

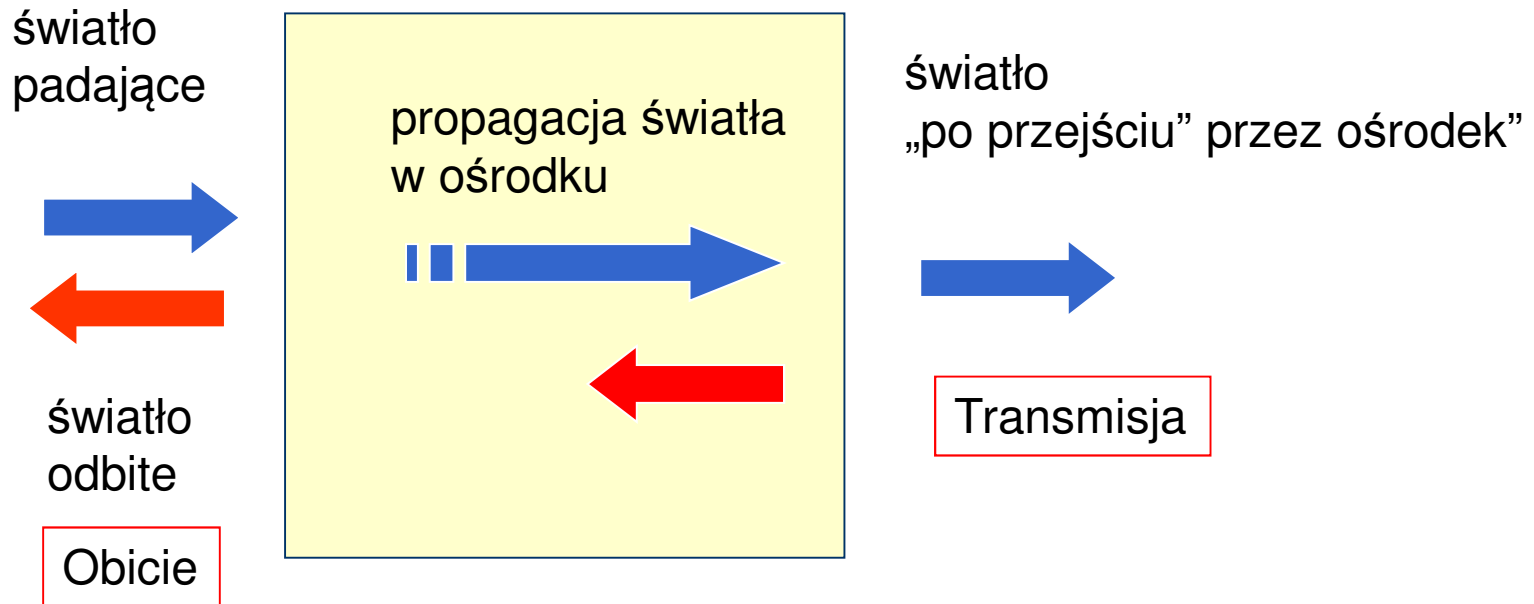
Własności optyczne półprzewodników

Andrzej Wysmołek

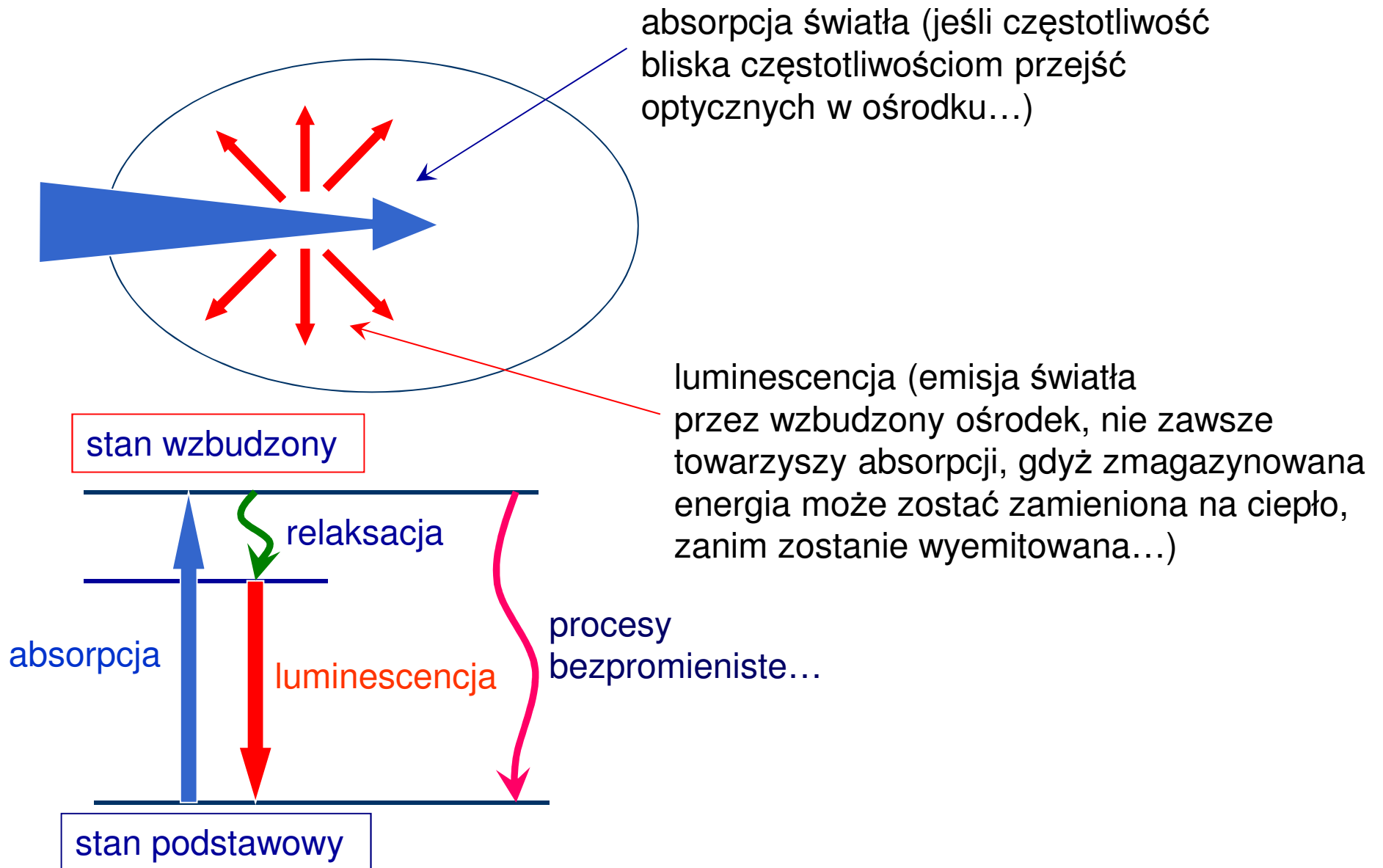
Wykład przygotowany w oparciu o wykłady prowadzone
na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego

