



Polaryzacja światła.

Ośrodki dwójłomne.



Światło spolaryzowane (i nie)

światło spolaryzowane

dokładnie wiemy jaki jest
kierunek i zwrot pola $\vec{E}(\vec{r}, t)$
dla każdego punktu $\vec{r}$
i każdej chwili czasu t

światło niespolaryzowane

$\vec{E}(\vec{r}, t)$ ma losowy kierunek
i zwrot

światło częściowo
spolaryzowane

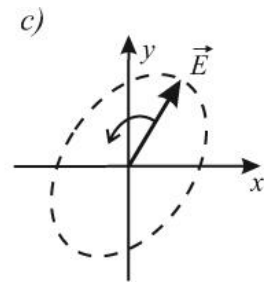
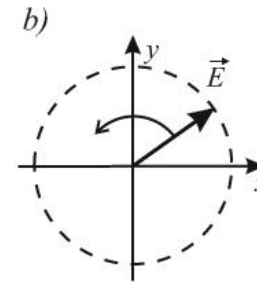
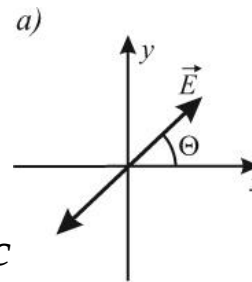
płaska fala monochromatyczna

$$\vec{E}(z, t) = \vec{A} e^{i(\omega t - kz)} = \vec{A} e^{i\omega \left[t - \frac{z}{v} \right]}$$

$$\vec{A} = [A_x, A_y]$$

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

$$\left. \begin{array}{l} A_x = a_x e^{i\varphi_x} \\ A_y = a_y e^{i\varphi_y} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} a_x e^{i\left[\omega \left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_x\right]} \\ a_y e^{i\left[\omega \left(t - \frac{z}{v}\right) + \varphi_y\right]} \end{bmatrix}$$



$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_x \right] \\ a_y \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_y \right] \end{bmatrix}$$

Światło spolaryzowane

polaryzacja linowa

płaszczyzna polaryzacji
 pod kątem θ do osi x:

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = a_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) + \varphi_0 \right] \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \varphi_y - \varphi_x$$

polaryzacja kołowa

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{2}, \quad a_x = a_y = a_0$$

$$\bullet \varphi = \frac{\pi}{2}$$

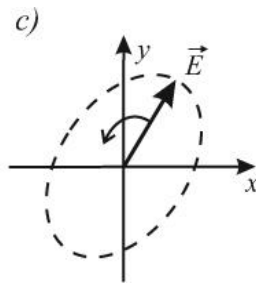
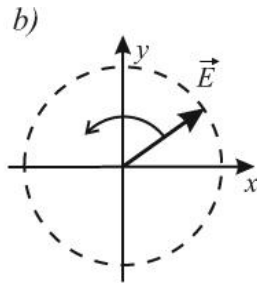
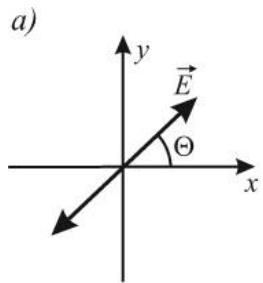
$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \\ -\sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{bmatrix}$$

kołowa prawoskrętna

$$\bullet \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = a_0 \begin{bmatrix} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \\ \sin \left[\omega \left(t - \frac{z}{v} \right) \right] \end{bmatrix}$$

kołowa lewoskrętna





Formalizm macierzy Jonesa

notacja zespolona:

$$\bar{E}(z, t) = ae^{i\left(\omega t - \frac{z}{v}\right)} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{wektor Jones'a} \\ \text{unormowany do 1} \\ (b_x b_x^* + b_y b_y^* = 1) \end{array}$$

przykłady:

- polaryzacja linowa

$$J = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots$$

- polaryzacja kołowa

$$J = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

P L

- polaryzacja eliptyczna

$$J = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad b_x, b_y - \text{zespolone}$$



Bazy w przestrzeni wektorów Jonesa

- baza polaryzacji linowych

$$J_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad J_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- baza polaryzacji kołowych

$$J_P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \quad J_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

zmiana bazy:

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_P + J_L)$$

$$J_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_P - J_L)$$

$$J_P = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_x + iJ_y)$$

$$J_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (J_x - iJ_y)$$

twierdzenie

dowolny wektor Jones'a możemy zapisać jako liniową kombinację wektorów wybranej bazy – każdą polaryzację możemy przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} b_P \\ b_L \end{bmatrix} = \alpha_x J_x + \alpha_y J_y$$

badź

$$\begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = \alpha_P J_P + \alpha_L J_L$$



Bazy w przestrzeni wektorów Jonesa

przykład 1: pol. liniowa x w bazie kołowej

J_P, J_L

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_P + \frac{1}{\sqrt{2}} J_L$$

przykład 2: pol. kołowa P w bazie liniowej

J_x, J_y

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} J_x + \frac{i}{\sqrt{2}} J_y$$



Bazy w przestrzeni wektorów Jonesa

obrót układu odniesienia

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \cos \varphi \\ J \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} J_{x'} \\ J_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \cos \varphi' \\ J \sin \varphi' \end{bmatrix}$$

$$\varphi' = \varphi - \alpha$$

$$J_{x'} = J \cos \varphi' = J \cos(\varphi - \alpha) = \cos \alpha \cdot J \cos \varphi + \sin \alpha \cdot J \sin \varphi = \cos \alpha \cdot J_x + \sin \alpha \cdot J_y$$

$$J_{y'} = J \sin \varphi' = J \sin(\varphi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot J \cos \varphi + \cos \alpha \cdot J \sin \varphi = -\sin \alpha \cdot J_x + \cos \alpha \cdot J_y$$

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$\bar{J}$ – rzeczywiste

$$\begin{bmatrix} J_{x'} \\ J_{y'} \end{bmatrix} = \mathbf{M}_R \cdot \begin{bmatrix} J_x \\ J_y \end{bmatrix}$$

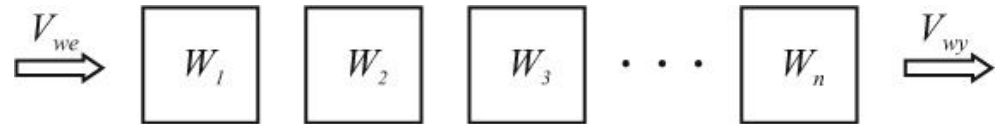
ten sam wynik
dla $\bar{J}$ zespolonego



Macierze Jonesa

element zmieniający
polaryzację światła

$$\bar{J}_{out} = M_J \bar{J}_{in}$$



M_J – macierz Jones'a 2x2

przykład: polaryzator (oś || x)

$$M_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

wejscie – pol. liniowa, kąt θ do osi x

$$\bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \bar{J}_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Macierze Jonesa

natężenie:

$$\bar{E}_{in}(z, t) = ae^{i(\omega t - \frac{z}{v})} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} = ae^{i(\omega t - \frac{z}{v})} \bar{J}_{in}$$

$$\begin{aligned} I_{in} &= |\bar{E}_{in}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 = \\ &= a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta = a^2 (J_x^2 + J_y^2) = a^2 \end{aligned}$$

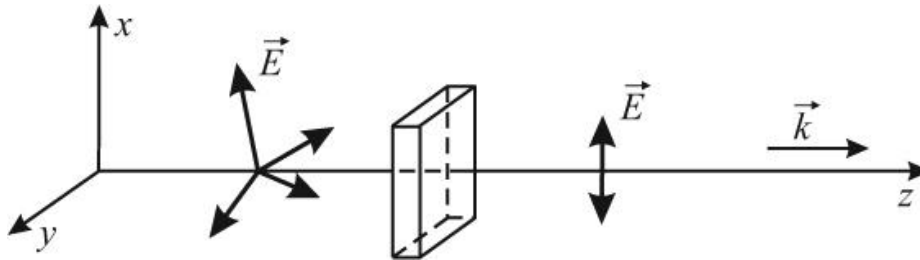
$$\bar{E}_{out}(z, t) = ae^{i(\omega t - \frac{z}{v})} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$I_{out} = a^2 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta \cdot I_{in}$$

prawo Malusa

Polaryzacja przez dichroizm (liniowy)

Dichroizm – właściwość niektórych substancji (np. kryształów) do pochłaniania światła o jednej polaryzacji (np. liniowej, dichroizm liniowy) w innym stopniu niż innej polaryzacji (np. liniowej prostopadłej).



