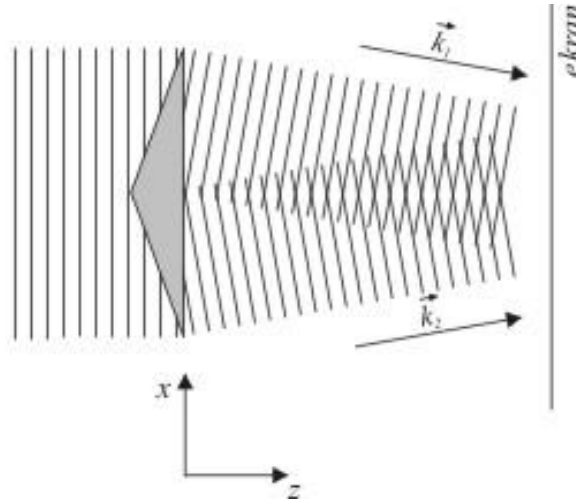




Interferencja światła, interferometry

Interferencja fal monochromatycznych – przykład 1.



$$E_1(\vec{r}) = \sqrt{I_0} e^{-i\vec{k}_1 \vec{r}}$$

$$E_2(\vec{r}) = \sqrt{I_0} e^{-i\vec{k}_2 \vec{r}}$$

$$\vec{k}_1 = [k \sin(\theta/2), 0, k \cos(\theta/2)]$$

$$\vec{k}_2 = [-k \sin(\theta/2), 0, k \cos(\theta/2)]$$

w płaszczyźnie $z=0$

$$\varphi_1 = \vec{k}_1 \vec{r} = x \cdot k \sin(\theta/2)$$

$$\varphi_2 = \vec{k}_2 \vec{r} = -x \cdot k \sin(\theta/2)$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k \cdot x \cdot \sin(\theta/2)$$

$$I(z=0) = 2I_0 \left[1 + \cos \left(2kx \sin \frac{\theta}{2} \right) \right]$$

$$\delta x = \frac{\pi}{k \sin \frac{\theta}{2}}$$



Interferencja wielu fal

M fal o jednakowej amplitudzie i stałej różnicy faz

$$E_m = I_0^{1/2} e^{i(m-1)\varphi} \quad m=1, 2, \dots, M$$

oznaczmy:

$$x = e^{i\varphi} \quad E_m = \sqrt{I_0} x^{m-1}$$

całkowite pole

$$E = \sum_{m=1}^M E_m = \sum_{m=1}^M \sqrt{I_0} x^{m-1} = \sqrt{I_0} \sum_{m=1}^M x^{m-1} \quad \sum_{m=1}^M x^{m-1} = \frac{1-x^M}{1-x}$$

$$E = \sqrt{I_0} \frac{1-e^{iM\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \quad I = I_0 \left| \frac{1-e^{iM\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right|^2 = \left| \frac{1-e^{iM\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \right|^2 = \left| \frac{e^{-i\varphi M/2}}{e^{-i\varphi/2}} \cdot \frac{e^{i\varphi M/2} - e^{-i\varphi M/2}}{e^{i\varphi/2} - e^{-i\varphi/2}} \right|^2 = \left(\frac{\sin(M\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right)^2$$

$$I = I_0 \frac{\sin^2(M\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

wartość maksymalna $\frac{\sin^2(M\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$

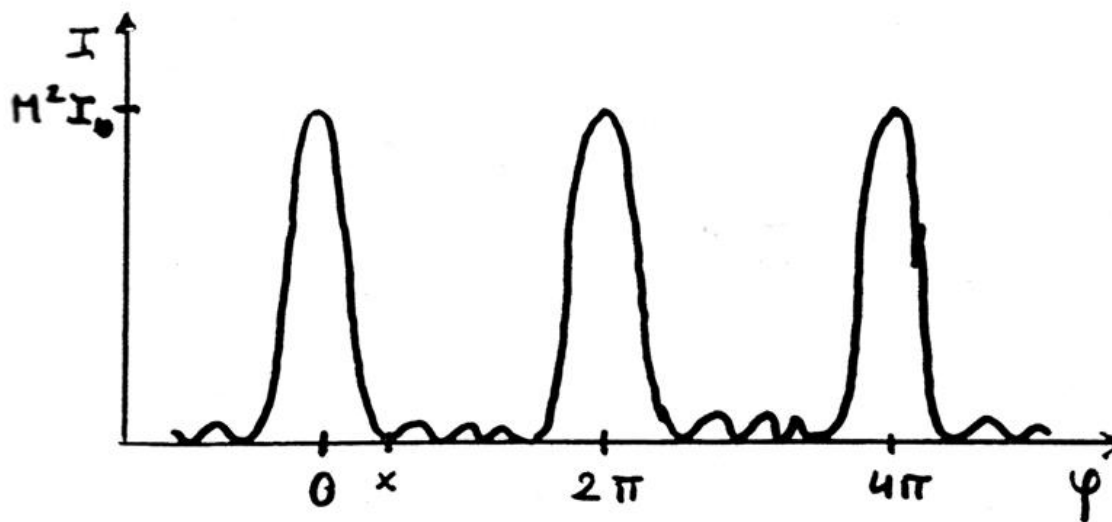
dla $\varphi/2 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ bo wtedy $\sin(\varphi/2) = 0$

