PODSTAWY FIZYKI III

Zadania dodatkowe

do samodzielnego rozwiązania

Uwaga ogólna: polecam zainstalować program Mathematica, dostępny dla studentów FUW na licencji wydziałowej(https://www.fuw.edu.pl/oprogramowanie-licencje.html) i wykorzystywać go do sprawdzania samodzielnych obliczeń algebraicznych, obliczania trudniejszych całek oraz tworzenia wykresów. Szczególnie przydatna do wizualizacji zależności pewnych funkcji/wyników od parametrów jest funkcja *Manipulate*.

Uwaga: w programie Mathematica transformata Fouriera jest zdefiniowana jako $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}t f(t) \mathrm{e}^{i\omega t}$. Oznacza to że $\mathcal{F}_{\text{Mathematica}}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}_{\text{nasza}}\{f(t)\}(-\omega)$.

Zadania z gwiazdką wykraczają poza zakres wiedzy wymaganej na kolokwium i egzaminie.

Transformata Fouriera (TF)

1. Pokaż, że TF jest liniowa: $\mathcal{F}\{af(x) + bg(x)\} = a\mathcal{F}\{f(x)\} + b\mathcal{F}\{g(x)\}$.
2. Pokaż, że gdy $f(x) = g^*(x)$ to $\mathcal{F}\{f(t)\} = (\mathcal{F}\{g(-x)\})^*$. $*$ oznacza sprzężenie zespolone.
3. Ile wynosi $\mathcal{F}\{f(t)\}(0)$?
4. Wyraź za pomocą $\mathcal{F}\{f(x)\}$ i/lub $\mathcal{F}^{-1}\{f(x)\}$:
   $\mathcal{F}^2\{f(x)\} \coloneqq \mathcal{F}\big\{\mathcal{F}\{f(x)\}\big\}$,
   $\mathcal{F}^3\{f(x)\}$
   $\mathcal{F}^4\{f(x)\}$
   $\mathcal{F}^n\{f(x)\}$ dla $n \in \mathbb{N}$
   *Na podstawie powyższego można dojść do wniosku, że TF odpowiada obrotowi o $\pi/2$ reprezentacji funkcji f na płaszczyźnie (x, ξ) (wraz z przeskalowaniem amplitudy o czynnik związany z $1/2\pi$). Rozszerzenie do $n \in \mathbb{R}$ daje tzw. ułamkową transofrmatę Fouriera (ang. *fractional Fourier transform*), odpowiadającą obrotom na płaszczyźnie (x, ξ) o kąty różne od wielkorotności $\pi/2$. Zapoznaj się z dostępnymi materiałami o ułamkowej transofrmacie Fouriera.
5. Oblicz TF sygnałów opisanych funkcjami $f(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$, $g(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Czym różnią się te TF dla różnych wartości φ? Czym różnią się widma $S(\omega)$ tych sygnałów?
6. Znajdź transformaty Fouriera różnych funkcji za pomocą programu Mathematica (analitycznie lub numerycznie). Wykreśl ich części rzeczywiste i urojone oraz moduły i fazy. Zbadaj zależność od parametrów funkcji (np. od a i b dla $f(at + b)$ korzystając z *Manipulate*.
7. Wyznacz $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\}(\omega)$ (dla $f(t)$ n-krotnie różniczkowalnej).

Załóż, że funkcje w powyższych wyrażeniach są całkowalne z kwadratem.

Widmo

8. Falę monochromatyczną o częstości optycznej ω_0 przepuszczono przez modulator natężenia, którego natężeniowy współczynnik transmisji (stosunek natężenia światła na wyjściu modulatora do natężenia światła na wejściu modulatora) wzrastał kwadratowo od wartości

0 do 1 w czasie t_1, następnie w czasie t_2 utrzymywał wartość 1, i w czasie t_3 malał kwadratowo do wartości 0. Jakie widmo światła na wyjściu modulatora zmierzy idealny spektrometr? Parametry zależności kwadratowej w pierwszym i ostatnim przedziale czasu, przyjmij takie, aby minimum paraboli wypadało odpowiednio w $t = 0$ i w $t = t_1 + t_2 + t_3$.