α - współczynnik absorpcji

$$\alpha_y \gg \alpha_x$$

$$I_{out} = I_{in} e^{-\alpha d}$$

dla światła niespolaryzowanego
na wejściu:

$$I_{out} = \frac{1}{2} I_{in}$$

$$\frac{I_{out,y}}{I_{in,x}} = \frac{e^{-\alpha_y d}}{e^{-\alpha_x d}} = e^{-(\alpha_y - \alpha_x)d} \approx e^{-\alpha_y d}$$

problem: grzanie polaryzatora



Polaryzacja przez dichroizm (liniowy), przykłady

naturalne kryształy - rutyl

polaryzatory foliowe – Edwin Land (1929)

folia z alkoholu poliwinylowego nasyconego jodem
wyciąganie

współczynnik ekstynkcji $\varepsilon = \frac{I_{out,y}}{I_{out,x}} \geq 10^{-4}$

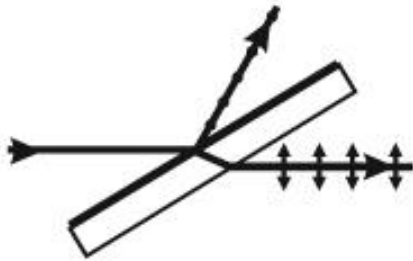
transmisja $T_x = 0.8$

obszar spektralny VIS, NIR

Polaryzacja przez odbicie

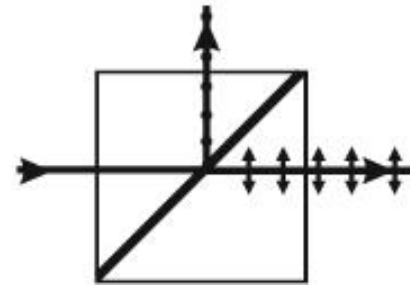
Odpowiednio zaprojektowane warstwy dielektryczne (jak w przypadku luster czy pokryw AR)

a)



Polaryzator dielektryczny (płaski)

b)



Kostka polaryzująca
Polarizing Beam Splitter (PBS)



Materiały dwójłomne

- w ośrodkach izotropowych (gazach, cieczach, szklach) własności optyczne nie zależą od orientacji przestrzennej

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$$

↙ skalar (liczba)

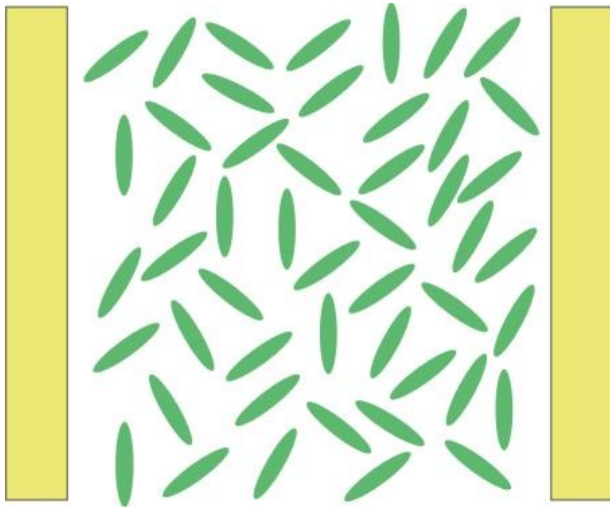
- w materiałach anizotropowych (niektórych kryształach, ciekłych kryształach) własności optyczne zależą od $\vec{k}, \vec{E}$

