego, zatem:

$$\Delta V_x + \Delta V_y + \Delta V_z = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Hydrodynamiczne równanie ciągłości

Analogicznie dla cieczy ściśliwej byłoby:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = \nabla(\rho \vec{v}) = 0}$$

Przyspieszenie elementu cieczy

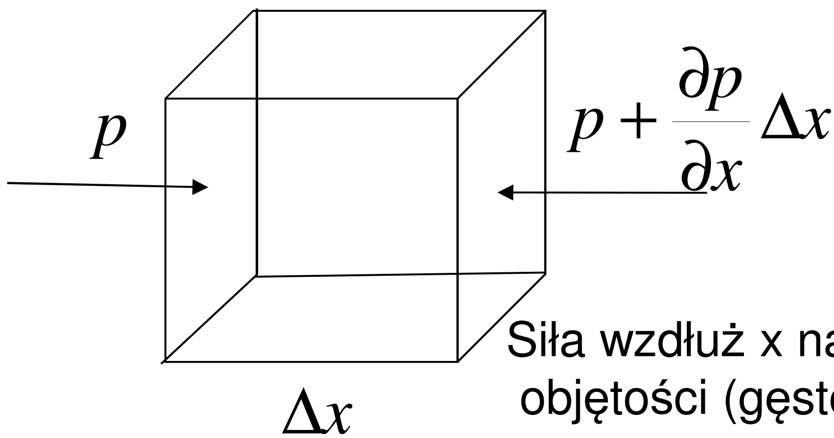
Równanie Newtona dla elementu o jednostkowej objętości można zapisać w postaci:

$$\boxed{\rho \cdot \vec{a} = \vec{f}}$$

a – przyspieszenie elementu cieczy
f - siła na jednostkę objętości
ρ - gęstość

Jakie siły mogą działać na element cieczy?

- pochodzące od ciśnienia, a właściwie zmiany ciśnienia na przestrzeni elementu cieczy



Wypadkowa siła wzdłuż x:

$$\Delta F_x = [\,p(x) - p(x+\Delta x)]\Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

Siła wzdłuż x na jednostkę objętości (gęstość siły):

$$\frac{\Delta F_x}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\Delta F_x}{\Delta V} = f_x = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

Biorąc pod uwagę trzy kierunki gęstość siły wyniesie:

$$\boxed{\vec{f} = \left[-\frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{\partial p}{\partial z}\right] = -\vec{\nabla} p}$$

- zewnętrzne siły zachowawcze działające na odległość (siła grawitacji, siła Coulomba) - można je opisać za pomocą potencjału φ(x,y,z) na jednostkę masy:

$$\vec{f}_{zp} = -\rho\left[\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z},\right] = -\rho\vec{\nabla}\varphi$$

- zewnętrzne siły niezachowawcze
- „wewnętrzne” siły niezachowawcze np. siła lepkości $\vec{f}_{lep}$ (prowadzi do występowania naprężeń ścinających w przepływającej cieczy)

Sumując przyczynki od różnych czynników dostajemy:

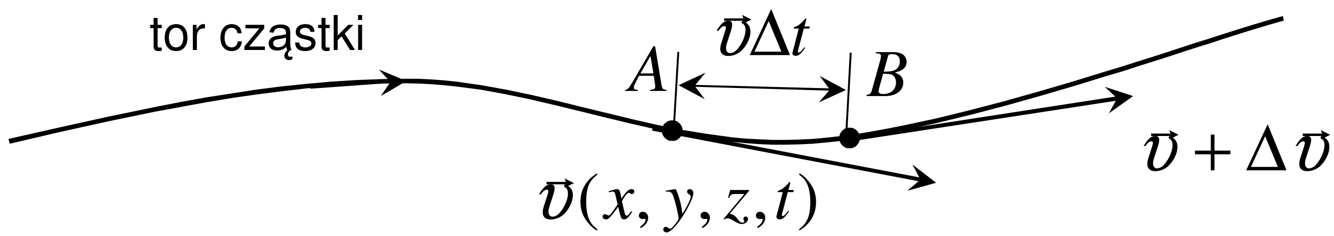
$$\rho\vec{a} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\varphi + \vec{f}_{lep}$$

Zajmijmy się teraz przybliżeniem nielepkiej cieczy („sucha woda”…)

$$\boxed{\rho\vec{a} = -\vec{\nabla}p - \rho\vec{\nabla}\varphi}$$

Spróbujmy znaleźć przyspieszenie ***a*** elementu cieczy. Z pozoru jest to łatwe…

Jak zmienia się prędkość wybranej cząstki cieczy?