np. dla $\varphi \rightarrow 0$ $\frac{\sin(M\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \cong \frac{M\varphi/2}{\varphi/2} = M$

$$I(\varphi = 0) = M^2 I_0$$

szerokość pików: $\sin(Mx/2) = 0$

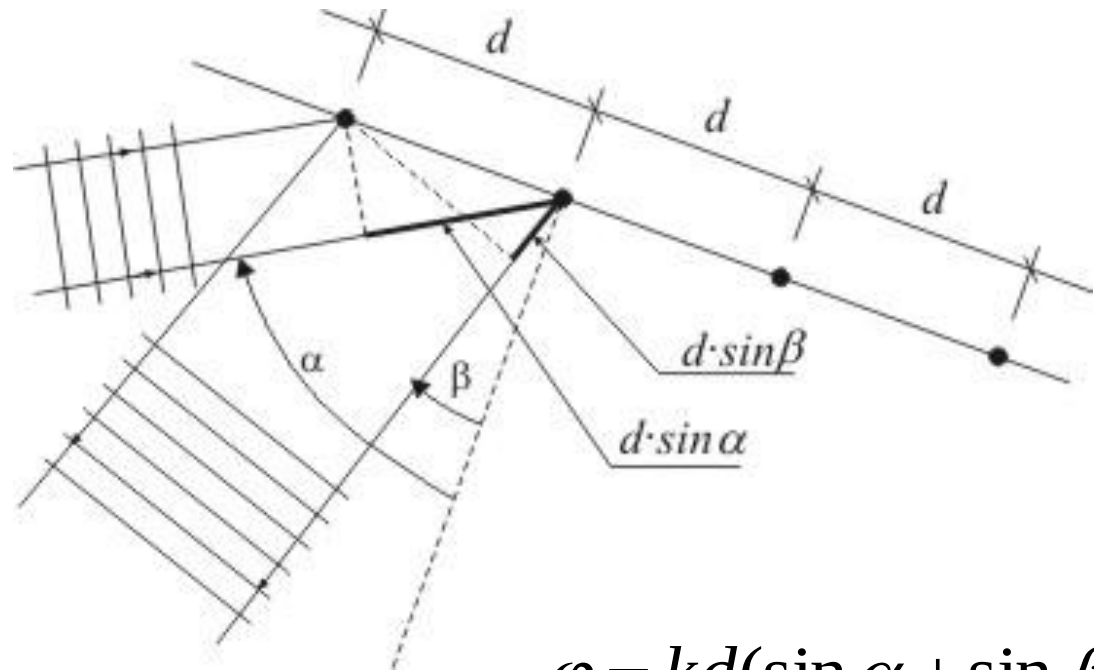
$$x = \frac{2\pi}{M}$$



Interferencja wielu fal, przykład 1. – siatka dyfrakcyjna

obserwacja w nieskończoności

m - rząd ugięcia



$$\varphi = kd(\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$\varphi = 2\pi \Leftrightarrow \sin \alpha + \sin \beta = \frac{m\lambda}{d}$$



Interferencja wielu fal, przykład 2. – interferometr Fabry-Perot

założenia $E_0 = \sqrt{I_0}$, $E_1 = \sqrt{I_0} r e^{-i\varphi}$, ... , $E_n = \sqrt{I_0} r^n e^{-in\varphi}$, ...