Przykład 1: ciekły kryształ

$$\vec{E} \parallel \hat{y} \quad \text{duży moment dipolowy}$$

$$\vec{E} \parallel \hat{x} \quad \text{mały moment dipolowy}$$

Materiały dwójłomne – ciekłe kryształy

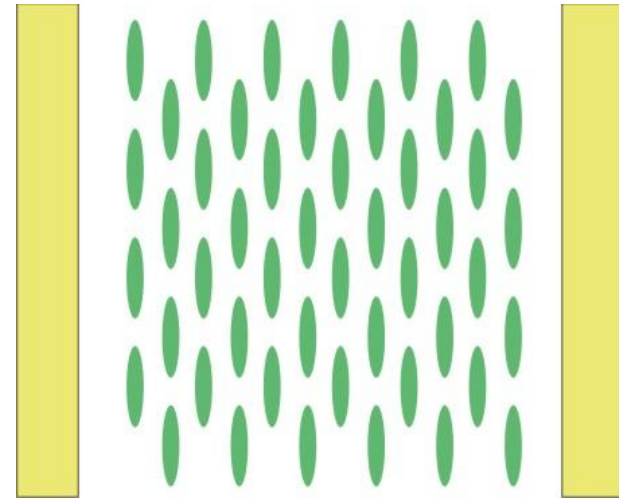


faza nieuporządkowana

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon E_x$$

$$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon E_y$$

$$n_x = n_y$$



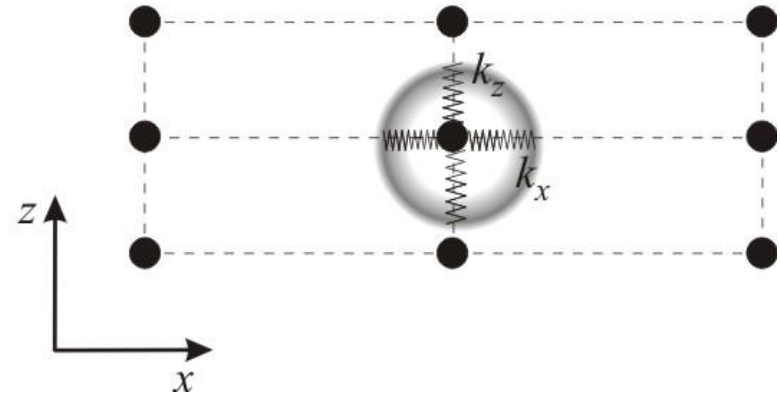
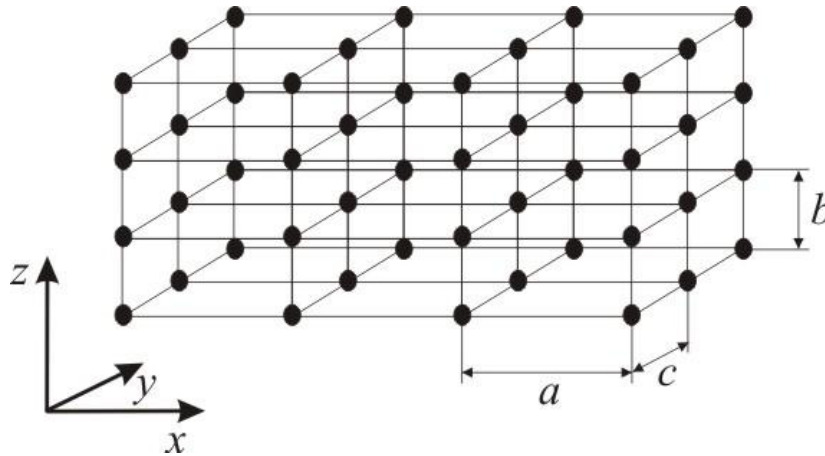
faza uporządkowana

$$D_x = \varepsilon_0 \varepsilon_x E_x$$

$$D_y = \varepsilon_0 \varepsilon_y E_y$$

$$n_x \neq n_y$$

Kryształy dwójłomne



słaba sprężyna $\Rightarrow$ małe ω_0
 mocna sprężyna $\Rightarrow$ duże ω_0

$\left. \begin{matrix} \text{słaba sprężyna} \Rightarrow \text{małe } \omega_0 \\ \text{mocna sprężyna} \Rightarrow \text{duże } \omega_0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow n_x \neq n_y$

dla ośrodka anizotropowego

$$\bar{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \bar{E}$$

tensor 2-go rzędu

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$



Kryształy dwójłomne

macierz $\hat{\mathcal{E}}$ można zdiagonalizować

$$\hat{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

niech x, y, z oznacza układ odniesienia, w. własny (osie kryształu)

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{E}} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} z \\ x \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\mathbf{D}} = [\varepsilon_{11}E, 0, 0] \Rightarrow n = n_x = \sqrt{\varepsilon_{11}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\mathbf{k}} \\ \bar{\mathbf{E}} \end{array} \right\| \left. \begin{array}{l} z \\ y \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\mathbf{D}} = [0, \varepsilon_{22}E, 0] \Rightarrow n = n_y = \sqrt{\varepsilon_{22}}$$



Kryształy dwójłomne jednoosiowe

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{bmatrix}$$

kierunek z – oś optyczna
kierunki x i y są równoważne
symetria obrotowa wokół osi z.