$\dfrac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}$ - szybkość z jaką prędkość $\vec{\upsilon}(x, y, z, t)$ zmienia się **w pewnym ustalonym punkcie przestrzeni (x,y,z)**

Jeśli element cieczy, w czasie Δt przemieści się od punktu *A* do punktu *B*, to przesunie się o $\upsilon_x \Delta t$ w kierunku ***x***, $\upsilon_y \Delta t$ w kierunku ***y*** i $\upsilon_z \Delta t$ w kierunku ***z***.

Prędkość cząstki chwili *t* w punkcie (x, y, z) $\vec{\upsilon}(x, y, z, t)$

Prędkość cząstki w chwili *t+*Δ*t* $\vec{\upsilon}(x + \upsilon_x \Delta t, y + \upsilon_y \Delta t, z + \upsilon_z \Delta t, t + \Delta t)$

Z dokładnością do wyrazów pierwszego rzędu:

$$\vec{\upsilon}(x + \upsilon_x \Delta t, y + \upsilon_y \Delta t, z + \upsilon_z \Delta t, t + \Delta t) =$$

$$= \vec{\upsilon}(x, y, z, t) + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial x}\upsilon_x \Delta t + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial y}\upsilon_y \Delta t + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial z}\upsilon_z \Delta t + \frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t}\Delta t$$

Stąd zmiana prędkości cząstki przy przejściu z punktu *A* do *B*:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Można to zapisać w postaci:

$$\boxed{\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = (\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}$$

Zatem równanie ruchu cząstki cieczy (przy pominięciu lepkości) ma postać:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi}$$

Jeśli skorzystamy z tożsamości wektorowej:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = (\nabla \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 \qquad \vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$$

rotacja wektora $\vec{v}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} v^2 = -\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} - \vec{\nabla}\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{\upsilon}) \times \vec{\upsilon} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi\right)}$$

lub

$$\boxed{\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{\upsilon} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi\right)}$$

Dla przepływu stacjonarnego (ustalonego) – **w każdym punkcie cieczy prędkość się nie zmienia** (w każdym punkcie ciecz zostaje zastępowana nową cieczą, linie prądu są ustalone w czasie). Czyli:

$$\frac{\partial \vec{\upsilon}}{\partial t} = 0$$

Zatem równanie ruchu przyjmie postać:

$$(\nabla \times \vec{\upsilon}) \times \vec{\upsilon} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi\right) \quad (**)$$

Pomnóżmy je skalarnie (z lewej strony) przez wektor $\vec{\upsilon}$

Ponieważ wektor $(\nabla \times \vec{\upsilon}) \times \vec{\upsilon}$ jest prostopadły do wektora $\vec{\upsilon}$

to lewa strona równania (**) przyjmuje wartość zero co oznacza, że dla przepływu stacjonarnego

$$\vec{\upsilon} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi\right) = 0$$

Czyli dla małego przesunięcia w kierunku ruchu cieczy wielkość w nawiasie nie ulega zmianie…

Ale w przepływie stacjonarnym (ustalonym), wszystkie przesunięcia zachodzą wzdłuż linii prądu! Zatem **wzdłuż linii prądu** zachodzi związek:

$$\boxed{\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = const}$$ Twierdzenie Bernoulliego

Jeśli ruch jest bezwirowy, to już wcześniej moglibyśmy napisać:

$$\vec{\Omega} = (\nabla \times \vec{\upsilon}) \times \vec{\upsilon} = 0$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi\right) = 0$$