przez
prof. Mariana Grynberga oraz prof. Romana Stępniewskiego

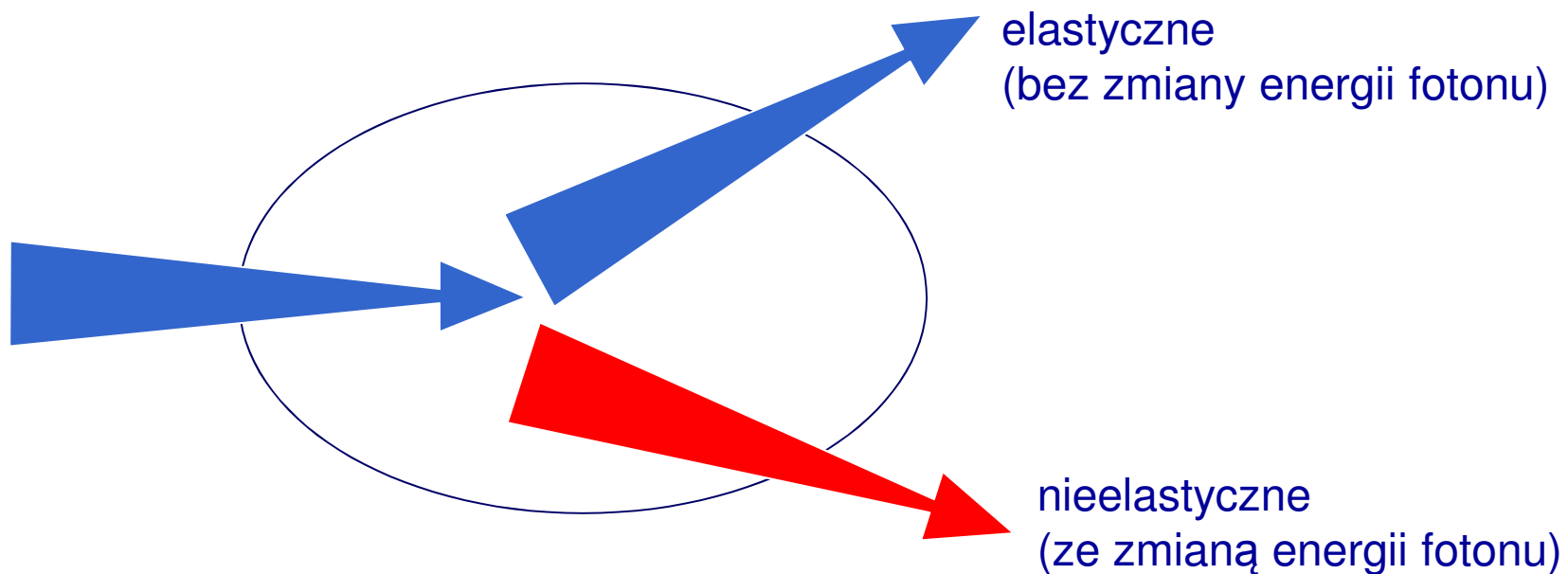
Klasyfikacja procesów optycznych



Absorpcja, luminescencja, rozpraszanie...



Rozpraszanie światła



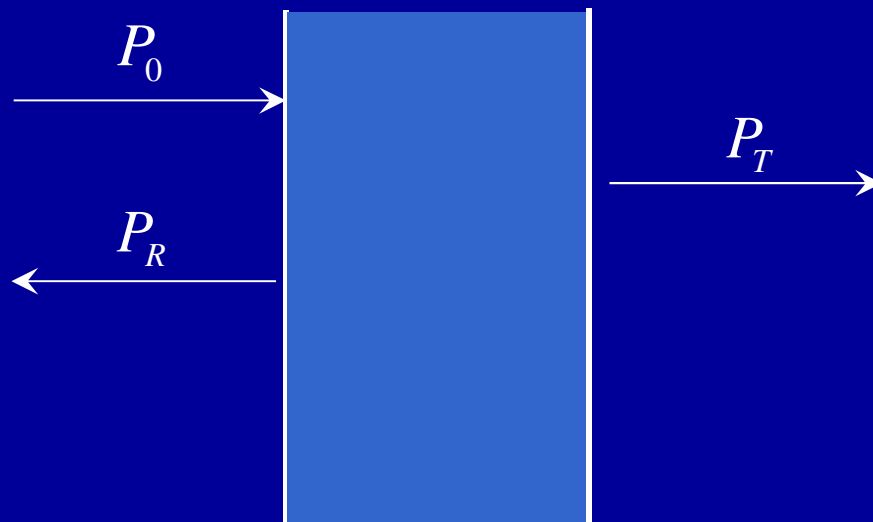
Procesy nieliniowe... (wymagana duża intensywność światła)

Stałe optyczne

Odbicie na granicy ośrodków.
Współczynnik odbicia:

$$R = \frac{P_R}{P_0}$$

P_R – moc odbita
 P_0 – moc padająca



Współczynnik transmisji

$$T = \frac{P_T}{P_0}$$

Sposób dokładnego pomiaru: przyrządy dwuwiazkowe np.. Cary



Gdyby nie było absorpcji, rozpraszania...

$$T + R = 1$$

Propagacja światła poprzez przezroczyste medium, rządzona jest przez współczynnik załamania...

W rzeczywistości współczynnik załamania zależy od częstości fali świetlnej (dyspersja)...

$$n = \frac{c}{v}$$

Absorpcja

Współczynnik absorpcji α :

Moc na jednostkę powierzchni - natężenie światła $I = \frac{P}{S}$

Zmiana natężenia światła w warstwie o grubości dz $dI = -\alpha I(z) dz$

Po scałkowaniu: $I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$ Prawo Beera

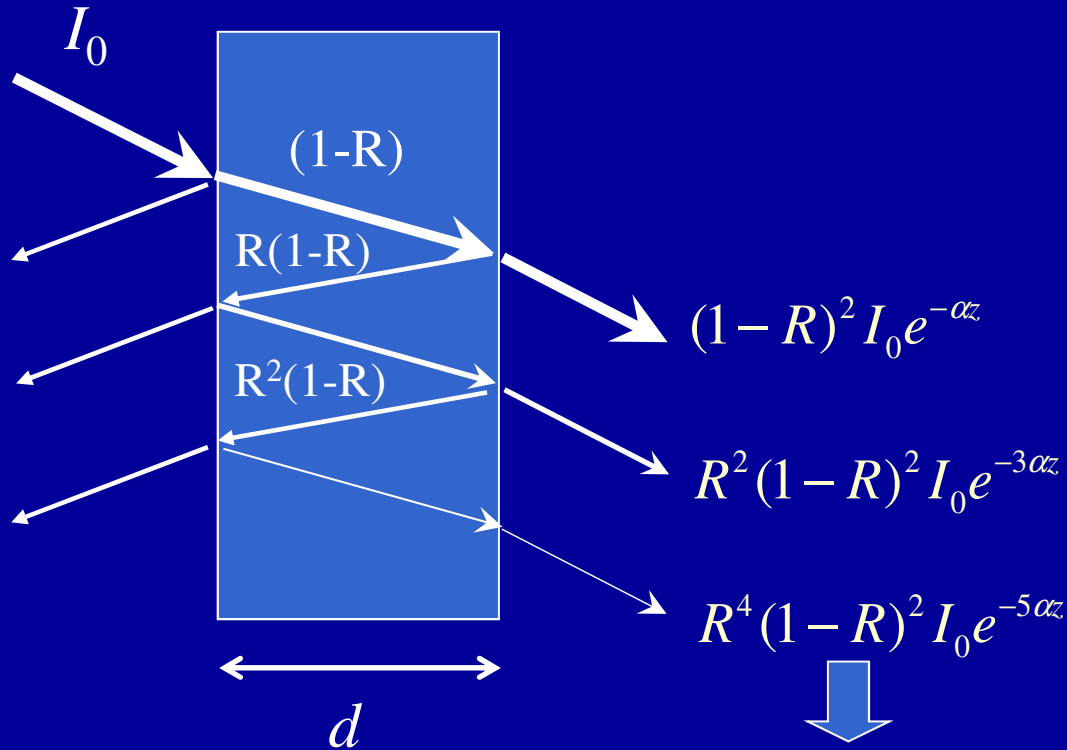
Współczynnik absorpcji zależy od częstości światła propagującego się w ośrodku, stąd dany materiał optyczny może absorbować jakieś barwy a inne nie...

Gęstość optyczna
absorbancja:

$$\text{O.D.} = -\log\left(\frac{I(d)}{I_0}\right) = -\log T$$

Przydatne w laboratorium przy wyborze filtrów optycznych...