9. Obwiednie impulsów wytwarzanych przez lasery femtosekundowe często z dobrym przybliżeniem opisane są zależnością $A(t) = A_0 \operatorname{sech}(t/\tau)$ (sech – secans hiperboliczny). Znajdź zależność chwilowego natężenia od czasu $I(t)$ oraz widmo $S(\omega)$ impulsów tego typu o częstotliwości nośnej ω_0. Znajdź iloczyn szerokości połówkowych $I(t)$ i $S(\omega)$. Iloczyn ten nosi angielską nazwę *time-bandwidth product* i jest ważnym parametrem opisującym krótkie impulsy światła. Dla danego czasu trwania i profilu czasowego impulsu określa on minimalną możliwą szerokość widma tego impulsu.
10. Oblicz TBP dla impulsów o obwiedni gaussowskiej.
11. * W jaki sposób iloczyn szerokości połówkowych $I(t)$ i $S(\omega)$ impulsu może stać się większy od najmniejszej możliwej wartości (danej przez TBP)?
12. Wyznacz i wykreśl widmo, które zrejestruje idealny spektrometr, na który skierowano dwa impulsy o jednakowych obwiedniach gaussowskich i częstościach nośnych ω_0, opóźnione względem siebie o czas τ_0. Jak zmieni się rejestrowane widmo, gdy opóźnienie pomiędzy impulsami zwiększymy o π/ω_0? Zastanów się nad fizycznym znaczeniem tego zjawiska.

Równanie falowe, fala E-M w ośrodku

13. Znajdź mody własne okrągłej membrany o promieniu R. W tym celu zapisz równanie falowe w układzie biegunowym (uwaga na postać laplasjanu w układzie biegunowym!).
14. Wyprowadź równanie falowe dla indukcji pola magnetycznego w ośrodku dielektrycznym i diamagnetycznym.
15. Znajdź wyrażenia na część rzeczywistą i urojoną współczynnika załamania w modelu Lorentza (aby uprościć wyrażenia możesz przyjąć, że $\mathrm{Im}(n) \ll \mathrm{Re}(n)$, oraz że $\mathrm{Re}(n) \simeq 1$. Jest to przypadek rozrzedzonego gazu). Wykreśl (na jednym wykresie) $\mathrm{Re}(n)$ i $\mathrm{Im}(n)$ w zależności od ω dlawybranych parametrów γ, ω_0 modelu Lorentza.
16. Zależność materiałowa pomiędzy polaryzacją dielektryczną a polem elektrycznym postaci $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$ zakłada natychmiastową odpowiedź ośrodka na przyłożone pole. Pokaż, że z założenia opóźnionej odpowiedzi ośrodka: $\vec{P}(t) = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi'(\tau) \vec{E}(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$ (polaryzacja ośrodka w chwili t jest wypadkową pobudzeń we innych chwilach czasu), wynika, że ośrodek musi być dyspersyjny: $n(\omega) \neq \mathrm{const.}$ Załóż, że $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.
17. * W rzeczywistych ośrodkach górna granica całkowania w powyższym wyrażeniu na $\vec{P}(t)$, powinna wynosić 0, ze względu na przyczynowość: na polaryzację w chwili czasu t mogą wpływać tylko wcześniejsze pobudzenia ośrodka. Z założenia o przyczynowości wynikają związki pomiędzy częścią rzeczywistą i urojoną przenikalności dielektrycznej ośrodka, zwane relacjami Kramersa-Kroniga. Znajdź te zależności, korzystając z reprezentacji w przestrzeni Fouriera. W razie potrzeby skorzystaj z dostępnej literatury.
18. Zakładając harmoniczne oscylacje pola elektrycznego w próżni, $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, znajdź równanie na $\vec{E}(\vec{r})$. Jest to tzw. równanie Helmholtza. Sprawdź, że spełnia je m. in. fala płaska i fala sferyczna.