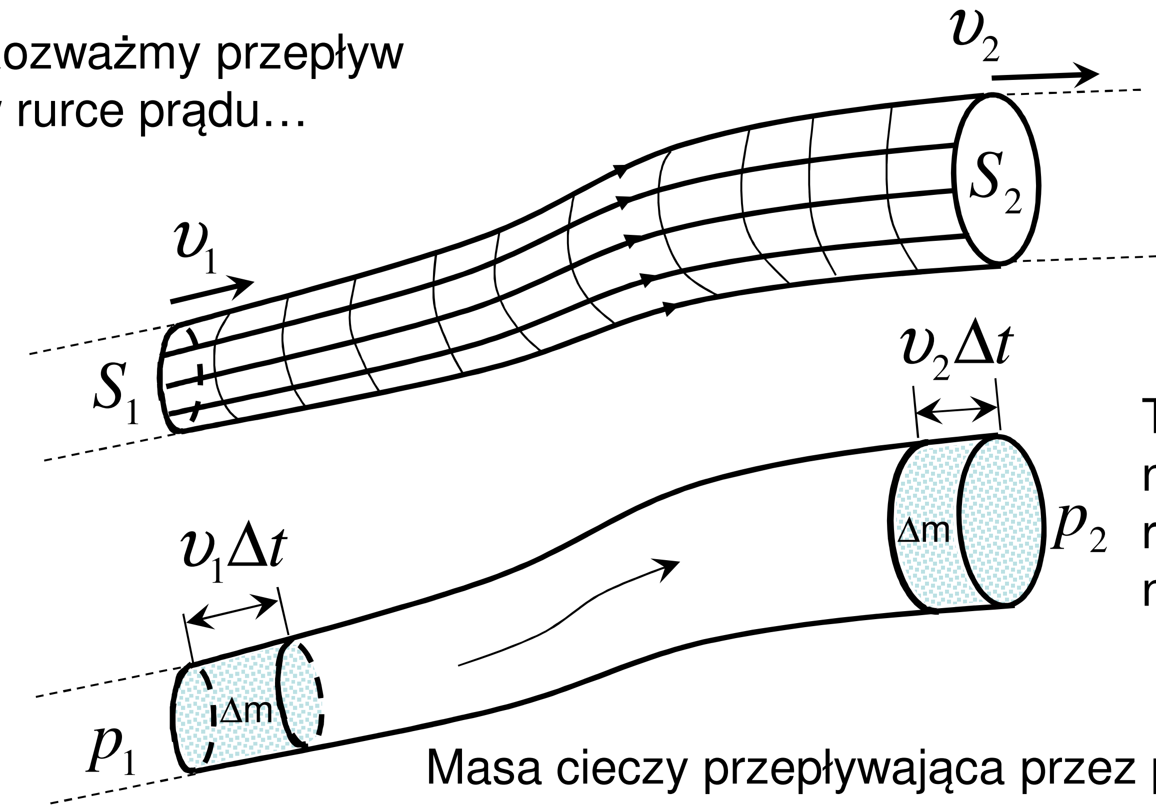
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi = const}$$ zachodzi w całej cieczy!

Równanie Bernoulliego można też wyprowadzić inaczej korzystając z zasady zachowania energii…

Twierdzenie Bernoulliego – przejaw zasady zachowania energii

Rozważmy przepływ
w rurce prądu…



Rurka prądu

Tyle ile cieczy ile wpłynęło
na jednym końcu
rurki musi wypłynąć
na drugim:

Masa cieczy przepływająca przez przekrój S_1 w czasie Δt…

$$\Delta m = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2}$$

Praca wykonana przez ciśnienie w cieczy (siła razy przesunięcie):

$$\Delta W = p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t$$

Zmiana energii masy Δm przy przejściu od powierzchni S_1 do powierzchni S_2

$$p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t = \Delta m (E_2 - E_1) \; (*)$$

gdzie, E_1, E_2 – energia przypadająca na jednostkę masy, odpowiednio na powierzchni S_1 oraz S_2.

Całkowitą energię na jednostkę masy cieczy można przestawić w postaci sumy energii kinetycznej, potencjalnej φ i pewnej energii wewnętrznej cieczy U:

$$E = \frac{1}{2}\upsilon^2 + \varphi + U$$

Korzystając z tego związku wyrażenie (*) można zapasać w postaci

$$\frac{p_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t - p_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t}{\Delta m} = \frac{1}{2}\upsilon_2^2 + \varphi_2 + U_2 - \frac{1}{2}\upsilon_1^2 + \varphi_1 + U_1$$

ale $\Delta m = \rho_1 S_1 \upsilon_1 \Delta t = \rho_2 S_2 \upsilon_2 \Delta t$ więc:

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\upsilon_1^2 + \varphi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}\upsilon_2^2 + \varphi_2 + U_2$$