Wielokrotne odbicia...



Suma ciągu geometrycznego:

$$T = \frac{I_T}{I_0} = \frac{(1-R)^2}{1-R^2 e^{-2\alpha d}} e^{-\alpha d}$$

Gdy α duże
tylko dwa odbicia:

$$T \cong (1-R)^2 e^{-\alpha d}$$

Gdy $\alpha \rightarrow 0$ (bardzo małe

$$T \cong \frac{(1-R)^2}{1-R^2}$$

$$R \cong \frac{1-T}{1+T}$$

Transmisja warstwy krzemu

Zbadajmy transmisję i gęstość optyczną warstwy krzemu o grubości $10\mu\text{m}$, dla długości fali 632.8nm (laser He-Ne). Współczynnik absorpcji dla tej długości fali wynosi $\alpha=3.8\cdot 10^3\text{ cm}^{-1}$, natomiast współczynnik odbicia krzemu $R=0.35$.

$$\alpha d = 3.8 \times 10^3 \times 10^2 \times 10 \times 10^{-6} = 3.8$$

Iloczyn αd jest duży, możemy więc zaniedbać wielokrotne odbicia, zatem:

$$T = (1 - R)^2 e^{-\alpha d} = (1 - 0.35)^2 e^{-3.8} = 0.0095$$

$$\text{O.D.} = -\log(0.0095) = 2.025$$

Gdybyśmy nie uwzględnili odbicia ($R \approx 0$) dostalibyśmy:

$$\text{O.D.} = 0.434 \alpha d = 0.434 \times 3.8 = 1.65 \quad (T \cong 0,022)$$

Absorpcja i rozpraszanie

Rozpraszanie światła spowodowane jest obecnością zmian współczynnika załamania na obszarach mniejszych niż długość fali – może być spowodowane obecnością domieszek, defektów czy też innych niejednorodności w kryształach...

Intensywność wiązki propagującej się (w danym kierunku) przez rozpraszające medium zanika wykładniczo:

$$I(z) = I_0 \exp(-N\sigma_s z)$$

Gdzie N – liczba centrów rozpraszających w jednostce objętości, σ_s – przekrój czynny na rozpraszanie (wymiar powierzchni).

Wzór identyczny jak dla absorpcji jeśli $\alpha \equiv N\sigma_s$

Jakie są różnice pomiędzy rozpraszaniem a absorpcją?

Dla rozpraszania elastycznego (rozpraszanie Rayleigh'a) mamy zależność:

$$\sigma_s(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^4}$$

Uwaga praktyczna: Wykonując pomiary optyczne w UV należy dokładać większych starań by eliminować efekty rozpraszania światła laserowego...(filtry, przesłony, itp...)

Niebieskie niebo



Zachód słońca

foto © Dariusz Pawłowski

Dolny Śląsk - zachód słońca

Polska.pl

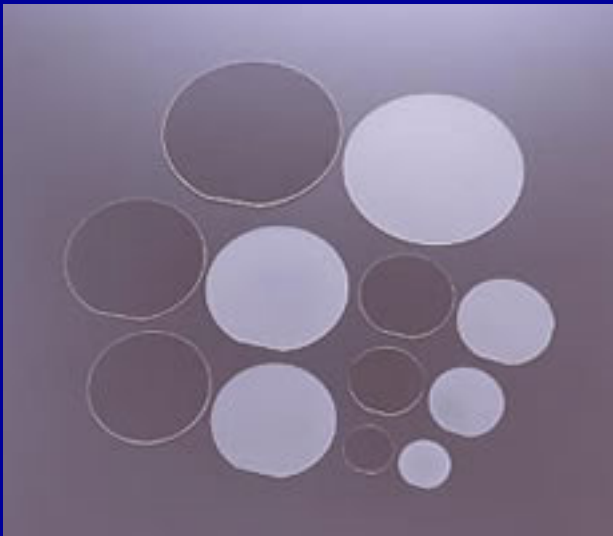
Sławne rubiny i szafiry



Al_2O_3 (korund)



- $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Cr} \rightarrow$ rubin



- $\text{Al}_2\text{O}_3:\text{Ti} \rightarrow$ szafir

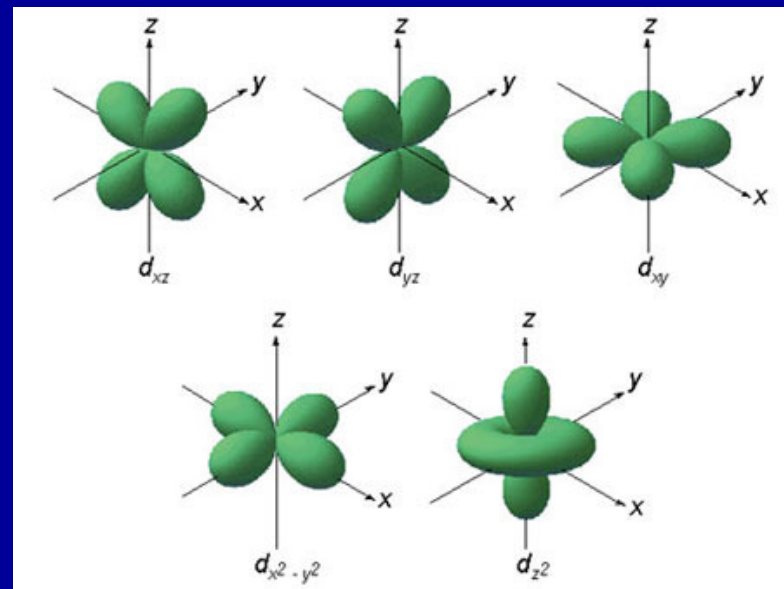


Skąd te kolory?

Cr – [Ar]



Ti - [Ar]