całkowite pole
$$E = \sum_{n=0}^{\infty} E_n = \sqrt{I_0} \sum_{n=0}^{\infty} (r e^{-i\varphi})^n = \frac{\sqrt{I_0}}{1 - r e^{-i\varphi}}$$

natężenie

$$I = |E|^2 = \frac{I_0}{|1 - r e^{i\varphi}|^2}$$

$$1 - r e^{i\varphi} = 1 - r \cos \varphi - i r \sin \varphi$$

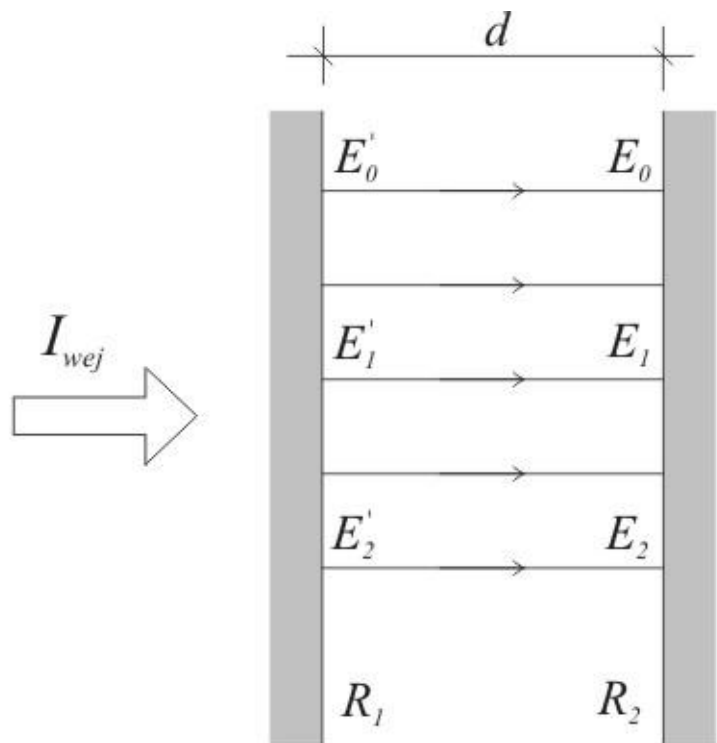
$$|1 - r e^{i\varphi}|^2 = (1 - r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi = (1 - r)^2 + 4r \sin^2(\varphi/2)$$

$$I = \frac{I_0}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\varphi/2)}$$