Dla cieczy nieściśliwej i bez lepkości wyraz z energią wewnętrzną jest taki sam po obu stronach równania i wzdłuż rurki mamy:

$$\boxed{\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\upsilon^2 + \varphi = const}$$

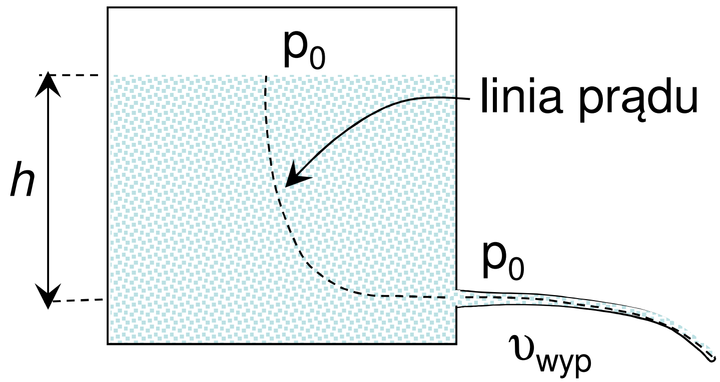
Prawo Bernoulliego

Wypływ cieczy z naczynia

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho\varphi = const}$$

Na górze: $\upsilon = 0, \quad p = p_0, \quad \varphi = 0$

Przy otworze: $\upsilon_{wyp}, \quad p = p_0, \quad \varphi = -gh$



Zatem: $$p_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_{wyp}^2 - \rho gh$$

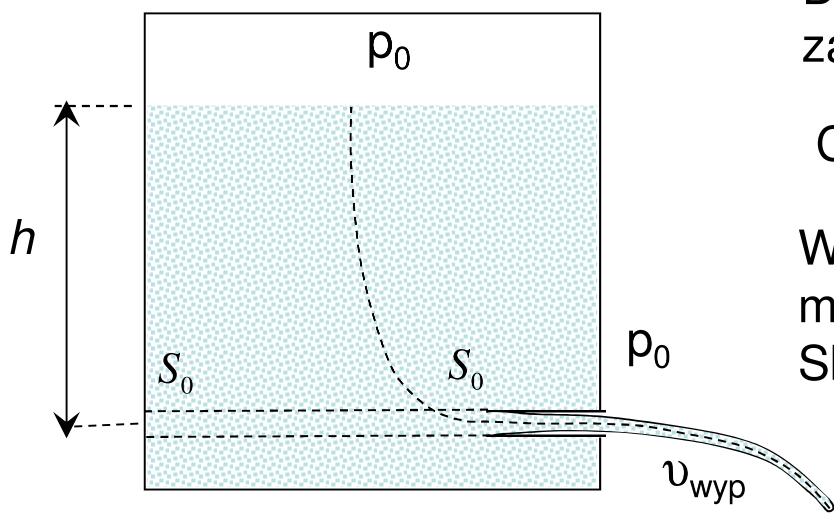
Stąd: $$\boxed{\upsilon_{wyp} = \sqrt{2gh}}$$

Tak jak przy spadku swobodnym!

Ile wody wypływa ze zbiornika w jednostce czasu?

Zdziwiłby się ten kto by myślał, że wystarczy pomnożyć prędkość wypływu przez czas i rzeczywistą powierzchnię otworu. Strumień cieczy zawęża się i w efekcie wypływ cieczy zmniejsza się - dla otworu o przekroju kołowym do ok. 60%... Dlaczego?

Rozważmy sytuację, w której do środka naczynia wstawimy rurkę o pewnym (małym) przekroju S_0…



Dotychczas korzystaliśmy z zasady zachowania energii.

Co z zasadą zachowania pędu?

Wypływająca ciecz unosi pewien pęd, a zatem musi na nią działać pewna siła…
Skąd się bierze?