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$$

współczynnik załamania dla **promienia zwyczajnego**

$$n_e = \sqrt{\varepsilon_e}$$

współczynnik załamania dla **promienia nadzwyczajnego**

$$\begin{array}{l} \vec{k} \parallel \hat{z} \\ \vec{E} \parallel \hat{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vec{k} \parallel \hat{z} \\ \vec{E} \parallel \hat{y} \end{array}$$

$$\vec{E}(z, t) = \hat{x} E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{n_0 \omega}{c} z\right)} \quad k = \frac{n_0 \omega}{c}$$

fala płaska, liniowo spolaryzowana,
współczynnik załamania n_0

$$\begin{array}{l} \vec{k} \parallel \hat{x} \\ \vec{E} \parallel \hat{y} \end{array}$$

$$\vec{E}(x, t) = \hat{y} E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{n_0 \omega}{c} x\right)} \quad k = \frac{n_0 \omega}{c}$$

$$\begin{array}{l} \vec{k} \parallel \hat{x} \\ \vec{E} \parallel \hat{z} \end{array}$$

$$\vec{E}(x, t) = \hat{z} E_0 e^{i\left(\omega t - \frac{n_e \omega}{c} x\right)} \quad k = \frac{n_e \omega}{c}$$



Związek dyspersyjny dla kryształów jednoosiowych

$$\left. \begin{array}{l} \bar{D} = \hat{\epsilon} \bar{E} \Rightarrow \text{równania Maxwella} \\ \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \Rightarrow \text{równania Maxwella} \end{array} \right\} + \text{matematyka}$$

⇓

2 rozwiązania

fala zwyczajna

$$k = n_0 k_0 \quad k_0 = \frac{\omega}{c}$$

polaryzacja liniowa
prostopadła do płaszczyzny $(\hat{z}, \vec{k})$

fala nadzwyczajna

$$\frac{k_x^2 - k_y^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_0^2} = k_0^2$$

polaryzacja liniowa
w płaszczyźnie $(\hat{z}, \vec{k})$

Związek dyspersyjny dla kryształów jednoosiowych

- fala zwyczajna

$$n = n_0$$

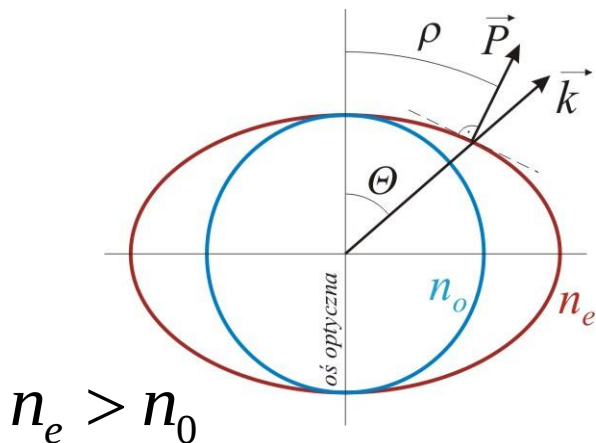
cała reszta jak w ośrodku izotropowym

- fala nadzwyczajna

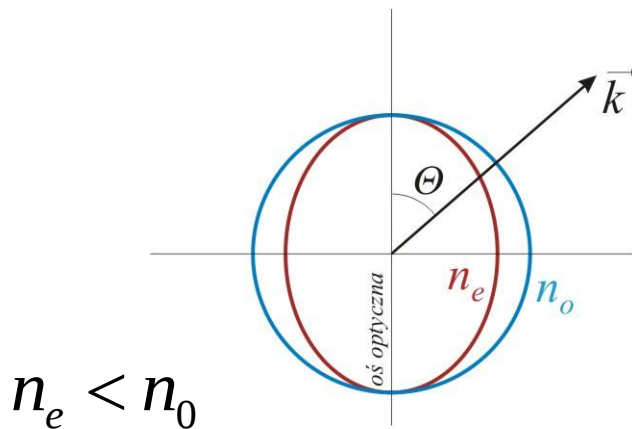
$$n = n(\theta)$$

$$k = n(\theta)k_0$$

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{n_0^2} + \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2}$$