Po wbudowaniu do Al_2O_3

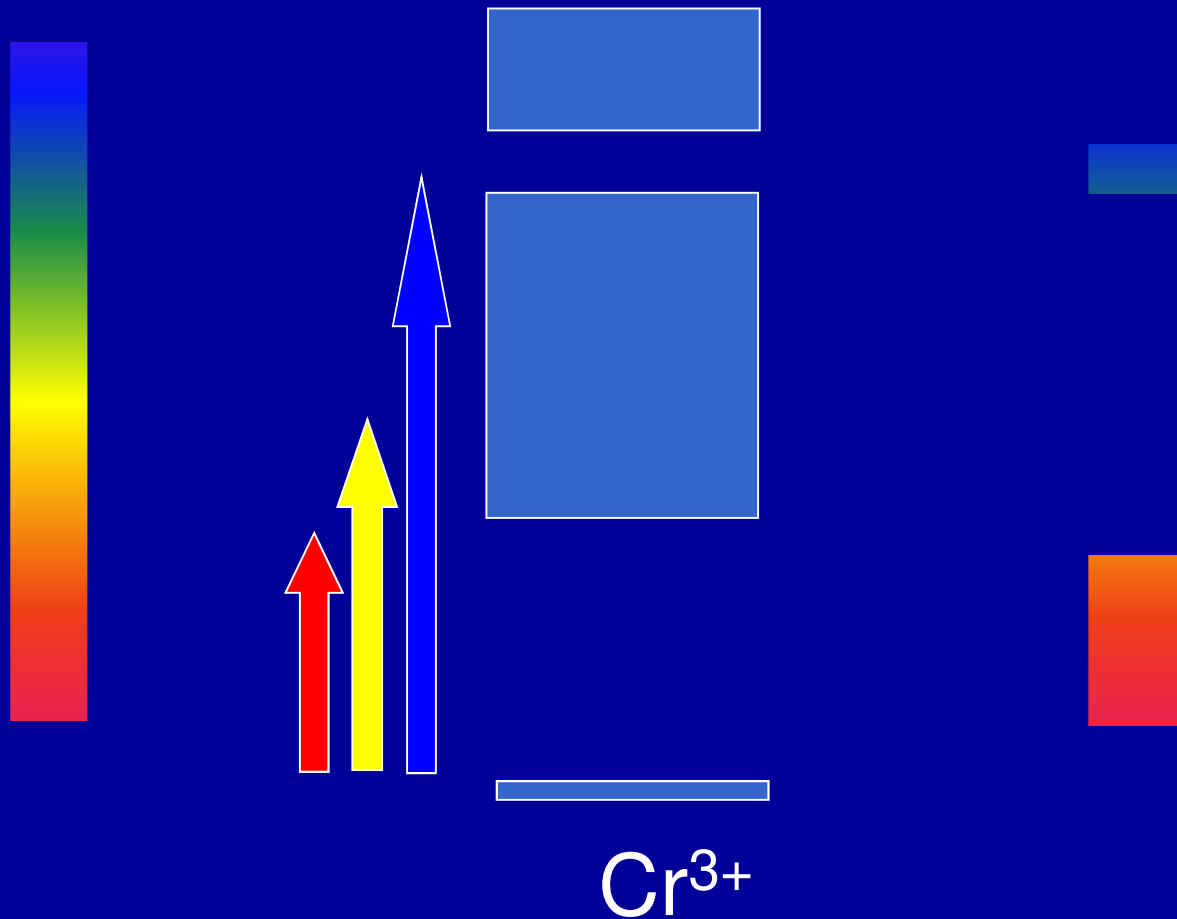


Metale przejściowe:

Chrom, tytan, żelazo, mangan, kobalt, nikiel....

Orbitale d zachowują swój atomowy charakter!

Charakterystyczne widmo absorpcji



Domieszki – centra barwne

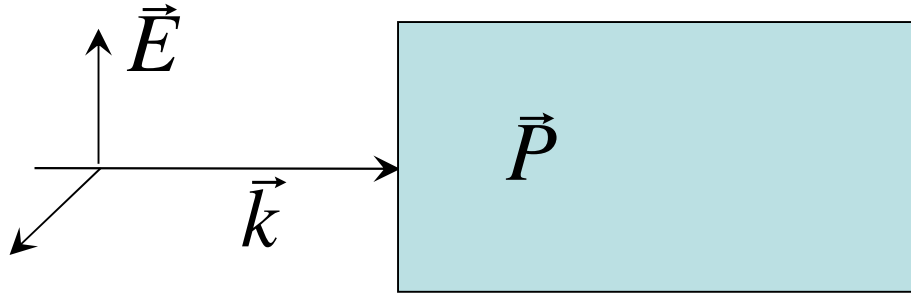
Niewielka liczba atomów chromu zmienia bezbarwny korund na rubin...

Badanie absorpcji, luminescencji jest więc dobrą metodą wykrywania domieszek!

W trakcie wykładu okaże się, że metody te są bardzo przydatne do badania różnego rodzaju wzbudzeń w materii skondensowanej zarówno w skali makro jak też nano...

Oddziaływanie fali elektromagnetycznej z ośrodkiem

Liniowa odpowiedź ośrodka dielektrycznego na zewnętrzne zaburzenie (pole elektromagnetyczne fali)



- natężenie pola elektrycznego \vec{E}

- polaryzacja ośrodka \vec{P}

Założmy (dla ułatwienia), że:

- zajmujemy się ośrodkiem izotropowym $\Rightarrow \vec{P} \parallel \vec{E}$

- zakładamy, że polaryzacja jest proporcjonalna do zewnętrznego pola elektrycznego $\Rightarrow \vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

(pomijamy efekty nieliniowe!)

χ – podatność dielektryczna

Liniowa odpowiedź ośrodka dielektrycznego

Wektor indukcji elektrycznej można wyrazić jako:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Względna stała dielektryczna ośrodka:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} \quad \varepsilon_r = 1 + \chi$$

Wektor indukcji magnetycznej:

$$\vec{M} = \chi_M \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

χ_M - względna podatność magnetyczna:

Względna przenikalność magnetyczna: $\mu_r = 1 + \chi_M$

Równania Maxwella

$$\nabla \vec{D} = \rho$$

Prawo Gaussa dla elektrostatyki

$$\nabla \vec{B} = 0$$

Prawo Gaussa dla magnetostatyki
(nie ma monopoli magnetycznych)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Prawo Faradaya

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Prawo Ampera z prądem przesunięcia
(drugi składnik po prawej stronie)

Równania materiałowe (definiujące ośrodek)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

μ_r – względna przenikalność magnetyczna

j – gęstość prądu,

σ – przewodnictwo (w ogólności tensor)

Fale elektromagnetyczne w ośrodku bez swobodnych ładunków i prądów

(izolator niemagnetyczny)

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{j} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \vec{D} = 0, \nabla \vec{E} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \\ \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \end{cases}$$

Równania Maxwella

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Bierzemy rotację z pierwszego równania i korzystamy z drugiego równania:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{R1})$$

Wiadomo, że zachodzi tożsamość wektorowa

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \cdot \nabla \vec{E} - \nabla^2 \vec{E}$$

Jednak z faktu, że $\rho = 0$ wynika, że $\nabla \vec{E} = 0 \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla^2 \vec{E}$

Zatem równanie (R1) przyjmuje postać:

$$\nabla^2 \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (\text{R2})$$

Postać tego równania jest identyczna z klasycznym równaniem falowym

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Zatem równanie (R2) opisuje fale elektromagnetyczne o prędkości spełniającej związek

$$\frac{1}{v^2} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r$$

W próżni $\varepsilon_r = 1, \mu_r = 1 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$

W ośrodku $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} c \quad \Rightarrow \quad n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$ n - współczynnik załamania

Dla ośrodków „niemagnetycznych”
dla częstości optycznych można przyjąć $\mu_r = 1$



Współczynnik załamania

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

Związek między
stałą dielektryczną
a współczynnikiem
załamania

Rozwiązanie dla pola elektrycznego fali elektromagnetycznej
propagującej się w kierunku \mathbf{z} ma postać:

$$E(z, t) = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

gdzie k - liczba falowa
(mówimy o jednym wymiarze –
w ogólności wektor falowy)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Po podstawieniu do równania (R2) dostajemy związek:

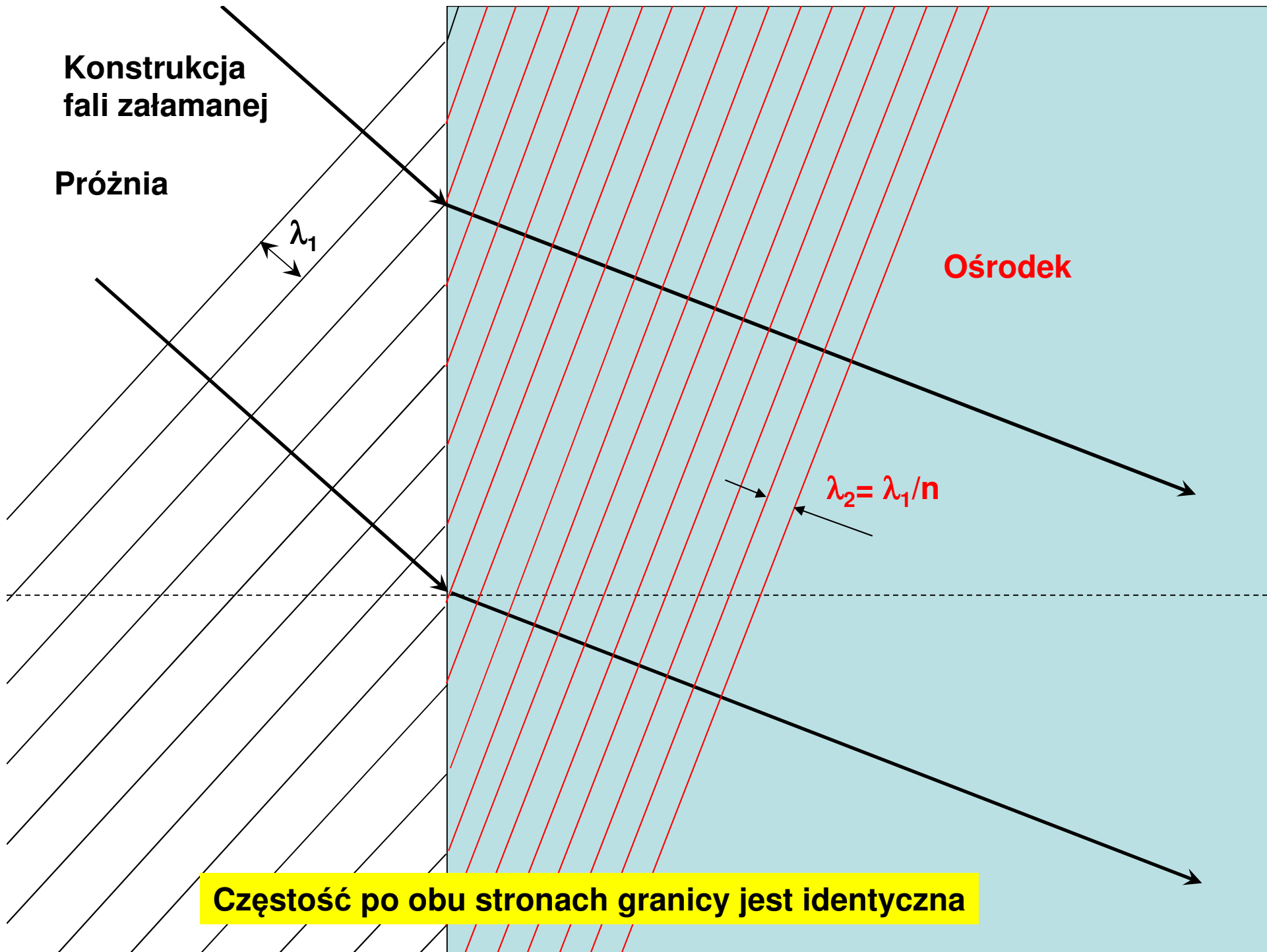
$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c}$$

$$\Rightarrow E(z, t) = E_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c}z - \omega t\right)}$$

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega n} = \frac{2\pi}{\omega} v$$

**Długość fali w ośrodku
jest mniejsza niż w próżni,
stąd zjawisko załamania światła!**

**Bez absorpcji:
- amplituda nie ulega zmianie,
- n – nie zależy od częstości!**



Jak opisać absorpcję i załamanie
jednocześnie?

Zespolony współczynnik załamania

$$\tilde{n} = n + i\kappa$$

n - „zwykły” współczynnik załamania

κ - współczynnik ekstynkcji

$$k = \frac{\tilde{n} \omega}{c} = \frac{n + i\kappa}{c} \omega$$



$$E(z, t) = E_0 e^{i\left(\frac{n+i\kappa}{c}\omega z - \omega t\right)} = e^{-\frac{\kappa\omega}{c}z} E_0 e^{i\left(\frac{n\omega}{c}z - \omega t\right)}$$

zanik wykładniczy
amplitudy
(pochłanianie energii)

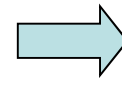
propagacja fali
z prędkością
fazową c/n

Zatem zmiana natężenia fali elektromagnetycznej po przejściu dystansu z :

$$I(z) \propto |E(z)|^2 = I_0 e^{-\frac{2\kappa\omega}{c}z}$$

ale z prawa Beera:

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$



$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0}$$

λ_0 - długość fali w próżni

Związek pomiędzy zespolonym współczynnikiem załamania i stałą dielektryczną:

$$\tilde{n} = n + i\kappa \equiv \sqrt{\tilde{\epsilon}_r}$$

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_1 + i\epsilon_2$$



$$\epsilon_1 = n^2 - \kappa^2$$

$$\epsilon_2 = 2n\kappa$$

Związek pomiędzy częścią rzeczywistą i częścią urojoną funkcji dielektrycznej

Dla słabo absorbującego medium κ jest małe i wtedy:

$$\varepsilon_1 = n^2 - \kappa^2 \cong n^2$$

$$\varepsilon_2 = 2n\kappa$$

$$n = \sqrt{\varepsilon_1}$$

$$\kappa = \frac{\varepsilon_2}{2n}$$



Czyli współczynnik załamania
związany jest z częścią rzeczywistą
zespolonej funkcji dielektrycznej

Współczynnik ekstynkcji
określony jest (głównie) przez część
urojoną zespolonej funkcji
dielektrycznej

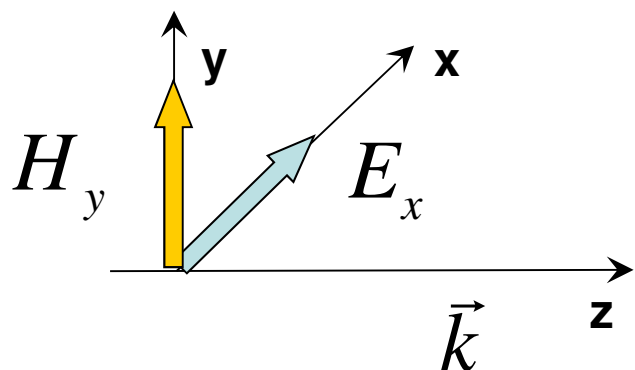
Można też wyrazić współczynnik załamania i współczynnik ekstynkcji przez rzeczywistą i urojoną część funkcji dielektrycznej:

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2}$$

Fala elektromagnetyczna na granicy ośrodków

Rozważmy falę elektromagnetyczną propagującą się wzdłuż osi z



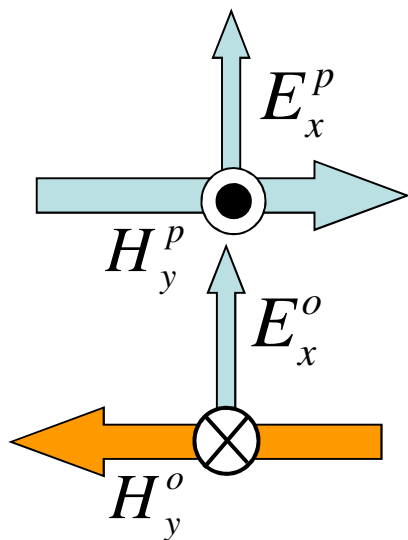
$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(z, t) = E_{x0} e^{i(kz - \omega t)} = E_{x0} e^{i\left(\frac{\tilde{n}\omega}{c}z - \omega t\right)} \\ E_y(z, t) = 0 \\ H_x(z, t) = 0 \\ H_y(z, t) = H_{y0} e^{i\left(\frac{\tilde{n}\omega}{c}z - \omega t\right)} \end{array} \right.$$

Odbicie od granicy ośrodków (padanie prostopadłe)

próżnia $n=1$

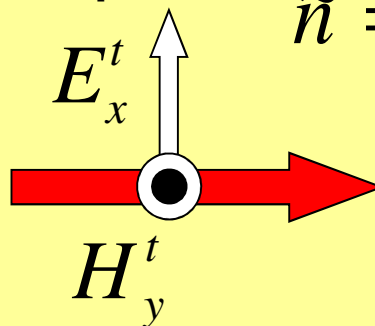
fala padająca

fala odbita



medium optyczne scharakteryzowane przez

$$\tilde{n} = n + iK$$



fala propagująca się w ośrodku

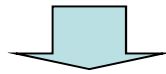
Warunki ciągłości na granicy ośrodków

$$\begin{cases} E_x^t = E_x^p + E_x^o \\ H_y^t = H_y^p - H_y^o \end{cases}$$

Związek pomiędzy polem elektrycznym i magnetycznym fali elektromagnetycznej

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{Założyliśmy, że}$$

$$\begin{cases} E_x(z, t) = E_{x0} e^{i(kz - \omega t)} \\ H_y(z, t) = H_{y0} e^{i(kz - \omega t)} \end{cases}$$