Siła pochodzi od ścianek naczynia…

Niech przekrój strumienia wyniesie: $S_{eff} = \alpha S_0$

W czasie $\boldsymbol{\Delta t}$ z otworu wypłynie masa Δm:

$$\Delta m = \alpha S_0 \rho \upsilon_{wyp} \Delta t$$

Unoszony przez ciecz pęd wyniesie:

$$\Delta \tilde{p} = (\alpha S_0 \rho \upsilon_{wyp} \Delta t)\upsilon_{wyp} = \alpha S_0 \rho \upsilon_{wyp}^2 \Delta t$$

Zatem na element ścianki naczynia naprzeciwko rurki działa siła:

$$F = \frac{\Delta \tilde{p}}{\Delta t} = \alpha S_0 \rho \upsilon_{wyp}^2$$

Siła reakcji działająca na strumień jest równa sile parcia jaki wywiera ciecz na powierzchnię ścianki S_0 naprzeciwko otworu (zakładamy, że przy ściankach ciecz się praktycznie nie rusza):

$$F = S_0 \rho g h$$

$$\Downarrow$$

$$S_0 \rho g h = \alpha S_0 \rho \upsilon_{wyp}^2$$

Ale wiemy, że $\upsilon_{wyp} = \sqrt{2gh}$

$$\Downarrow$$

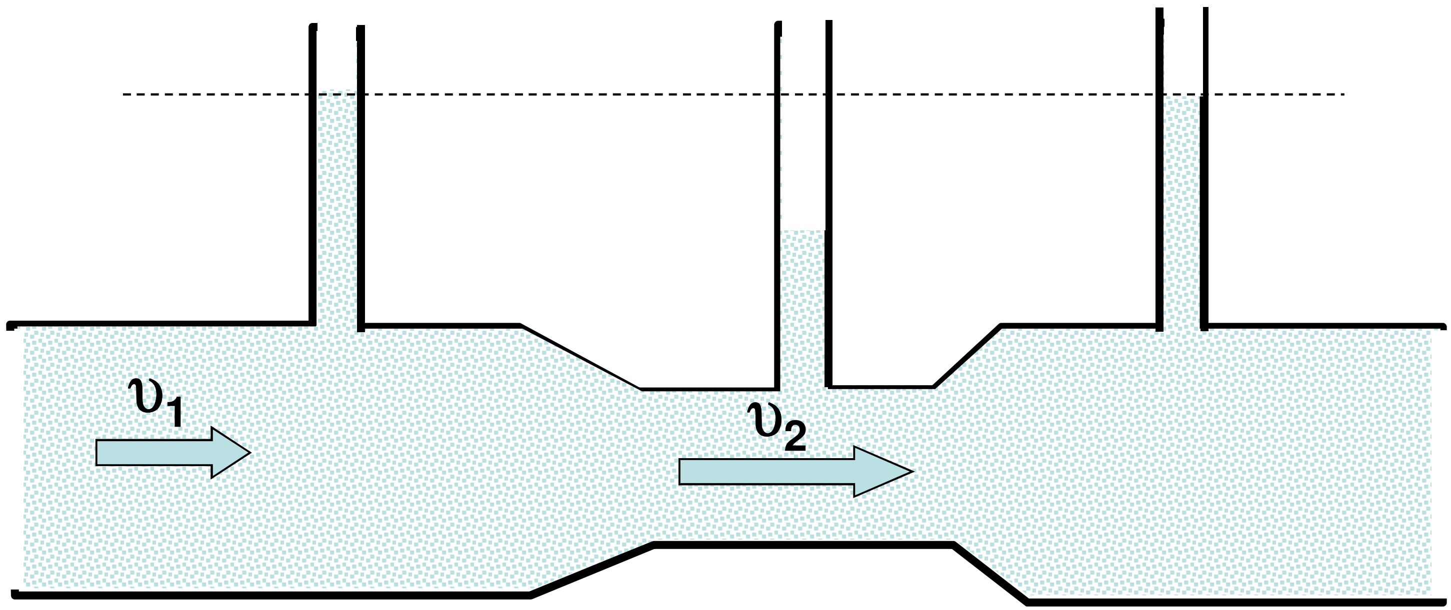
$$S_0 \rho g h = \alpha S_0 \rho 2 g h$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Zatem z takiego otworu wypłynie o połowę mniej cieczy, niż by się można spodziewać! Ma to znaczenie, jeśli chce się wiedzieć ile wody może wypłynąć z beczkowozu przez otwór o znanej średnicy…

Ciśnienie statyczne i dynamiczne



$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}\upsilon^2+\varphi=const$$