$$I_{\max} = \frac{I_0}{(1 - r)^2}$$

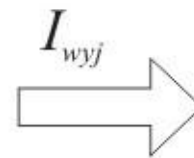


Interferencja wielu fal, przykład 2. – interferometr Fabry-Perot



$$E_R = s \cdot E_{in} \quad I_R = s^2 \cdot I_{in}$$

$$E_T \neq (1-s)E_{in} \quad I_T = (1-s^2) \cdot I_{in}$$



$$I_0 = (1-s^2) \cdot I_{in}$$

$$U_1 = U_0 s^2 e^{-i2kd}$$

$$U_2 = U_0 (s^2 e^{-i2kd})^2$$

$$\vdots$$

$$U_n = U_0 (s^2 e^{-i2kd})^n$$

$$r = s^2, \quad \varphi = 2kd = \frac{2n\omega}{c}$$

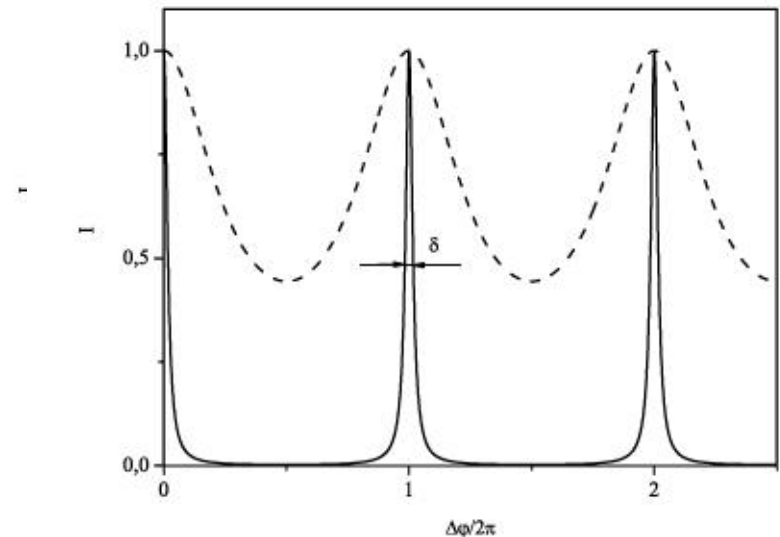
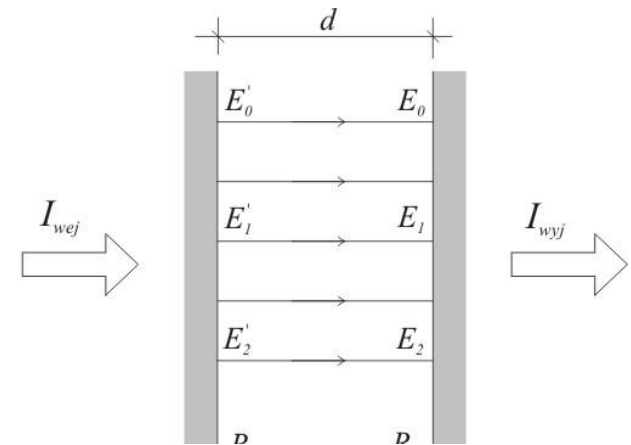
Interferencja wielu fal, przykład 2. – interferometr Fabry-Perot

$$\begin{aligned}
 I_{wyj} &= (1 - s^2)I = \\
 &= (1 - s^2) \frac{I_0}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\varphi/2)} = \\
 &= \frac{(1 - r)^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\varphi/2)} I_{wej}
 \end{aligned}$$

$$T = \frac{I_{wyj}}{I_{wej}} = \frac{(1 - r)^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\varphi/2)}$$

$$r = s^2$$

$$\varphi = 2kd$$

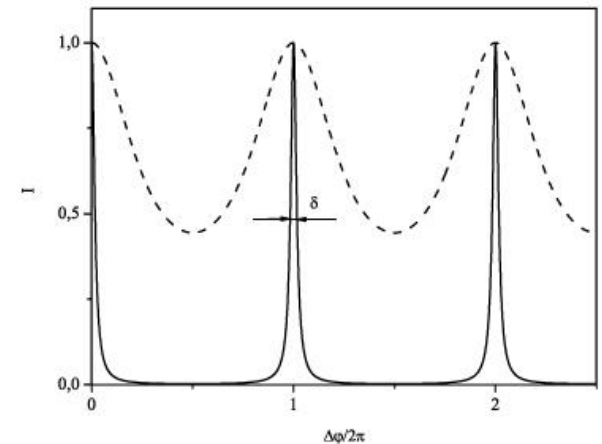


Interferencja wielu fal, przykład 2. – interferometr Fabry-Perot

szukamy FWHM (Full Width @ Half Maximum)

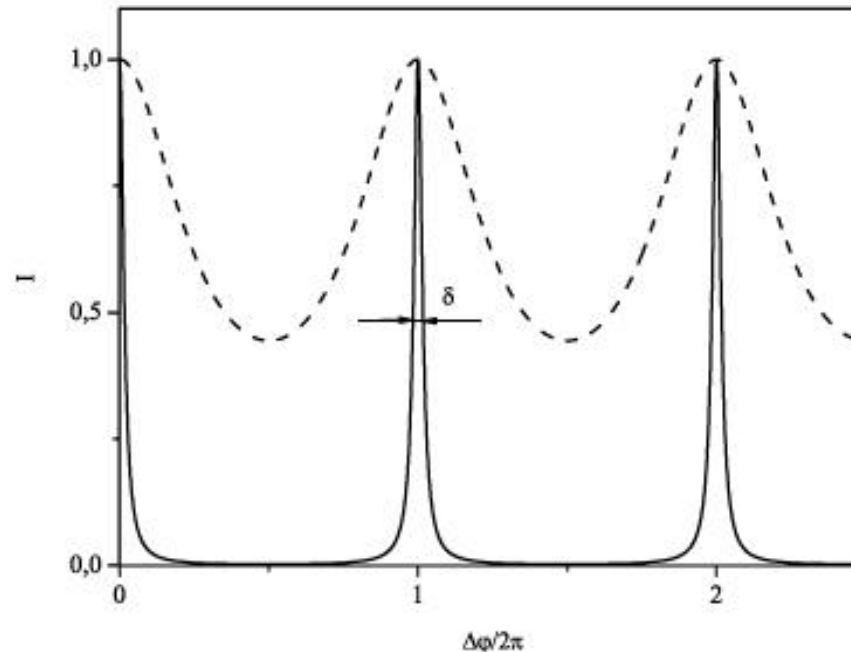
$$T[(k-1)2\pi] = 1, \quad T[(k-1)2\pi + \delta\varphi] = \frac{1}{2}$$

$$\frac{(1-r)^2}{(1-r)^2 + 4r \sin^2[(k-1)\pi + \delta\varphi / 2]} = \frac{1}{2}$$



- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\sin[(k-1)\pi] = 0, \quad \cos[(k-1)\pi] = \pm 1$
- $\delta \ll \pi \Rightarrow \sin \delta \approx \delta$

Interferencja wielu fal, przykład 2. – interferometr Fabry-Perot



$$FWHM = 2\delta\varphi = \frac{2(1-r)}{\sqrt{r}}$$

$$\delta\varphi = \frac{1-r}{\sqrt{r}}$$

$$F = \frac{2\pi}{FWHM} = \frac{\pi\sqrt{r}}{1-r}$$

finesse interferometru
Fabry - Perot

Interferencja wielu fal, przykład 3. – interferometr Fizeau

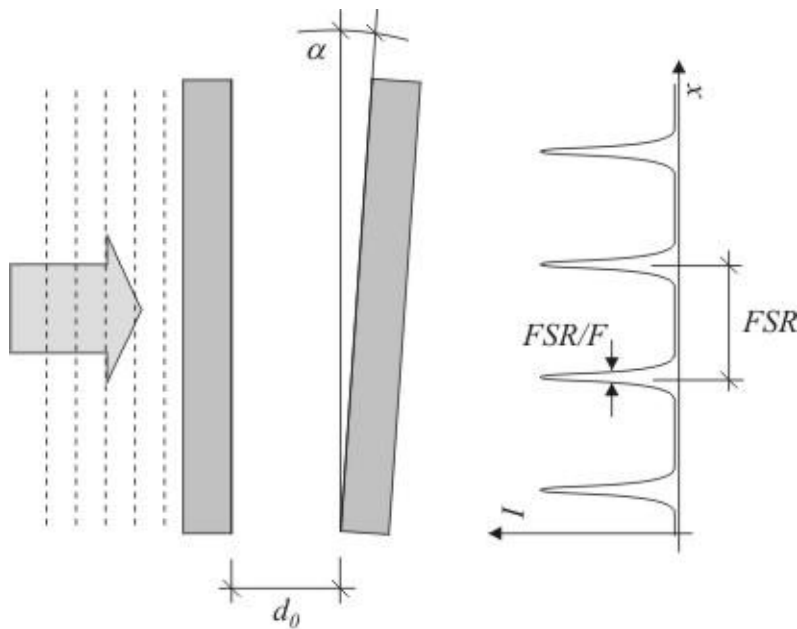
odległość pomiędzy lustrami

$$d(x) = d_0 + \alpha x, \quad \alpha \ll 1$$

fala wejściowa $E(\vec{r}) = \sqrt{I_0} e^{-ikz}$

$$E_2 = E_1 s^2 e^{-i\varphi_2}$$

$$E_3 = E_2 s^2 e^{-i\varphi_3}$$

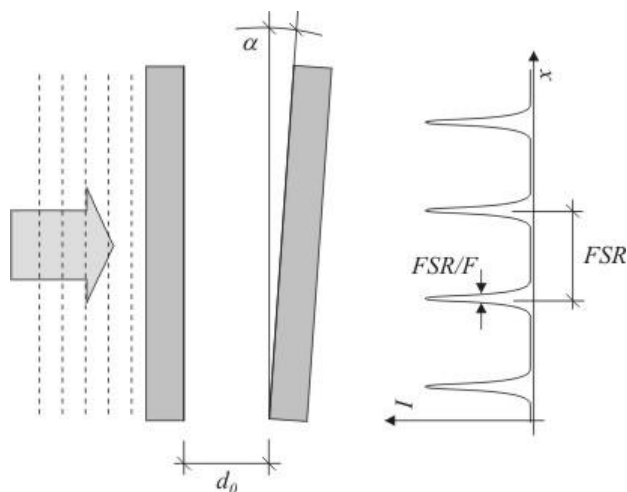


$$\varphi_2 = k \left(\frac{d}{\cos 2\alpha} + \frac{d}{\cos 4\alpha} \right) \cong 2kd$$

$$\cos x \approx 1 - x^2 / 2$$

$$\varphi_3 = k \left(\frac{d}{\cos 6\alpha} + \frac{d}{12\alpha} \right) \cong 2kd$$