$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ E_{x0} e^{i(kz - \omega t)} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_y (ik) E_{x0} e^{i(kz - \omega t)}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{e}_y \mu_0 \mu_r (i\omega) H_{y0} e^{i(kz - \omega t)}$$



$$kE_{x0} = \mu_0 \mu_r \omega H_{y0}$$



$$H_{y0} = \frac{kE_{x0}}{\mu_0 \mu_r \omega} = \frac{\tilde{n} E_{x0}}{c \mu_0 \mu_r}$$

$$H_{y0} = \frac{kE_{x0}}{\mu_0\mu_r\omega} = \frac{\tilde{n}E_{x0}}{c\mu_0\mu_r}$$

Dla próżni: $\tilde{n} = 1, \mu_r = 1$

Dla ośrodka
(niemagnetycznego) $\tilde{n}, \mu_r = 1$

$$\begin{cases} E_{x0}^t = E_{x0}^p + E_{x0}^o \\ H_{y0}^t = H_{y0}^p - H_{y0}^o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_{x0}^t = E_{x0}^p + E_{x0}^o \\ \tilde{n}E_{x0}^t = E_{x0}^p - E_{x0}^o \end{cases}$$

$$\frac{E_{x0}^o}{E_{x0}^p} = \frac{1 - \tilde{n}}{1 + \tilde{n}} \Rightarrow R = \left| \frac{E_{x0}^o}{E_{x0}^p} \right|^2 = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2}$$

Gdy absorpcja jest mała (ośrodek przezroczysty)

$$R = \left(\frac{n - 1}{n + 1} \right)^2$$



$$n = \frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}}$$

Czyli znając współczynnik odbicia R możemy wyznaczyć współczynnik załamania ośrodka przezroczystego...
(np. korundu, rubinu...)

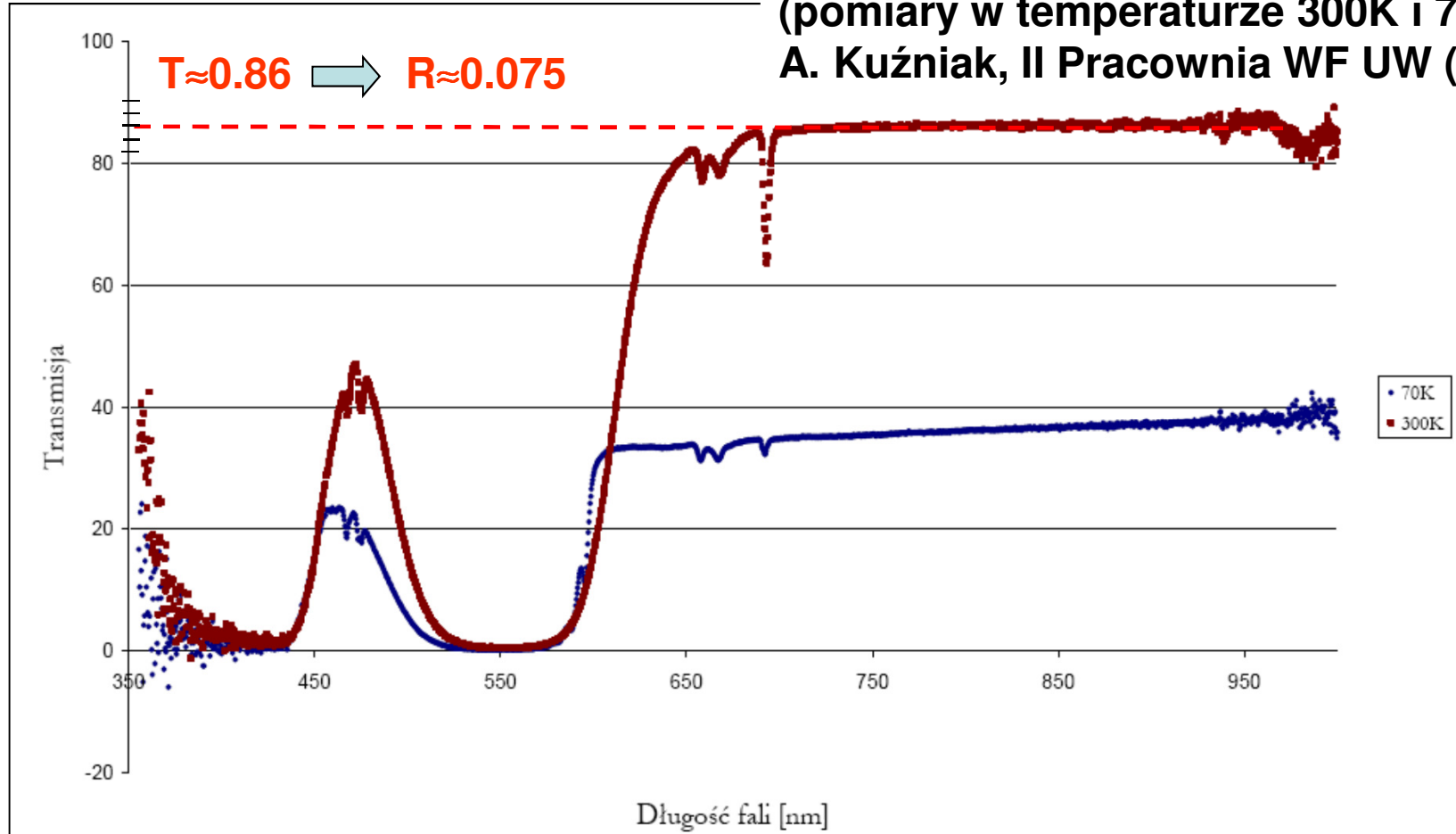
Widmo transmisji dostarcza też informacji

o współczynniku odbicia...

Przykład - widma rubinu

(pomiary w temperaturze 300K i 77K)

A. Kuźniak, II Pracownia WF UW (2006)



Dla małych α

$$T = \frac{(1-R)^2}{1-R^2}$$



$$R = \frac{1-T}{1+T}$$



$$n = \frac{1 + \sqrt{R}}{1 - \sqrt{R}} \cong 1,76$$

Al_2O_3 : 1,771(o), 1,763(e)

Przykład

(Mark Fox, Optical properties of solids)

Zespolony współczynnik załamania germanu dla światła o długości fali 400 nm (czyli dla energii większych od przerwy energetycznej germanu) dany jest wzorem

$$\tilde{n} = 4.141 + i2.215$$

Wyznaczyć:

- prędkość fazową światła o długości fali 400nm w germanie.
- współczynnik absorpcji germanu dla tej długości fali
- współczynnik odbicia

Ad. a) Prędkość fazowa związana jest z częścią rzeczywistą $\tilde{n} = n + iK$

$$v = \frac{c}{n} = \frac{2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}}{4.141} = 0.724 \times 10^8 \frac{m}{s}$$

Ad. b) Współczynnik absorpcji

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0} = \frac{4\pi \cdot 2.215}{400 \times 10^{-9} m} = 6.96 \times 10^7 \frac{1}{m} = 6.96 \times 10^5 \frac{1}{cm}$$

Ad. c) Współczynnik odbicia

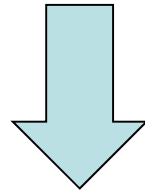
Nie uwzględniając κ mielibyśmy:

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = \frac{(4.141-1)^2 + 2.215^2}{(4.141+1)^2 + 2.215^2} = 0.47$$

$$R = \left(\frac{4.141-1}{4.141+1} \right)^2 = 0.37$$

Czyli za mało!