Na tym samym poziomie mamy ten sam potencjał …

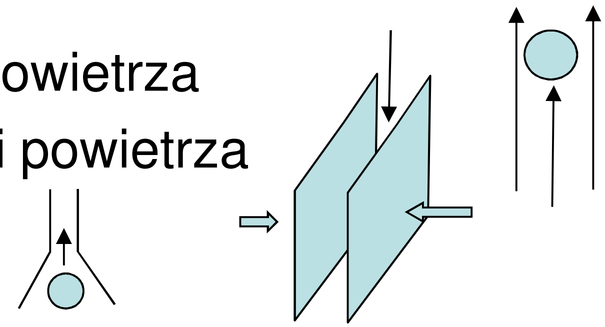
$$p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2=p_2+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \Longrightarrow p_1-p_2=\frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2-\upsilon_1^2)$$

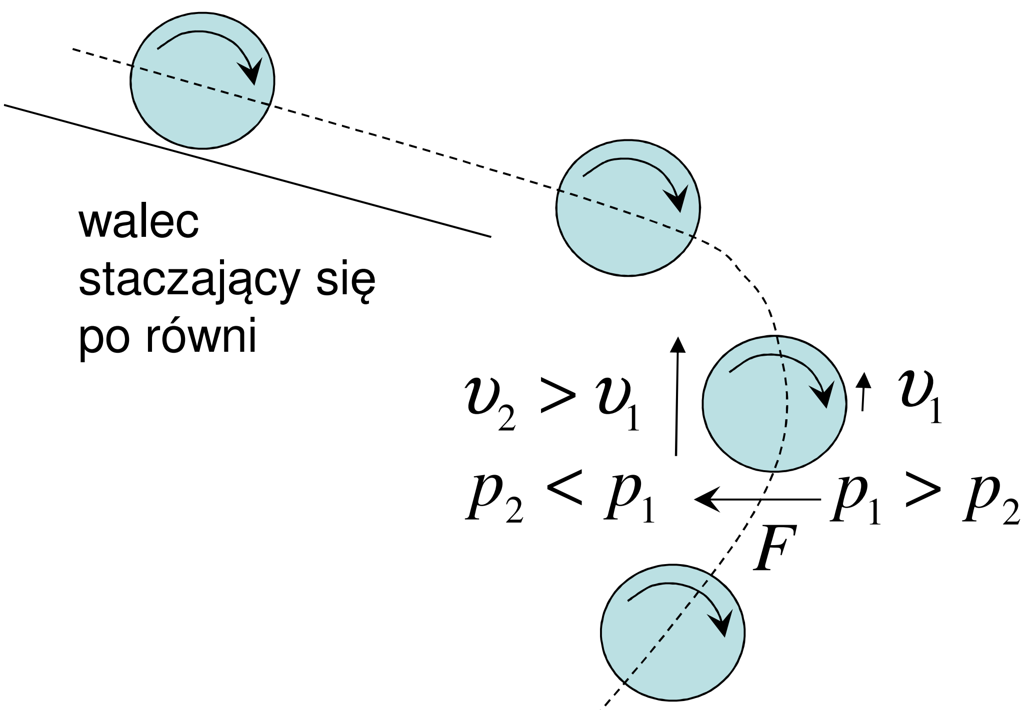
Ale z równania ciągłości:

$$\upsilon_1 S_1=\upsilon_2 S_2 \Longrightarrow p_1-p_2=\frac{\rho}{2}\upsilon_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}-1\right)$$

Trochę doświadczeń ilustrujących prawo Bernoulliego

- kuleczka ping-pongowa w strumieniu powietrza
- strumień powietrza pomiędzy kartkami powietrza
- wciąganie kulki przez lejek…
- efekt Magnusa…i lepkość





Jakościowe wyjaśnienie:
Dzięki lepkości
obracający się walec „napędza" cząsteczki powietrza po lewej stronie i hamuje po prawej…
Po lewej stronie walca gaz ma większą prędkość, niż po prawej, to oznacza (zgodnie z prawem Bernoulliego), że ciśnienie statyczne po prawej stronie będzie większe niż po lewej…
Wykorzystują to piłkarze, strzelając bramki np. z rzutu rożnego…