Interferencja wielu fal, przykład 3. – interferometr Fizeau



Jeśli α jest odpowiednio małe to dla kilku (kilkunastu) odbić możemy użyć przybliżenia $\varphi_n \cong 2kd$

Lokalnie (w okolicy ustalonego x) interferometr Fizeau możemy przybliżyć przez Fabry -Perot

T jest bliskie 1 gdy $2kd(x) = 2k(d_0 + \alpha x) = n \cdot 2\pi$, $n = 1, 2, \dots$

jasne prążki oddalone są o $\frac{\lambda}{2\alpha}$



Fale niemonochromatyczne (polichromatyczne)

zasada superpozycji

Jeśli $u_i(\vec{r}, t)$ są rozwiązaniami równania falowego to
 $\sum_i u_i(\vec{r}, t)$ też jest rozwiązaniem tego równania

Dowolne pole $E(\vec{r}, t)$ można zapisać jako superpozycję
fal monochromatycznych $E(\vec{r}, \omega)$

$$\hat{E}(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\vec{r}, t) e^{-i\omega t} dt$$

$$E(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{E}(\vec{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega$$

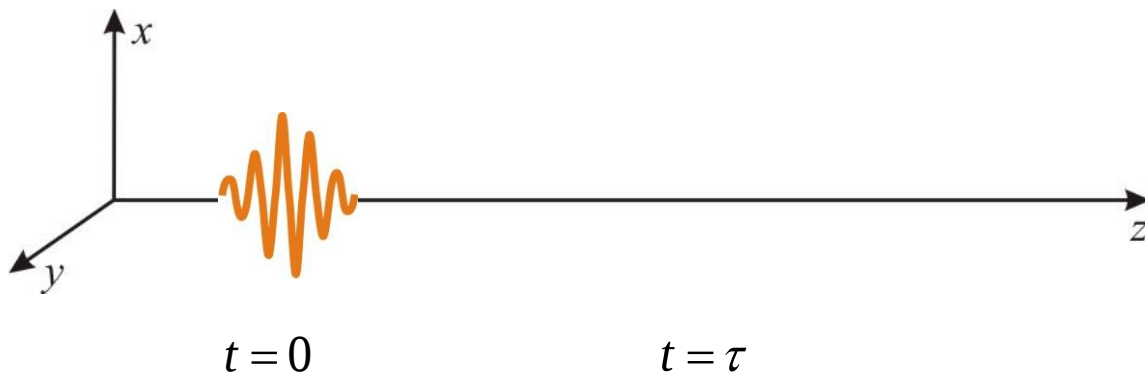


Przykład 1. superpozycja płaskich fal monochromatycznych

$$U(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{-ikz} e^{i\omega t} d\omega = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right)} d\omega$$

$\uparrow$
 $k = \omega / c$

$$U(\vec{r}, t) = f\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) e^{i\omega x} d\omega$$

