



Optyka falowa – od równań Maxwella do fali EM



Równania Maxwella

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

- ładunki są źródłem indukcji elektrycznej

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

- indukcja magnetyczna jest polem bezźródłowym

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- źródłem wirowego pola elektrycznego
jest zmienna w czasie indukcja magnetyczna

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

- źródłem wirowego pola magnetycznego
są prądy oraz zmienna w czasie
indukcja elektryczna



Równania "materiałowe" w ośrodku niemagnetycznym

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} + \vec{M}\end{aligned}$$

$\vec{P}$ – polaryzacja ośrodka
 $\vec{M}$ – magnetyzacja ośrodka

$$\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} [F/m], \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} [W/A^2]$$

Przekształcając równania Maxwella, dostajemy coś, co ma postać równania falowego

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}$$

gdzie zdefiniowaliśmy c jako

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$



Energia fali elektromagnetycznej

Gęstość energii:

$$U = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E} + \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \quad [J/m^3]$$

Wektor Poytninga (natężenie):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad [W/m^2]$$



Przykład 1. – równanie falowe w próżni

$$\vec{P} = 0 \quad \rho = 0, \quad \vec{j} = 0$$
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Założmy, że zgadliśmy rozwiązanie tego równania (zapewne nie jedyne) w postaci

$$\vec{E} = [E_p, 0, 0]$$

$$E_p(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) = E_0 \operatorname{Re}[e^{i(\omega t - kz)}]$$



Próżnia – rozwiązanie w postaci fali płaskiej

Podstawiamy do równania falowego:

$$\nabla^2 E_p = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2}$$

Liczymy...

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} [-kE_0 \sin(\omega t - kz)] = k^2 E_0 \cos(\omega t - kz) = k^2 E_p(\vec{r}, t)$$

podobnie:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} = \omega^2 E_p$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_p = 0$$

$$k = \frac{\omega}{c}$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\text{wektor falowy } [k_x, k_y, k_z] \quad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$



Przykład 2. – fala w dielektryku z polaryzacją liniową

$$\vec{P} = \chi \cdot \vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\chi}{\epsilon_0} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

jak w próżni, ale teraz zamiast c mamy c/n , gdzie

$$n^2 = 1 + \frac{\chi}{\epsilon_0}$$

- fala płaska: $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$, $E_y = E_z = 0$

$$k = \frac{n\omega}{c} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n}$$

Natężenie światła

$$I = \frac{\text{energia przez powierzchnię}}{\text{powierzchnia} \cdot \text{czas}}$$

Związek między natężeniem a polem elektrycznym fali

$$I = \frac{E_0^2}{2\eta}$$

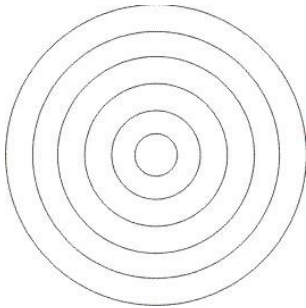
$$\eta = \sqrt{\mu / \varepsilon} \quad , \text{ dla próżni ok. } 377 \Omega$$

Przykład– dla $I = 1 \text{ W/cm}^2$ pole elektryczne fali EM jest rzędu $3 \times 10^3 \text{ V/m}$.

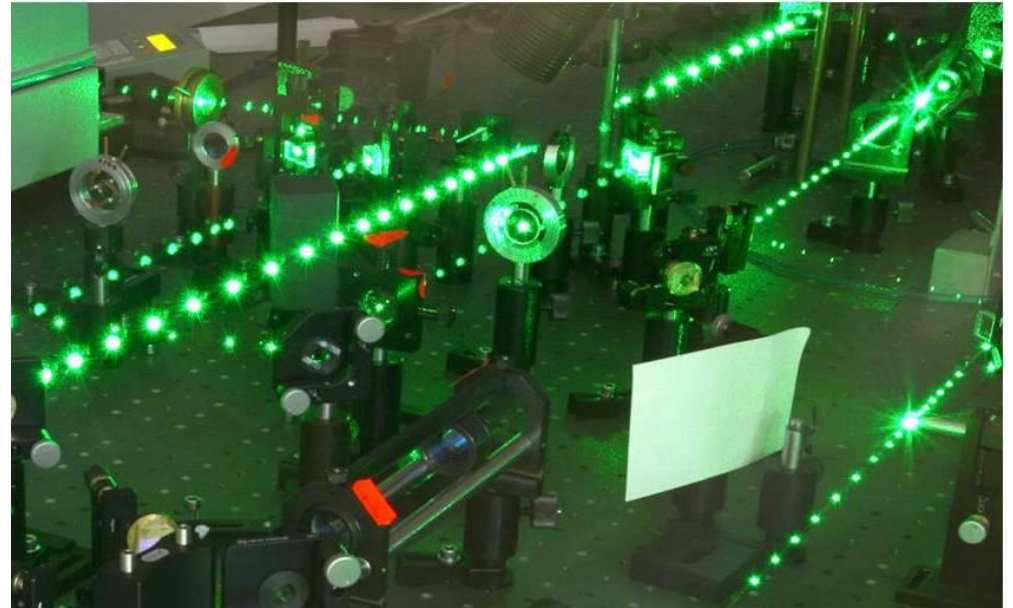
Jak duże pola można dostać w wiązce światła?

Inne rozwiązania równania falowego

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$



pojęcie modu pola – fotony





Prędkość światła

Prędkość światła:

- w próżni $v = c$ (299 792 458 m/s)
- w dielektryku $v = c/n$

np. dla szkła w obszarze widzialnym $n \approx 1,5$

czy n może być:

bardzo duże $(v = 1 \text{ m/s})$?

mniejsze niż 1 $(v > c)$???

ujemne ???

Ważne rozróżnienie – prędkość fazowa i grupowa

$$v_f = c(n)^{-1}$$

$$v_g = c \left(n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \right)^{-1}$$



Interferencja fal monochromatycznych

$$E(\vec{r}) = E_1(\vec{r}) + E_2(\vec{r})$$

mierzymy natężenie:

$$I = |E|^2 = |E_1 + E_2|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(E_1 E_2^*)$$

niech: $E_1 = \sqrt{I_1} e^{i\varphi_1}$, $E_2 = \sqrt{I_2} e^{i\varphi_2}$

$$2 \operatorname{Re}(E_1 E_2^*) = 2\sqrt{I_1 I_2} \operatorname{Re}(e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$