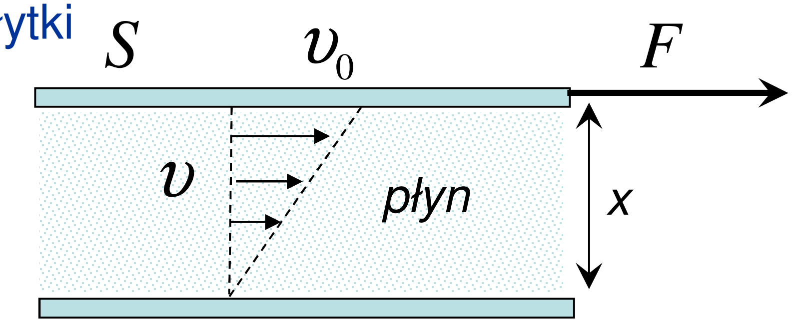
Lepkość – tarcie wewnętrzne

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$

Siła oporu proporcjonalna do prędkości ruchu

Powietrze (20 ^{0}C)	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$ N s/m^2
Woda (20 ^{0}C)	$1{,}0 \cdot 10^{-3}$ N s/m^2
Gliceryna (20 ^{0}C)	$8{,}5 \cdot 10^{-1}$ N s/m^2
Olej rycynowy (20 ^{0}C)	$9{,}7 \cdot 10^{-1}$ N s/m^2
Smoła (20 ^{0}C)	10^7 N s/m^2

Rozważmy dwie (bliskie siebie) płaskie płytki z cieczą lepką pomiędzy nimi…



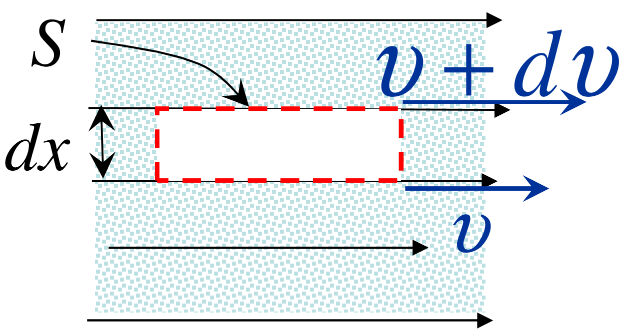
Naprężenie ścinania $$\frac{F}{S} = \eta \frac{\upsilon_0}{x}$$

η - współczynnik lepkości

S - powierzchnia płytki

$$F = -k\upsilon_0$$ gdzie $$k = \eta \frac{S}{x}$$

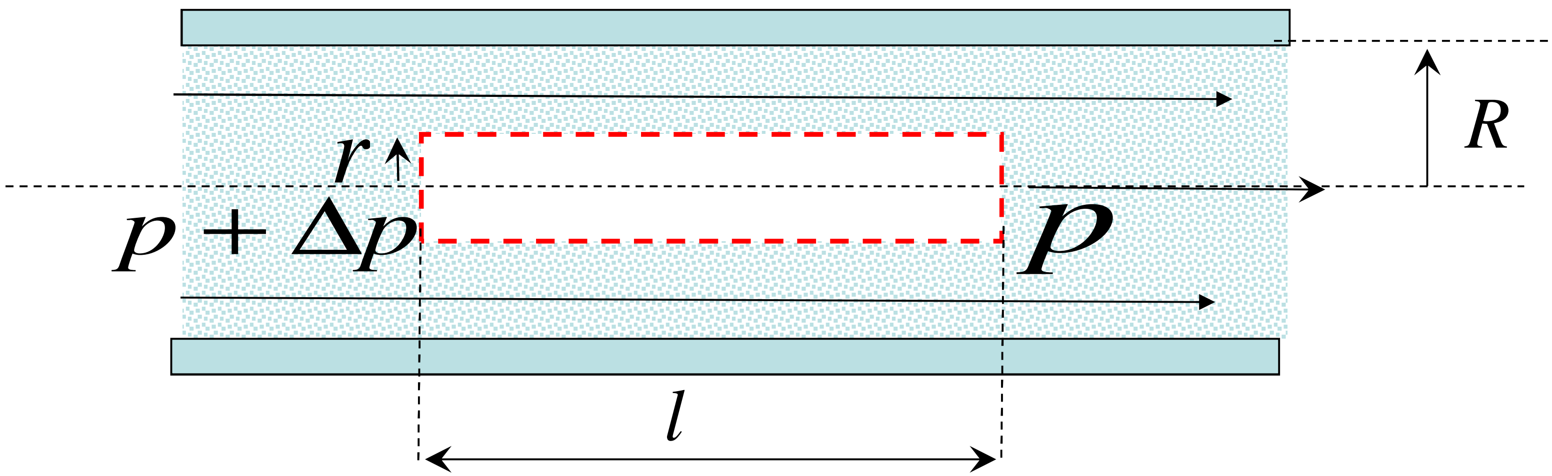
Jeśli rozważymy dwie bardzo bliskie warstwy w cieczy to wtedy siłę ścinającą (siłę lepkości) możemy przedstawić w postaci