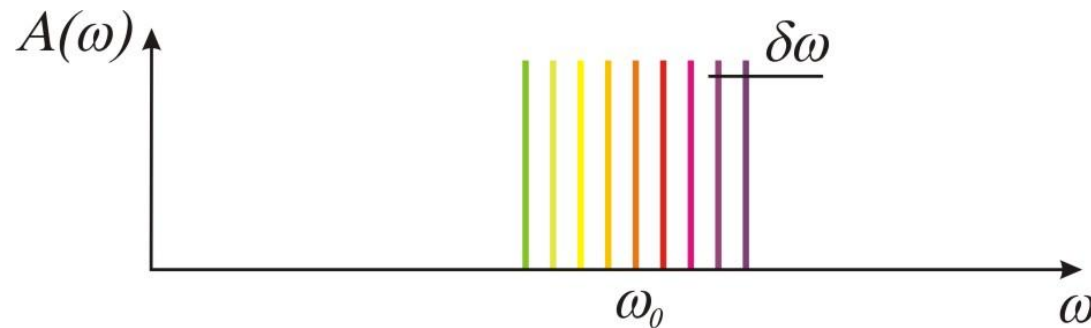


paczka falowa

uwaga na $n(\omega)$



Przykład 2. superpozycja M fal monochromatycznych



$$\omega_n = \omega_0 + n\delta\omega$$

$$n = -L, -L+1, \dots, L-1, L$$

$$M = 2L + 1$$

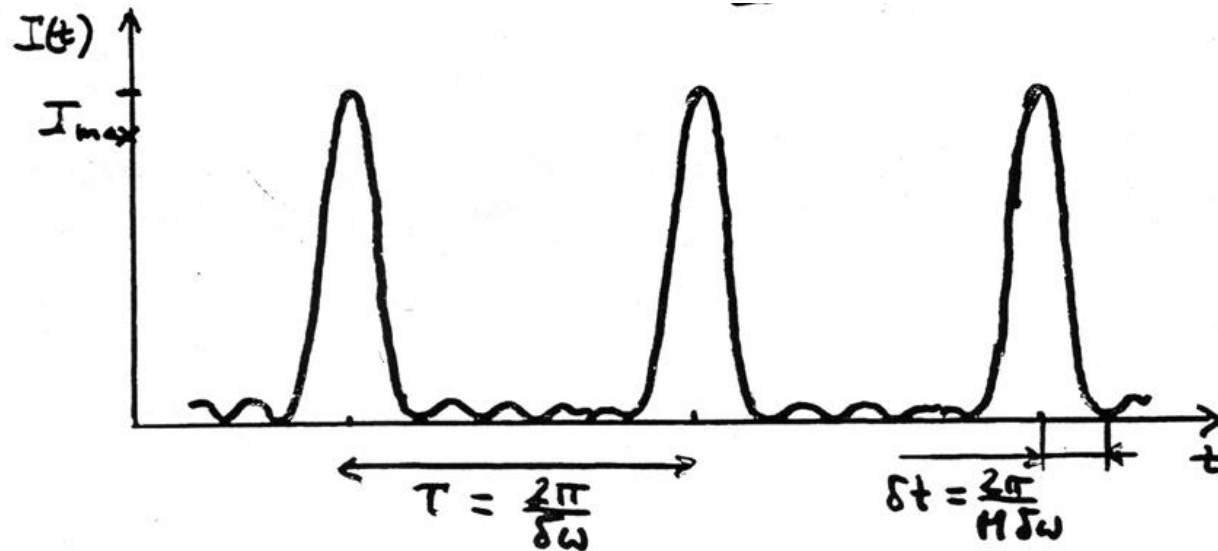
pomijamy zależność od $\mathbf{r}$

$$U(t) = \sum_{n=-L}^L \sqrt{I_0} e^{i(\omega_0 + n\delta\omega)t} = \sqrt{I_0} e^{i\omega_0 t} \sum_{n=-L}^L \left[e^{i\delta\omega t} \right]^n$$

$$I(t) = |U(t)|^2 = I_0 \left[\frac{\sin(M\delta\omega t)}{\sin(\delta\omega t)} \right]^2$$



Przykład 2. superpozycja M fal monochromatycznych



$$T = \frac{2\pi}{\delta\omega} \qquad \delta t = \frac{2\pi}{M\delta\omega}$$

$$I_{\max} = M^2 I_0 = M(MI_0)$$

mode - locking



impuls gaussowski

weźmy fale płaskie, $\vec{k} \parallel z$ $E(\vec{r}, t) = A(\omega) e^{i(\omega t - kz)}$

załóżmy: $-A(\omega) = e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma_\omega}\right)^2}$ σ_ω - szerokość widmowa

$$-\sigma_\omega \ll \omega_0$$

$$-k(\omega) = n\omega / c, \quad n = \text{const}$$

$$E(\vec{r}, t) = \int_0^{+\infty} d\omega e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma_\omega}\right)^2} e^{i(\omega t - kz)}$$

dla $z = 0$

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega_0 t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_0}{\sigma_\omega}\right)^2} + i(\omega - \omega_0)t = e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x}{\sigma_\omega}\right)^2} + ixt \, dx \\ &\quad x = \omega - \omega_0 \\ &= \sqrt{\pi} \sigma_\omega e^{-\left(\frac{\sigma_\omega t}{2}\right)^2} e^{i\omega_0 t} = \sqrt{\pi} \sigma_\omega e^{-\left(\frac{t}{\sigma_t}\right)^2} e^{i\omega_0 t} \end{aligned}$$
$$\sigma_t = \frac{2}{\sigma_\omega}$$