Wpływ **swobodnych** nośników ładunku na
własności optyczne ośrodka



Zależność własności optycznych od
częstotliwości fali elektromagnetycznej

Związanymi ładunkami zajmiemy się w następnej kolejności
(oczywiście wykorzystując model oscylatora harmonicznego...)

Jak uwzględnić wpływ swobodnych nośników w ośrodku?

Klasyczne równanie ruchu (tłumionego) elektronu w polu elektrycznym:

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + m_0 \gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \quad (\text{R3})$$

Zakładamy, że wszystkie nośniki niezależnie reagują na zaburzenie...

Rozważmy pole elektryczne oscylujące z częstością ω

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$$

Postulujemy rozwiązanie stacjonarne:

$$x(t) = x_0 e^{-i\omega t}$$

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

charakterystyczny
(niezależny od częstości)
czas rozpraszania τ
jest związany ze
współczynnikiem
tłumienia γ

Po podstawieniu do (R3) dostajemy:

$$x(t) = \frac{eE(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Stąd polaryzacja gazu elektronowego:

$$P(t) = -Nex(t) = -\frac{Ne^2 E(t)}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Zatem indukcja elektryczna w ośrodku wyniesie:

$$D(t) = \varepsilon_0 E(t) + P = \varepsilon_0 E(t) - \frac{Ne^2}{m_0(\omega^2 + i\gamma\omega)} E(t)$$

Z definicji $D = \varepsilon_r \varepsilon_0 E$

Zatem

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0 (\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Zwykle związek ten zapisujemy w postaci:

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

gdzie:

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m_0} \right)^{1/2}$$

ω_p - częstotliwość plazmowa

Zanim przejdziemy do bardziej złożonych systemów rozważmy najpierw sytuację gdy, system jest słabo tłumiony $\gamma \cong 0$, wtedy

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Pamiętamy, że

$$\tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

Jeśli

$$\omega < \omega_p \Rightarrow \tilde{n} = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{-1 \frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{\omega^2}} = i \sqrt{C(\omega)}$$

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \left| \frac{i \sqrt{C(\omega)} - 1}{i \sqrt{C(\omega)} + 1} \right|^2 = \frac{C(\omega) + 1}{C(\omega) + 1} = 1$$

**Odbicie
metaliczne!!!
(100%)**

$$\omega > \omega_p \Rightarrow \tilde{n} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

**Odbicie
częściowe**

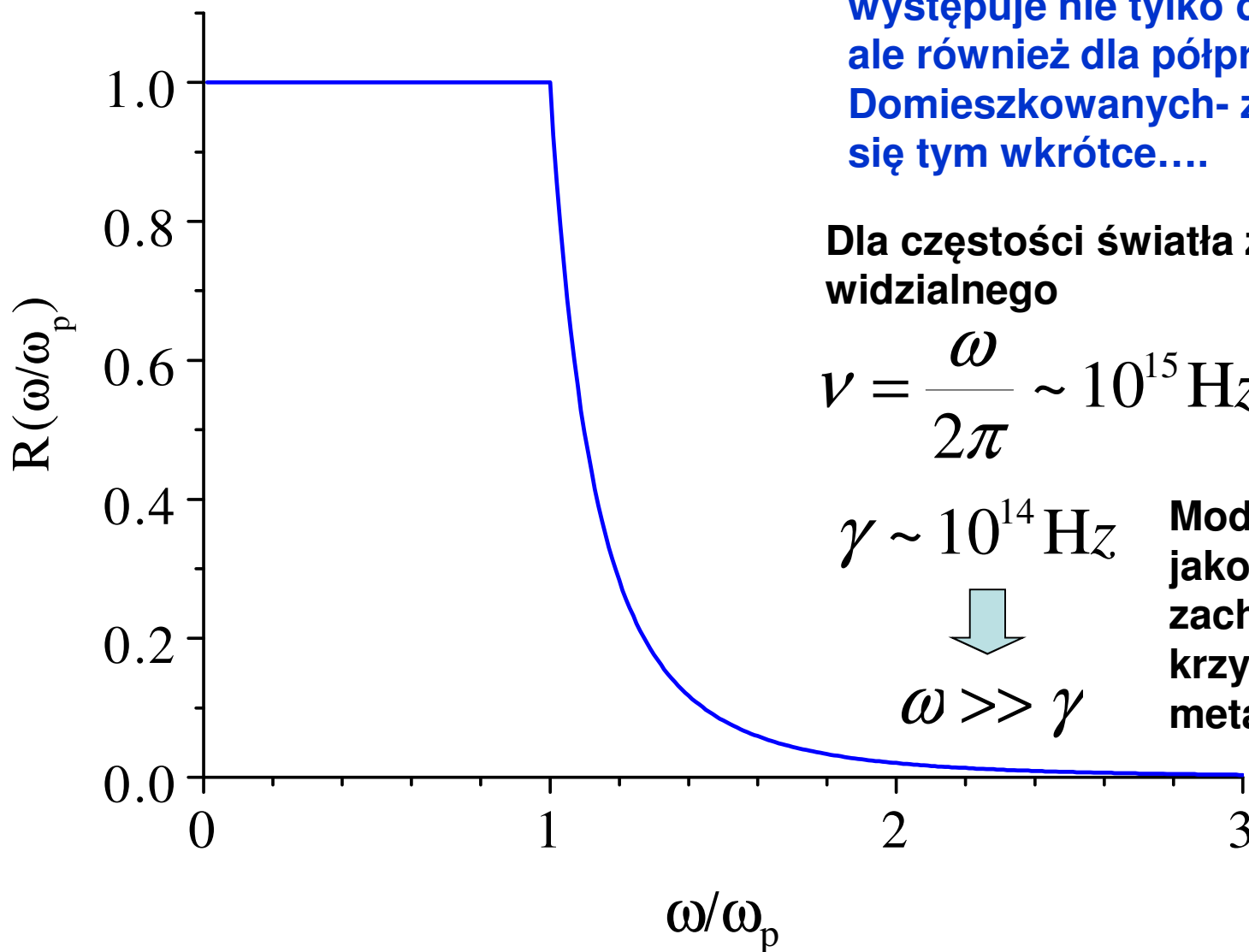
$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \left| \frac{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} - 1}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} + 1} \right|^2$$

**Odbicie
częściowe**

$$\omega \rightarrow \infty, R \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_p, R = 1$$

Metal



Typowe odbicie plazmowe występuje nie tylko dla metali, ale również dla półprzewodników Domieszkowanych- zajmiemy się tym wkrótce....

Dla częstości światła z obszaru widzialnego

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \sim 10^{15} \text{ Hz}$$

$$\gamma \sim 10^{14} \text{ Hz}$$



$$\omega \gg \gamma$$

Model Drudego jakościowo opisuje zachowanie krzywej odbicia metali.

Możemy więc jakościowo opisać zachowanie złota, srebra, aluminium...

Jak uwzględnić tłumienie?

Równanie ruchu elektronu w polu można zapisać jeszcze inaczej:
(*żeby pokazać, że absorpcja i przewodnictwo są ze sobą związane*)

$$m_0 \frac{d^2 x}{dt^2} + m_0 \gamma \frac{dx}{dt} = -eE(t) \quad \gamma = \frac{1}{\tau} \quad \tau - \text{czas rozproszenia pędowego}$$
$$\frac{dp}{dt} + \gamma \vec{p} = -e\vec{E}(t) \quad \longrightarrow \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} - e\vec{E}(t)$$

Skoro zewnętrzne pole elektryczne oscyluje periodycznie,

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

To spodziewamy się również periodycznego zachowania prędkości:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 e^{-i\omega t} \quad \longrightarrow \quad \vec{v}(t) = \frac{-e\tau}{m_0} \frac{1}{(1-i\omega\tau)} \vec{E}(t)$$

Gęstość prądu jest związana z prędkością nośników

$$\vec{j}(t) = -Ne\vec{v} = \sigma\vec{E} \quad \longrightarrow$$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1-i\omega\tau}$$

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0} \quad - \text{przewodnictwo stałoprądowe}$$

Związek pomiędzy funkcją dielektryczną i przewodnictwem...