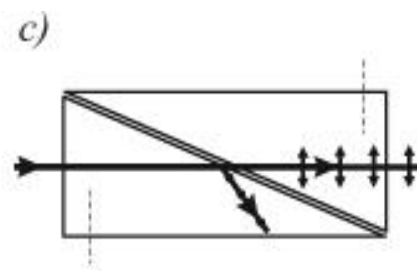
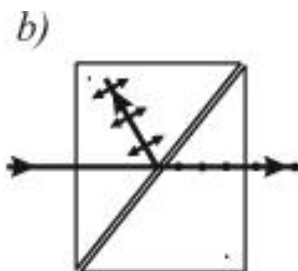
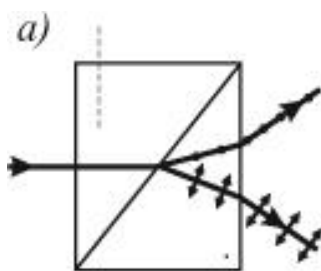


kryształ jednoosiowy dodatni



kryształ jednoosiowy ujemny

Polaryzatory krystaliczne



Wollaston

klej, ciecz imersyjna, etc.

$$\sin \beta_1 = \frac{n_o}{n_e} \sin \alpha$$

$$\sin \beta_2 = \frac{n_e}{n_o} \sin \alpha$$

Glan – Foucault

całkowite wewnętrzne odbicie dla fali
zwyczajnej

$$n_o > n_e$$

$$n_o \sin \alpha > 1 \quad (n_e \sin \alpha < 1)$$



Płytki falowe (*waveplates*)

na wejściu $\bar{E} \parallel \hat{x} \Rightarrow$ fala nadzwyczajna $\Rightarrow n = n_e$
 $\bar{E} \parallel \hat{y} \Rightarrow$ fala zwyczajna $\Rightarrow n = n_0$

polaryzacje liniowe ($\parallel \hat{x}$ i $\parallel \hat{y}$) - mody zagadnienia

fala wejściowa: $\bar{E} = [E_x, E_y]$

2 fale propagują się w kryształach i sumują na wyjściu

$$\bar{E}_{out} = \begin{bmatrix} E_x e^{-in_e k_0 d} \\ E_y e^{-in_0 k_0 d} \end{bmatrix} = e^{-in_e k_0 d} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y e^{-i(n_0 - n_e)k_0 d} \end{bmatrix} = e^{-in_e k_0 d} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{bmatrix}}_{\text{macierz Jonesa dla płytki falowej}} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (n_0 - n_e)k_0 d = (n_0 - n_e) \frac{2\pi d}{\lambda_0} \quad \text{opóźnienie fazowe płytki falowej}$$



Płytki falowe

nowe oznaczenia

$$n_x = n_f = n_0 \quad \text{ang. fast}$$

$$n_y = n_s = n_e > n_0 \quad \text{ang. slow}$$

macierz Jones'a płytki:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (n_s - n_f) \frac{2\pi d}{\lambda_0}$$

•płytką ćwierćfalową

$$\Delta = (m + 1/4)2\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

•płytką półfalową

$$\Delta = (m + 1/2)2\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

m – rząd
płytki falowej

przykład: kwarc krystaliczny,

$$\lambda_0 = 500\text{nm}, \quad n_e - n_o \cong 0.009$$

półfalówka

$$0.009 \cdot \frac{d}{\lambda_0} = m + \frac{1}{2}$$

załóżmy $m=0$ (półfalówka zerowego rzędu)

$$d = \frac{\lambda_0}{0.0018} = 55\lambda_0 = 27.7 \mu\text{m}$$



Płytki falowe – ćwierćfalówka ($\lambda/4$ plate)

na wejściu polaryzacja liniowa

$$J_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor Jones'a na wyjściu:

$$\bar{J}_{out} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{macierz} \\ \text{ćwierćfalówki} \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\substack{\text{obrotukładu} \\ \text{odniesienia} \\ \text{o kąt } \alpha}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{wektor} \\ \text{Jonesa} \\ \text{na wejś}}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -i \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$M_J \quad \bar{J}_{out} = M_J \bar{J}_{in}$$

•niech $\alpha = \frac{\pi}{4} (45^\circ) \Rightarrow \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad J_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ polaryzacja kołowa lewoskrętna

•niech $\alpha = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad J_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ polaryzacja kołowa prawoskrętna