$$F = \eta S \frac{d\upsilon}{dx}$$

$\frac{d\upsilon}{dx}$ - spadek szybkości cieczy w kierunku prostopadłym do przepływu

Przepływ cieczy lepkiej przez (wąską) rurkę



Rozważmy rurkę (strugę) cieczy o promieniu *r* . Niech różnica ciśnień na końcach elementu takiej rurki (o długości *l*) wynosi *Δp*

Siła podtrzymująca przepływ stacjonarny w takiej rurce wynosi:

$$F = \Delta p \pi r^2$$

Wartość siły oporu lepkiego, działająca rurkę (ścianki rurki) wynosi:

$$F_l(r) = -\eta 2\pi l r \frac{d\upsilon}{dr}$$

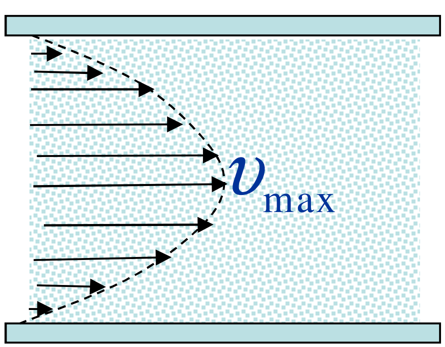
Dla przepływu stacjonarnego $\boldsymbol{F_l = F} \Rightarrow \Delta p \pi r^2 = -\eta 2\pi l r \frac{d\upsilon}{dr}$

To równanie określa zależność szybkości cieczy od odległości od środka rurki *r*

$$d\upsilon = -\frac{\Delta p}{2\eta l} r dr$$

Na powierzchni rurki r=R, υ(R)=0
W środku rurki:
υ(0)= υ

$$\upsilon(r) = \int_0^{\upsilon} d\upsilon' = -\frac{\Delta p}{2\eta l}\int_R^r r' dr'$$

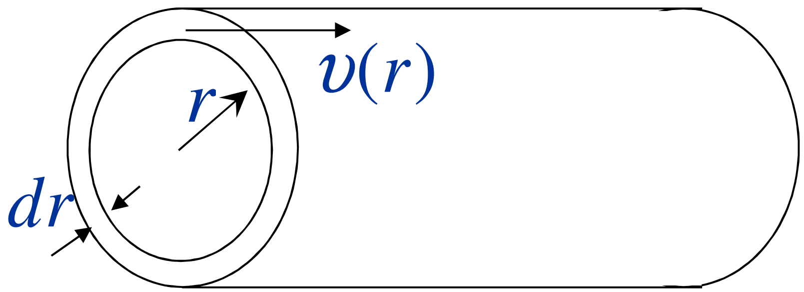


$$\boxed{\upsilon(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right)}$$

Rozkład prędkości ma kształt paraboli!

$$\upsilon_{max} = \frac{\Delta p}{2\eta l} R^2$$

Objętość cieczy przepływającą przez rurkę w jednostce czasu można obliczyć sumując przyczynki od pierścieni o grubości *dr* otaczających naszą strugę… Wewnątrz pierścienia prędkość wynosi υ(r)



$$dI = \frac{dV}{dt} = \upsilon(r) 2\pi r dr$$

$$I = \int_0^R \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right) 2\pi r dr = \frac{\Delta p \pi}{2\eta l}\left[R^2 \int_0^R r dr - \int_0^R r^3 dr\right]$$

$$I = \frac{\Delta p \pi}{2\eta l}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] \Rightarrow \boxed{I = \frac{\Delta p \pi R^4}{8\eta l}}$$

Naczynia krwionośne
- sieć kapilarna, przepływ napędzany przez serce…

Wzór Poiseuille'a: pozwala określić wartość współczynnika lepkości η z pomiaru ilości cieczy wypływającej z rurki (kapilary)…