Pamiętamy, że $\frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{Ne^2}{m_0}$ $\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}$

Zapiszmy więc ϵ_r inaczej $\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \tau} \frac{1}{(\omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} = 1 - \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{(\tau\omega + i) - i}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 \omega} \frac{1}{1 - i\omega\tau} = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\epsilon_0 \omega}$$

Pomiary optyczne $\epsilon_r(\omega)$
są równoważne pomiarowi
przewodnictwa zmiennoprądowego!

Rozważmy sytuację niskich częstości

$$\omega\tau \ll 1$$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Składowe zespolonej funkcji dielektrycznej

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_1 + i\epsilon_2$$

będą miały postać:

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)}$$

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \right)^{1/2}$$

$$\omega\tau \ll 1 \quad \Rightarrow \quad |\epsilon_2| \gg |\epsilon_1|$$



$$n \approx \kappa = \sqrt{\epsilon_2 / 2}$$

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \sqrt{\frac{2\omega_p^2 \tau \omega}{c^2}} = \sqrt{2\sigma_0 \omega \mu_0}$$

Pamiętamy

$$\omega_p = \left(\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_0} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \omega_p^2 \tau = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\sigma_0}{\tau} = \frac{Ne^2}{m_0} \quad \frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

Pamiętamy

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2}$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2}$$

Współczynnik absorpcji jest proporcjonalny do pierwiastka z stałoprądowego przewodnictwa i częstości!

Efekt naskórkowy

$$E(z) = E_0 \exp(-z / \delta)$$



$$I(z) = I_0 \exp(-2z / \delta)$$

Pamiętamy

$$I(z) \propto |E(z)|^2 = I_0 e^{-\frac{2\kappa\omega}{c}z} = I_0 e^{-\alpha z}$$

$$\alpha = \sqrt{2\sigma_0\omega\mu_0}$$



$$\delta = \frac{2}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma_0\omega\mu_0}}$$

Dla miedzi

przy częstotliwości $f=50\text{Hz}$ $\delta \cong 9\text{mm}$

przy częstotliwości $f=100\text{MHz}$ $\delta \cong 6.2\mu\text{m}$

Jasne dlaczego w urządzeniach pracujących przy wysokich częstotliwościach używamy pokryć ze srebra...

Rzeczywiste zwierciadło metaliczne – efekt tłumienia

Przewodnictwo Al(300K) $\sigma = 4.1 \cdot 10^7 \Omega^{-1}m^{-1}$

Koncentracja dla Al: $N=1.81 \cdot 10^{29}m^{-3}$

$$\tau = \frac{m_0 \sigma_0}{Ne^2} = 8.0 \cdot 10^{-15} s$$

$$\omega_p = 2,4 \cdot 10^{16} \text{ rad/s}$$

Dla długości fali $\lambda = 500 \text{ nm}$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = 3.8 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$$

$$\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} = -39$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2} = 0.1$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} = 1.3$$

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\varepsilon_1 + (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2} = 6.2$$

$$\Rightarrow R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2} = \frac{(-0.9)^2 + (6.2)^2}{(1.1)^2 + (6.2)^2} = 0.99$$

Tłumienie redukuje współczynnik odbicia!

Związek pomiędzy funkcją dielektryczną i przewodnictwem gazu elektronowego - **przemyślenie**

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + i \frac{\sigma(\omega)}{\varepsilon_0 \omega}$$

Czy powinno to nas dziwić?

Rozważmy własności gazu elektronowego w oparciu o równanie Boltzmann. Pozwala ono śledzenie w jaki sposób rozkład nośników, w równowadze termodynamicznej zmienia się pod wpływem sił zewnętrznych oraz w wyniku rozpraszania elektronów...

$$f_0(E(\vec{k})) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E(\vec{k}) - E_F}{kT}\right)} \quad \text{-rozkład równowagowy nie zależy położenia}$$

$f(\vec{r}, \vec{k}, t)$ - rozkład nośników opisujący lokalną równowagę dla obszarów dużych w porównaniu z wymiarami atomów (odległościami atomowymi)

Rozważmy zmianę funkcji w czasie od $t-dt$ do t . Po przyłożeniu zewnętrznego pola elektrycznego \vec{E} , elektron który znajduje się w punkcie \vec{r} i ma wektor falowy \vec{k} , miał w chwili $t-dt$ współrzędne

$$\vec{r} - \vec{v}(\vec{k})dt \quad \vec{k} - (-e)\vec{E}\frac{dt}{\hbar}$$

Bez rozpraszania:

$$f(\vec{r}, \vec{k}, t) = f(\vec{r} - \vec{v}(\vec{k})dt, \vec{k} + e\vec{E}\frac{dt}{\hbar}, t - dt)$$

Jeśli przez $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s$ wyrazimy zmianę funkcji f wywołaną rozpraszaniem, to

$$f(\vec{r}, \vec{k}, t) = f(\vec{r} - \vec{v}(\vec{k})dt, \vec{k} + e\vec{E}\frac{dt}{\hbar}, t - dt) + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s dt$$

Po rozwinięciu równania do członów liniowych względem dt otrzymamy:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\nabla_{\vec{r}}f - \frac{e}{\hbar}\vec{E}\nabla_{\vec{k}}f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s$$

W przybliżeniu czasu relaksacji zakładamy, że

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_s = -\frac{f_1}{\tau} \quad f_1 = f - f_0 \quad \text{Odstępstwo od stanu równowagowego}$$

Jeżeli zaburzenie ma charakter okresowy, np. jest to fala elektromagnetyczna o częstotliwości ω to

$$f_1 = f_1^{(0)} e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -i\omega f_1$$

$$-i\omega f_1 + \vec{v}\nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar} \vec{E}\nabla_{\vec{k}} f = -\frac{f_1}{\tau}$$

$$\vec{v}\nabla_{\vec{r}} f - \frac{e}{\hbar} \vec{E}\nabla_{\vec{k}} f = -\left(-i\omega + \frac{1}{\tau}\right) f_1$$

Żeby wykorzystać wyniki dla równania Boltzmann'a opisującego sytuację stacjonarną w czasie musimy dokonać zamiany:

$$\tau \Rightarrow \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}$$

W półprzewodnikach $\tau \sim 10^{-9} \div 10^{-11} \text{ s}$

zatem człon urojony (przesunięty w fazie) należy uwzględnić dla $\omega \sim 10^9 \div 10^{11} \text{ s}^{-1}$,
czyli dla mikrofal.

Przewodnictwo, zależne od ω będzie zespolone:

$$\sigma_0 = \frac{Ne^2\tau}{m_0} \Rightarrow \sigma^* = \frac{N_e e^2 \frac{\tau}{1 - i\omega\tau}}{m_0}$$

$$\sigma^* = \sigma_1 + i\sigma_2 = \frac{N_e e^2 \tau}{m_0} \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} + i\omega \frac{N_e e^2 \tau^2}{m_0} \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}$$

$$\vec{j} = \sigma^* \vec{E} = (\sigma_1 + i\sigma_2) \vec{E}_0 e^{-i\omega t} = \underbrace{\sigma_1 \vec{E}_0 e^{-i\omega t}}_{\text{prąd przewodnictwa}} + \underbrace{\sigma_2 \vec{E}_0 e^{-i\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)}}_{\text{prąd przesunięcia}}$$

prąd przewodnictwa prąd przesunięcia

**Pojawia się przesunięcie fazowe między polem elektrycznym a prądem.
Prądowi przesunięcia nie towarzyszą procesy dyssypacji energii.**