Płytki falowe – ćwierćfalówka ($\lambda/4$ plate)

na wejściu polaryzacja liniowa

$$J_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor Jones'a na wyjściu:

$$\bar{J}_{out} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}}_{\substack{\text{macierz} \\ \text{ćwierćfalówki} \\ e^{i\frac{\pi}{2}}=i}} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\substack{\text{obrotukładu} \\ \text{odniesienia} \\ \text{o kat } \alpha}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{wektor} \\ \text{Jonesa} \\ \text{na wejściu}}} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -i \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$M_J \bar{J}_{out} = M_J \bar{J}_{in}$$

•niech $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}$

$$J_{out} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

polaryzacja liniowa

•niech α dowolne polaryzacja eliptyczna

$$J_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

$$\bar{J}_{out} = ?$$



Płytki falowe – półfalówka ($\lambda/2$ plate)

$$M_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

wektor Jonesa na wyjściu:

$$\bar{J}_{out} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\text{powrót do laboratoryjnego układu odniesienia}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}}_{M_J \text{ dla } \lambda/2} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}}_{\text{obrot o kąt } \alpha} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{J_{in}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha \end{bmatrix}}_{\text{polaryzacja liniowa pod kątem } 2\alpha}$$

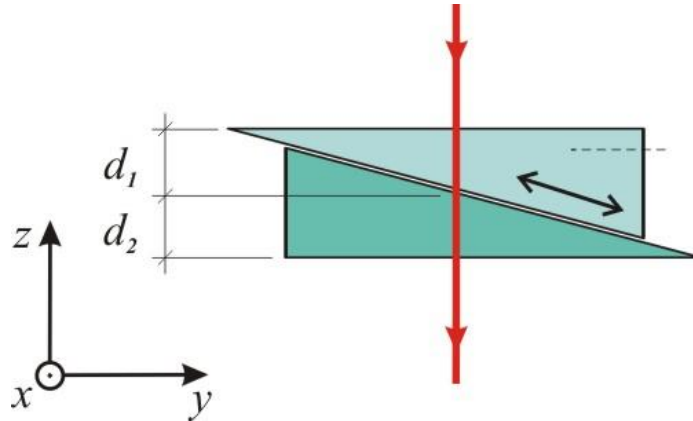
Płytką ($\lambda/2$) obraca płaszczyznę polaryzacji fali liniowo spolaryzowanej o kąt 2α

$$M_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad J_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \bar{J}_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

nie zmieniamy układu odniesienia - dowolne α

Płytką ($\lambda/2$) zmienia skrętność polaryzacji kołowej $P \rightarrow L, \quad L \rightarrow P$

Kompensatory – regulowane płytki falowe



$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e - n_o)(d_1 - d_2)$$

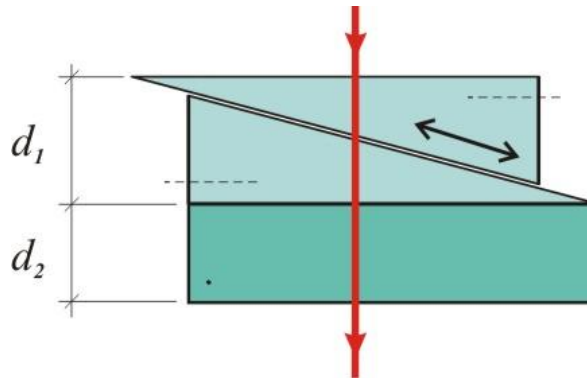
Babinet

$$\delta\varphi = \delta\varphi_x - \delta\varphi_y$$

$$\delta\varphi_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o d_1 + n_e d_2)$$

$$\delta\varphi_y = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_e d_1 + n_o d_2)$$

wada: $\delta\varphi = \delta\varphi(y)$



Babinet – Soleil

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e)(d_1 - d_2)$$



Aktywność optyczna (*optical activity*)

kwarc krystaliczny SiO_2 prawoskrętny
substancje biologiczne, np. cukier (sacharoza)

konsekwencje:

$$n_P \neq n_L$$

$$\delta n = n_P - n_L$$

założmy polaryzację liniową na wejściu

$$\bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{J}_P + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{J}_L$$