Fala E-M w dielektryku i w metalu

19. Bazując na modelu Lorentza zależności współczynnika załamania od częstotliwości wprowadza się tzw. równania Sellmeiera postaci:

$$n^2(\lambda) \simeq n_0 + \sum_i^N A_i \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + B_i^2},$$

gdzie λ jest długością fali w próżni wyrażoną w μm, N liczbą wyrazów przybliżenia, a parametry n_0, A_i, B_i są ustalane na podstawie wyników pomiarów. Wyraź prędkość grupową i dyspersję prędkości grupowej za pomocą parametrów n_0, A_i, B_i. Dla GaAs parametry wynoszą: $n_0 = 3{,}5$ $A_1 = 7{,}4969, A_2 = 1{,}9347, B_1 = 0{,}4082, B_2 = 37{,}17$. Dla kwarcu topionego $n_0 = 1$ $A_1 = 0{,}6962, A_2 = 0{,}4079, A_3 = 0{,}8975, B_1 = 0{,}06840, B_2 = 11{,}62, B_3 = 0{,}8962$

- używając oprogramowania komputerowego wykreśl zależność współczynnika załamania, prędkości grupowej i dyspersji prędkości grupowej od długości fali: dla kwarcu w zakresie 0,25 do 3,5 um, dla GaAs w zakresie 1,4 i 11 um.
- wyznacz błąd względny współczynnika załamania dla długości fali 1400 nm, przymując jednostkową niepewność dla ostatniej cyfry znaczącej współczynników. Załóż, że n_0 jest znane dokładnie.
- Impulsy światła o centralnych długościach fali 1,4 um zostały wprowadzone pod kątem θ z próżni do prostopadłościennej próbki z ww. materiałów o grubości 30 cm. Znajdź różnicę czasów, w których impulsy opuszczą materiał dla kąta θ wynoszącego a) 0°, b) 45°.
- Czy istnieje długość fali, dla której dyspersja prędkości grupowej materiału wynosi 0?

20. Wyznacz prędkość grupową dla impulsu powstałego w wyniku superpozycji dwóch fal monochromatycznych (o jednakowych apmlitudach) o częstościach ω_1, ω_2. Wartości współczynnika załamania wynoszą $n(\omega_1) = n_1, n(\omega_2) = n_2$.
21. Wyraź prędkość grupową poprzez prędkość fazową i pierwszą pochodną prędkości fazowej po długości fali.
22. Znajdź prędkość grupową dla fal dla których prędkość fazowa v_f w zależności od długości fali λ (w ośrodku):
    a) jest stała (np. fala dźwiękowa w powietrzu).
    b) $v_f = a\sqrt{\lambda}$ (fala na powierzchni wody).
    c) $v_f = a/\lambda$ (poprzeczne wibracje pręta).
23. Pokaż, że w metalu opisanym modelem Drudego iloczyn prędkości fazowej i grupowej wynosi c^2.
24. Wyprowadź model Drudego współczynnika załamania w metalu na podstawie równania ruchu elektronu (analogicznie, jak w modelu Lorentza). Przyjmij, że na elektron działa wyłącznie siła wymuszająca pochodząca od pola elektrycznego oraz siła tłumiąca proporcjonalna do prędkości elektronu.
25. Korzystając z równania ciągłości pokaż, że gęstość ładunku w dobrym przewodniku może oscylować wyłącznie z częstością plazmową.
26. Płaska fala monochromatyczna o częstości ω pada prostopadle na lustro poruszające się ze stałą prędkością $v \ll c$ skierowaną równolegle do wektora falowego fali padającej. Znajdź częstość fali odbitej.