2 kołowe polaryzacje mają opóźnienia fazowe:

$$\delta\varphi_P = -ik_0 n_P d$$

$$\delta\varphi_L = -ik_0 n_L d$$



Aktywność optyczna

na wyjściu:

$$\begin{aligned}\bar{J}_{out} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-ik_0 n_P d} \bar{J}_P + e^{-ik_0 n_L d} \bar{J}_L \right\} = \frac{1}{2} \left\{ e^{-i(\Delta+\delta)} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + e^{-i(\Delta-\delta)} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-i\delta} + e^{i\delta} \\ i(e^{-i\delta} + e^{i\delta}) \end{bmatrix} = e^{-i\Delta} \begin{bmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\Delta = \frac{\delta\varphi_P + \delta\varphi_L}{2}$$

$$\delta = \frac{\delta\varphi_P - \delta\varphi_L}{2}$$

$$M_J = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix}$$

baza $\bar{J}_P, \bar{J}_L$

polaryzacja liniowa obrócona o kąt

$$\delta = k_0 (n_P - n_L) d = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta n \cdot d$$

rotator płaszczyzny polaryzacji

liczby: kwarc krystaliczny $\approx 22^\circ/mm$

roztwór cukru



Efekt Faradaya

skręcenie płaszczyzny polaryzacji o kąt θ

$$\theta = \underbrace{V}_{\substack{\text{stała} \\ \text{Verdet'a}}} \cdot B \cdot d$$

podobnie jak przy aktywności optycznej

$$n_P \neq n_L$$

$$\delta n = n_P - n_L \propto B$$

pole magnetyczne wyróżnia kierunek i zwrot

$$\delta n \propto \vec{B} \cdot \hat{z}$$

$$M_J = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix} \quad \delta = k_0 \delta n \cdot d$$

baza polaryzacji kołowych



Wzajemność (*reciprocity*) elementów polaryzacyjnych

1. $\lambda/2$ + lustro

$$J_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

• obrót układu odniesienia

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• $\lambda/2$ + lustro + $\lambda/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• wracamy do układu x-y-z

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

• mnożenie macierzy

$$M = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

polaryzacja światła odbitego (wracającego) taka sama jak polaryzacja światła padającego



Wzajemność (*reciprocity*) elementów polaryzacyjnych

2. $\lambda/4$ + lustro

$$\bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad M_J(\lambda/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

• obrót

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

• $\lambda/4$ + lustro + $\lambda/4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

• powrót do układu x-y-z

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

• razem
$$M_t = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\bar{J}_{out} = M_t \bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \end{bmatrix}$$

polaryzacja liniowa obrócona o kąt 2θ



Wzajemność (*reciprocity*) elementów polaryzacyjnych

3. rotator + lustro

$$\bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ baza polaryzacji liniowych}$$

• rozkładamy $\bar{J}_{in}$ na wektory bazy kołowych polaryzacji $\bar{J}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{J}_P + \bar{J}_L)$

$$\bar{J}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• propagacja przez rotator $M_J = \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix} \quad \delta = k_0(n_P - n_L)\frac{d}{2}$

• odbicie od lustra $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

• znowu rotator $\Rightarrow M_J$

• mnożenie $\begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{J}_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \bar{J}_{in}$$

polaryzacja światła odbitego taka sama jak światła padającego



4. rotator Faradaya + lustro

$$\bar{J}_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

w bazie polaryzacji liniowych

$$\bar{J}_{in} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{J}_P + \bar{J}_L) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

w bazie polaryzacji kołowych

•rotator $\bar{B} \parallel \hat{z}$, propagacja w kierunku +z $\begin{bmatrix} e^{i\delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta} \end{bmatrix}$

•lustro $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

•rotator, propagacja w kierunku -z $\begin{bmatrix} e^{-i\delta} & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{bmatrix}$

•razem $M_t = \begin{bmatrix} 0 & e^{-2i\delta} \\ e^{2i\delta} & 0 \end{bmatrix}$

$$\bar{J}_{out} = \begin{bmatrix} e^{-2i\delta} \\ e^{2i\delta} \end{bmatrix}$$

baza polaryzacji kołowych

$$e^{-2i\delta} \bar{J}_P + e^{2i\delta} \bar{J}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ e^{-2i\delta} [\bar{J}_x + i\bar{J}_y] + e^{2i\delta} [\bar{J}_x - i\bar{J}_y] \right\} = \begin{bmatrix} \cos 2\delta \\ \sin 2\delta \end{bmatrix}$$

baza polaryzacji liniowych

polaryzacja liniowa obrócona o kąt 2δ

Reciprocity – dioda optyczna (*optical diode, optical isolator*)

- płytki falowe + rotator (na aktywności optycznej) $T_{+z} = T_{-z}$
- rotator Faraday'a $T_{+z} \neq T_{-z}$

